Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg 09.06.2021
Institut für Analysis und Numerik
PD. Dr. B. Rummler

Funktionentheorie (SS 2021)
Übungsaufgaben, Serie 5

1. Gegeben sei eine Potenzreihe
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$
mit Konvergenzradius $r > 0$ und es sei $z_0 \in K(0, r)$. Darüber hinaus sei $a_0 \neq 0$. Zeigen Sie, dass sich $1/f(z)$ ebenfalls in z_0 als Potenzreihe
$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k$$
entwickeln lässt und berechnen Sie die Koeffizienten d_k in Abhängigkeit von a_k und schätzen Sie den Konvergenzradius dieser Potenzreihe ab.

2. Es sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so dass $f|_{\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C}:\ Im(z)=0\}}$ holomorph ist. Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{C}$ holomorph ist.
Hinweis: Satz von Morera.

3. Berechnen Sie
$$\int_{S(0,r)} \frac{1}{(z-a)^n (z-b)^m}\, dz \text{ für } r \in (|a|, |b|) \text{ und } n, m \in \mathbb{N}$$

4. a) Es sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, für die Konstanten $K > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ existieren, so dass
$$|f(z)| \leq K|r|^k \quad \text{für} \quad |z| \leq r$$
oder für die Konstanten $a, b > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ existieren
$$|f(z)| \leq a + b|z|^k$$
für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Zeigen Sie, dass f in beiden Fällen ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich k ist.

   b) Geben Sie eine holomorphe Funktion $f : K(0, 1) \longrightarrow \mathbb{C}$ an, die unendlich viele Nullstellen hat aber nicht identisch verschwindet.