Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
PD. Dr. B. Rummler 29.04.2021

Funktionentheorie (SS 2021)
Übungsaufgaben, Serie 2

1. Bestimmen Sie alle Punkte $z \in \mathbb{C}$ so dass die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind
   a) $f_1(z) := \frac{1}{z}$
   b) $f_2(z) := \sin(|z|^2)$

2. Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen holomorph sind
   a) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(x+iy) := x^2 + y^2 - 2ixy$
   b) $g : \mathbb{C}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(x+iy) := \frac{ix+y}{x^2+y^2}$
   c) $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad h(z) := z^2|z|$

3. Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f = u + iv : G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine zweimal stetig differenzierbare holomorphe Funktion
   a) Zeigen Sie, dass die Ableitung von f holomorph ist
   b) Zeigen Sie, dass sowohl der Real- als auch der Imaginärteil von f ist harmonisch ist, das heißt $\Delta u = 0 = \Delta v$

4. Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f = u + iv : G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass f konstant ist, falls eine der folgenden Bedingungen gilt
   a) u ist konstant
   b) v ist konstant
   c) $|f|$ ist konstant

5. a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

   unendlich oft differenzierbar, aber nicht analytisch ist.

b) Gegeben sei die Menge $S := \{(x, \sin(1/x))|\ x \in (0,1]\}$. Bestimmen und skizzieren Sie den Abschluss von S, das heißt $\overline{S}$, und zeigen Sie, dass der topologische Raum $(\overline{S}, \mathcal{T}_{\overline{S}})$ zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist. Hierbei ist $\mathcal{T}_{\overline{S}}$ die von der Standardtopologie in $\mathbb{R}^2$ auf $\overline{S}$ induzierte Topologie.

6. a) Finden Sie Potenzreihen, die in genau den folgenden Mengen $M \subset \mathbb{C}$ konvergieren

$$(i)\, \mathbb{C} \quad (ii)\, \{\pi\} \quad (iii)\, K(0,1) \quad (iv)\, \overline{K(0,1)} \quad (v)\, \overline{K(0,1)} \backslash \{-1\}$$

b) Schreiben Sie die folgenden Funktionen als Potenzreihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ und bestimmen Sie jeweils, in welchem Gebiet diese Entwicklung zutrifft

$$(i)\, \frac{1}{2019z + 42}, \quad (ii)\, \frac{1}{z^2 - iz + 12}$$