Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
PD. Dr. B. Rummler

12.05.2021

Funktionentheorie (SS 2021)

Übungsaufgaben, Serie 3

1. Wir betrachten für vier paarweise verschiedene $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_0$ das Doppelverhältnis

$$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

Man zeige, dass für jede Möbius-Transformation $M : \mathbb{C}_0 \longrightarrow \mathbb{C}_0$ die Invarianz

$$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) = DV(M(z_1), M(z_2), M(z_3), M(z_4))$$

gilt.

2. Seien u_1, u_2, u_3 drei paarweise verschiedene Punkte aus $\mathbb{C}_0$. Zeigen Sie die Existenz einer Möbiustransformation M, so dass $M(0) = u_1$, $M(1) = u_2$ und $M(\infty) = u_3$.
Beweisen Sie also: wenn auch v_1, v_2, v_3 drei paarweise verschiedene Punkte aus $\mathbb{C}_0$ sind, dann gibt es genau eine Möbiustransformation M mit $M(u_i) = v_i$ für $i = 1, 2, 3$.

3. Zeigen Sie, dass eine von der Identität verschiedene Möbius-Transformation höchstens zwei Fixpunkte besitzt.

4. a) Finden Sie eine Möbius-Transformation, welche die Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ bijektiv auf $\{z \in \mathbb{C}_0 : |z - 1| > 1\}$ abbildet.
   b) Bestimmen Sie alle Möbiustransformationen, welche die obere Halbebene $H_+ := \{z \in \mathbb{C} : Im\ z > 0\}$ auf die untere Halbebene $H_- := \{z \in \mathbb{C} : Im\ z < 0\}$ abbilden.

5. a) Geben Sie die Mengen $[i^i]$, $[\log](i)$ und $[(\sqrt{2})^{1+2i}]$ an.
   b) Finden Sie alle komplexen Nullstellen von Sinus und Kosinus.
   c) Bestimmen Sie die Menge $\sin^{-1}(\mathbb{R})$.
   d) Zeigen Sie, dass gleichmäßig in $a \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{b \to \pm\infty} |\sin(a + ib)| = \infty$