Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
PD. Dr. B. Rummler 15.04.2021

Funktionentheorie (SS 2021)

Übungsaufgaben, Serie 1

1. Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, so dass der Ausdruck $z + \frac{1}{z}$ reell ist.

2. Zu einer gegebenen Zahl $z \in \mathbb{C}$ sei $z' \in \mathbb{C}$ diejenige Zahl, welche durch Spiegelung des Punktes z an der imaginären Achse hervorgeht. Geben Sie einen rechnerischen Ausdruck für z' in Abhängigkeit von z an.

3. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen f ob der Grenzwert $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ existiert und falls ja, bestimmen Sie diesen Grenzwert.

   a) $f(z) = \frac{|z|^2}{z}$
   b) $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$
   c) $f(z) = \frac{z+i}{|z|-1}$
   d) $f(z) = \frac{\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z)}{|z|}$

4. Gegeben seien $a, c \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Punktmenge

$$M := \left\{ z \in \mathbb{C} : \ a|z|^2 + bz + \overline{bz} + c = 0 \right\}$$

   eine Kreislinie oder eine Gerade ist, falls $ac < |b|^2$ gilt.

5. Zeigen Sie, dass die reellen Matrizen der Form $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, versehen mit der üblichen Addition und Multiplikation, einen Körper bilden, der zu $\mathbb{C}$ isomorph ist.