Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
PD. Dr. B. Rummler

26.05.2021

Funktionentheorie (SS 2021)

Übungsaufgaben, Serie 4

1. Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen $z_0 \in G$ und $r > 0$ so dass $\overline{K}(z_0, r) \subseteq G$ sowie $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) \neq 0$ und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \overline{K}(z_0, r) \backslash \{z_0\}$. Man zeige, dass
$$\int_{S(z_0,r)} \frac{1}{f(z)}\,dz = \frac{2\pi i}{f'(z_0)}$$
gilt.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass es eine holomorphe Funktion $f_1 : U \longrightarrow \mathbb{C}$ mit
$$f(z) = (z - z_0) f_1(z)$$
für alle $z \in U$ gibt und bestimmen Sie ein $c \in \mathbb{C}$ und eine holomorphe Funktion $q : U \longrightarrow \mathbb{C}$, so dass
$$\frac{1}{f(z)} = \frac{c}{z - z_0} + \frac{q(z)}{f_1(z)}$$
für alle $z \in \overline{K}(z_0, r) \backslash \{z_0\}$ gilt. Hierbei ist $U \subseteq G$ eine geeignete Umgebung von $\overline{K}(z_0, r)$.

2. Es sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^3 + 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$

   a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f und geben Sie diese in der Form $x + iy$ an.

   b) Berechnen Sie
$$\int_{S(-1,1/10)} \frac{1}{z^3 + 1}\,dz$$

3. Berechnen Sie die folgenden Integrale

   a)
$$\int_{S(-1,1)} \frac{1}{(z+1)(z-1)^3}\,dz$$

   b)
$$\int_{S(0,2)} \frac{\sin(z)}{z+i}\,dz$$

   c)
$$\int_{S(-2i,3)} \frac{1}{z^2 + \pi^2}\,dz$$

d)

$$\int_{S(0,1/2)} \frac{\exp(1-z)}{z^3(1-z)}\, dz$$