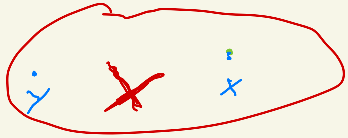
Funktionentheorie



$\tau = \{\emptyset, \cancel{X}\}$

chaotische Topologie

Finden in τ keine Elemente um x und y zu unterscheiden.

$x = 1$, $y = 2$

$\{1, 2, 1, 1, 2, 1, \dots\}$, $\{2\}_{k=1}^{\infty}$, $\{1\}_{k=1}^{\infty}$

Konvergenz aller Folgen gegen $\{1\}_{k=1}^{\infty} \to 1$
$\to 2$ | Problem

also Grenzwert nicht eindeutig!!

$$u(x_0+iy_0+k+il)-u(x_0+iy_0)$$
$$+iv(x_0+iy_0+k+il)-iv(x_0+iy_0)$$

Bew. Satz 3.5.

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ i\frac{\partial v}{\partial x} & i\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} + R_f(\;)$$

Umrechnungsformel

$$= \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{a}\cdot k + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{-b} l + i\left[\underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{a}\cdot l + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{b} k\right] + R_f(\quad)$$

bzw.

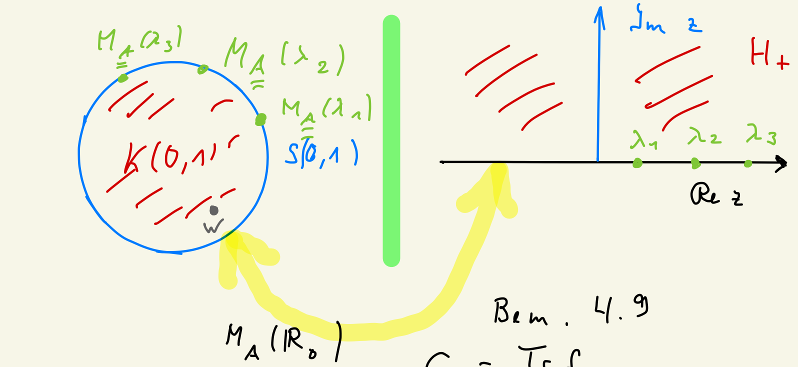
$$f'(z_0) = (a+ib)\quad,\quad h = (k+il)$$

Das ergibt:

$$f'(z_0)\cdot h = ak - bl + i(al + bk)$$

Ausdrücke in Satz 3.5 (Bew.) ergeben das gleiche Ergebnis.

Rechentrick: $\begin{bmatrix} a & -b \\ i\cdot b & ia \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \ldots$



Bem. 4.9

C - Trf.

Bildet $w \in K(0,1)$ für Automorph.

Idee: Menge aller beschränkten Fktn.

$f: G \to E^1_{\mathbb{C}}$ ist lin. VR

Na.: $B(G)$, darauf ist

Norm erklärt:

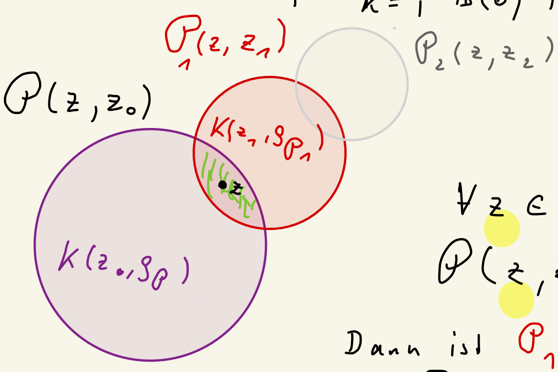
$\forall f \in B(G): \|f\|_{B(G)} := \sup_{x \in G} |f(x)|$

Die glm. Konvergenz

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \underset{G}{\rightrightarrows} f$ ist die Konvergenz

im Banach-Raum: $\mathbb{B}(G) = (B(G), \|.\|_{B(G)})$

dh. $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \xrightarrow[\mathbb{B}(G)]{} f$



$\forall z \in$ gelte

$P(z, z_0) = P_1(z, z_1)$

Dann ist $P_1(.,.)$ Fortsetzg.

von $P(z, z_0)$!

Potenzen u. Potenzfktn.

z^m , $m \in \mathbb{N}$,

Bsp. $m = 2$, $z^2 =: f(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Umkehrfkt. ? $z^{\frac{1}{2}}$?

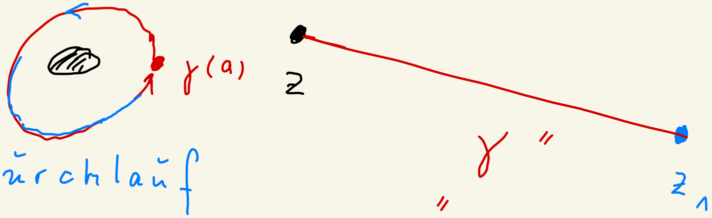
$z = Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi)$

$f(z) = R^2 e^{2i\varphi}$, d.h. alle Zahlen aus der pos. Halbebene liefern quadrisch: $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ Umkehrfkt. muss über $(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{0\}$

$z^{\frac{1}{2}}$; $\varphi \in [0, \pi)$ $\qquad \varphi \in [\pi, 2\pi)$

Potenzfkt: $z^{\varkappa}$, $\varkappa \in$?

Mehrfacher



Durchlauf

γ - Komplexer Weg

Wir sind in $\mathbb{C}$ und nicht „im E^2"

Berechnen, $dz = r e^{it} \cdot i \, dt$

2. $\displaystyle\int_{S(z_0,r)} (z-z_0)^k \, dz = (0)$, $z = z_0 + r e^{it}$

$$\frac{dz}{dt} = r e^{it} \cdot i$$

$$(0) \quad \int_0^{2\pi} (r e^{it})^k \, r e^{it} \, i \, dt =$$

$$i \, r^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{(k+1)it} \, dt =$$

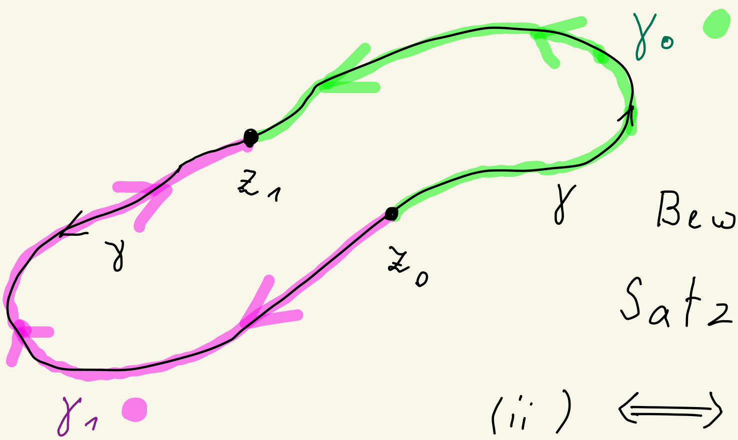
Grundintegral $\Big| \quad = i \, r^{k+1} \dfrac{e^{(k+1)it}\Big|_0^{2\pi}}{k+1}$

$k+1 \neq 0 \qquad = i \, r^{k+1} \dfrac{1}{k+1} \Big(\underbrace{e^{2\pi \overset{\neq 0}{(k+1)} i} - 1}_{=0} \Big)$

$k = -1$; $\bullet = e^0 = 1$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi$

$$\int_{S(z_0,r)} (z-z_0)^{-1} \, dz = 2\pi i$$

03.05.21



Bew. Satz 6.6.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii)

$$\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1^-$$

Idee, top. Raum (X, τ) (Erinnerung)

und Teilmenge von X: $M \subset X$

$M \neq \emptyset$

Unterraum-Topologie

(M, τ_M) mit $\tau_M := \{M \cap T ; T \in \tau\}$

Zusammenhang: (M, τ_M) zusammenhängend $\Longleftrightarrow$ $M, \emptyset$ sind hier die einzigen offen-abgeschlossenen Mengen.

Betrachten System: $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$

Im H-Raum $L_2(0, 2\pi)$ (bzw. $\mathbb{L}_2(-\pi, \pi)$)

haben wir: Orthogonalitätsbeziehung:

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{ilt} \, dt = \begin{cases} 0 & \text{sonst.} \\ & \text{bei} \\ 2\pi & k = +l \end{cases}$$

System $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ist ein

Orthogonormalsystem. ONS

$$b(g) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{b_k(g)}\, w_k \quad = f(g) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, \underline{g^j} \quad \underbrace{e^{ijt}}$$

$\Rightarrow$ 2π Strafe

$\mathcal{H} : \{w_k\}_{k=1}^{\infty}$

$k \in \mathbb{Z}$

Parseval

$$\|b\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_k |b_k(g)|^2 \quad \Big| \quad |f(g)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \Big(\sum_j\Big)\, \overline{\Big(\sum_{j^*}\Big)}\, dt$$

Idee Bew. Satz von Arzela-Ascoli

(Satz 8.7)

Start: $\mathcal{U}(\underline{x}_0)$ hier wählen wir abzählbar dichte Teilmenge $\tilde{D} \subset \mathcal{U}(\underline{x}_0)$

$\tilde{D} = \{\underline{x}_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ dazu Folge $\{f_k(\underline{x})\}_{k=1}^{\infty}$

- Bolzano-Weierstraß:

$$\underline{x}_1 \sim \{f_k(\underline{x}_1)\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ \begin{bmatrix} f_k^1(\underline{x}_1) \\ \vdots \\ f_k^m(\underline{x}_1) \end{bmatrix} \right\}_{k=1}^{\infty}$$

$f_k^1(\underline{x}_1)$ - enthält konv. Teilfolge (TF)

$f_{\tilde{k}}^1(\underline{x}_1)$ ... Betrachten im 2. Schritt

$$\{f_{\tilde{k}}^2(\underline{x}_1)\} \subset \{f_k^2(\underline{x}_1)\}$$

Diese Folge enthält wieder konv. TF

Trick diese Teilfolge sei $\{f_{\tilde{\tilde{k}}}(\underline{x}_1)\}$

Erreicht: $\{f_{\tilde{\tilde{k}}}^{\tilde{i}}(\underline{x}_1)\}_{\hat{\tilde{k}}=1}^{\infty}$ $\tilde{i} = 1, 2$

... m-te Komponente:

$\{f_{k_1}(\underline{x}_1)\}_{k_1=1}^{\infty}$ konv. in jeder Komponente

Benützen $\{f_{k_1}\}$ und

wenden diese auf $\underline{x}_2$ an: $\{f_{k_2}\}_{k_2=1}^{\infty}$

...

$\underline{x}_1$: $f_{k_1=1}$, $f_{k_1=2}$, $f_{k_1=3}$, ...

$\underline{x}_2$: $f_{k_2=1}$, $f_{k_2=2}$, $f_{k_2=3}$, ...

$\underline{x}_3$: $f_{k_3=1}$, $f_{k_3=2}$, $f_{k_3=3}$, ...

Erhalten neue Teilfolge von $\{f_k\}$:

$\{f_{k^*}\}_{k^*=1}^{\infty}$ konv. $\forall \{\underline{x}_\ell\}_{\ell=1}^{\infty} = \tilde{D}$

Argumentation bei Diagonalfolge:

$\{f_{k^*}\}_{k^*=1}^{\infty}$ ist bis auf endlich viele Glieder

TF von $\{f_{k_e}\}_{k_e=1}^{\infty}$ und damit konvergent.

Stetigkeit: 2. Abschnitt

Hier nutzen wir Cauchy-Folgen-Eigenschaft.

Lokal gleichgradige Stetigkeit nutzen mit $\overline{U}(\underline{x}_0) \subset G$, $\overline{U}(\underline{x}_0)$ kompakt.

Zeigen glm. Konvergenz von Teilfolge auf $\overline{U}(\underline{x}_0)$:

Lassen D wieder abzählbar, dicht in $U(\underline{x}_0)$. Wählen wieder $\{\underline{x}_l\}_{l=1}^{\infty} = D$ und $\{f_{k^*}\}_{k^*=1}^{\infty} \subset \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Gleichgrad. Stetigkeit ist glm. Stetigkeit in jeder einzelnen Fkt. f_{k^*}:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall \underline{x}^1, \underline{x}^2 \in \bar{U}(\underline{x}_0)$ u. $\forall k^* \in \mathbb{N}$:

$\|\underline{x}^1 - \underline{x}^2\|_{\mathbb{E}^n} < \delta \; : \; \|f_{k^*}(\underline{x}^1) - f_{k^*}(\underline{x}^2)\|_{\mathbb{E}^m} < \frac{\varepsilon}{3}$

Nun $\underline{x} \in \bar{U}(\underline{x}_0)$ bel. Dann ex. endliches δ-Netz $\{\underline{x}_{l_j}\}_{j=1}^{N} \subset D$ mit $\|\underline{x} - \underline{x}_{l_j}\|_{\mathbb{E}^n} < \delta$.

l_j - fix

Für $k^*, r^* > \max\limits_{j=1,\dots,N} \{l_j\}$ ist dann

$$\|f_{k^*}(\underline{x}_{l_j}) - f_{r^*}(\underline{x}_{l_j})\|_{\mathbb{E}^m} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \Rightarrow$$

$$\|f_{k^*}(\underline{x}) - f_{r^*}(\underline{x})\|_{\mathbb{E}^m} < \|f_{k^*}(\underline{x}) - f_{k^*}(\underline{x}_{l_j})\|_{\mathbb{E}^m}$$

$$+ \|f_{k^*}(\underline{x}_{l_j}) - f_{r^*}(\underline{x}_{l_j})\|_{\mathbb{E}^m} + \|f_{r^*}(\underline{x}_{l_j}) - f_{r^*}(\underline{x})\|_{\mathbb{E}^m}$$

$< \varepsilon$, d.h. $\{f_{k^*}\}_{k^*}$ ist glm.

Cauchyfolge in $\underline{\mathbb{C}}(\bar{U}(\underline{x}_0))$ - Banachraum

also konvergent mit „Grenzfkt." $\underline{f} = \underline{f}_0$

Dichtheitsargument.

$M := f(\mathcal{U}(z_0) \setminus \{z_0\}) \subset \mathbb{C}$

M ist dicht in $\mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$

$\forall \tilde{z} \in \mathbb{C}$ und $\forall \varepsilon > 0 \;\exists\; w \in M$:

$|\tilde{z} - w| < \varepsilon$; $\chi(z, w) < \tilde{\varepsilon}$

konstruktiv z_k konstruiert z. B.

nach $|\exp(z_k) - 0| < \varepsilon_k = \frac{1}{k}$

$\forall k : \{|\exp(z_k)|\}_{k=1}^{\infty} \xrightarrow{\mathbb{R}^1_{\mathbb{C}}} 0$

Beispiel Integrale und Residuum:

$f(z)$ habe eine isol. sing. Stelle in z_0, Annahme: z_0 - Polstelle von f der Ordng $\operatorname{ord}(f, z_0) = -m$, $m \in \mathbb{N}$

Bsp: $z_0 = 1$, $\tilde{f} = \frac{27}{(z-1)^m} \cdot \underbrace{\frac{3}{(z+14)}}_{\text{holomorph in } K(1,1)}$

$f = \frac{1}{(z - z_0)^m} \underbrace{g(z)}_{\text{holom. in } \mathcal{U}(z_0)}$

$? \int_\gamma f(z)\, dz$

$$g(z) = \mathcal{P}(z, z_0) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$$

$$a_j = \frac{1}{j!} g^{(j)}(z_0)$$

Potenzreihe einsetzen in Darstellung von f:

$$\int_\gamma \Big(f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^{j-m} \Big) \, dz =$$

Cauchyscher Integralsatz

$$\int_{S(z_0, r)} f(z) \, dz$$

Erinnerung: $$\int_{S(z_0, r)} (z - z_0)^k \, dz = \begin{cases} 0 & \text{sonst} \\ & \text{bei} \\ 2\pi i & k = -1 \end{cases}$$

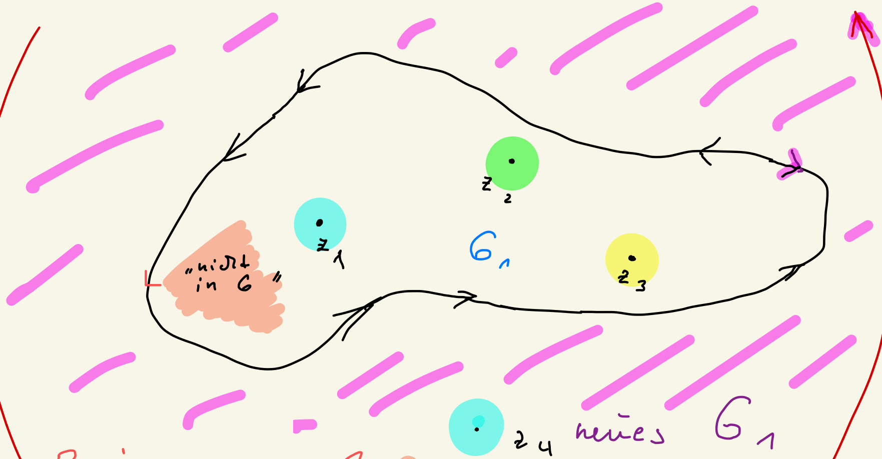
$k \in \mathbb{Z}$

Nutzen nun Vertauschbark. von Summation und Integration:

$$\int_\gamma f(z) dz = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \int_{S(z_0, r)} (z - z_0)^{j-m} \, dz = a_{m-1} 2\pi i$$

$$-1 = j - m \iff j = m - 1$$

$$g(z) = (z - z_0)^m \cdot f(z), \quad a_{m-1} = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0)$$



Hier $\bar{K}(z_2, r_2)$

für $\tilde{z_p} = \infty$ $\in G$

Gebiet zur Linken

Bei $\infty \in G$

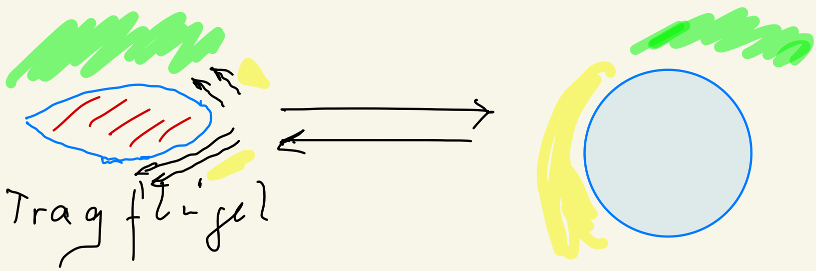
z. B. siehe oben,

„altes G_1" liegt außerhalb von neu G_1!

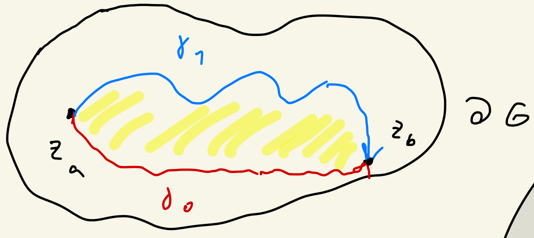
$$\frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{z^4}\left(\frac{1+\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^4}}{1+\frac{1}{z^4}}\right)$$

$$= \frac{1}{z^4}\left(1-\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{z^4}}\right)\right)$$

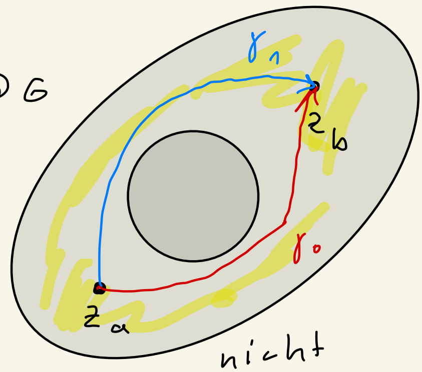
u. s. w. ...



Tragflügel



Einfach zusammen-hängend



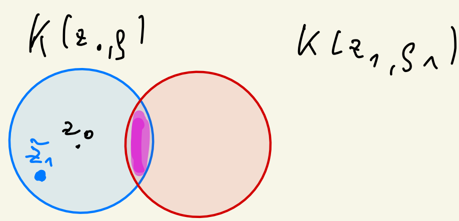
nicht einfach zusammen-hängend.

Außengebiet von $K(z_0, r)$ einf. zusammenhängend ???

Vorgeg. PR

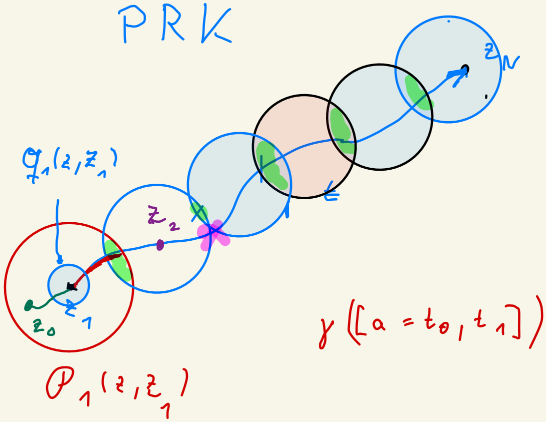
$$P(z, z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

$$\approx P_1(z, \tilde{z}_1) = \sum_{\tilde{k}=0}^{\infty} \tilde{a}_k (z - \tilde{z}_1)^k$$



In beiden Kreisen PR vorgegeben

PRK



Stammfkt.

$$P(z, z_0) = F(z)$$

$$= \sum^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

$$(k=0)\ k=1$$

$$\overset{2}{\doteq}\ 0 = F(z_0)$$

$$= a_0 = 0$$

$$F(z_1) = \underline{b_0} \; ; \; F(z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l (z - z_1)^l$$

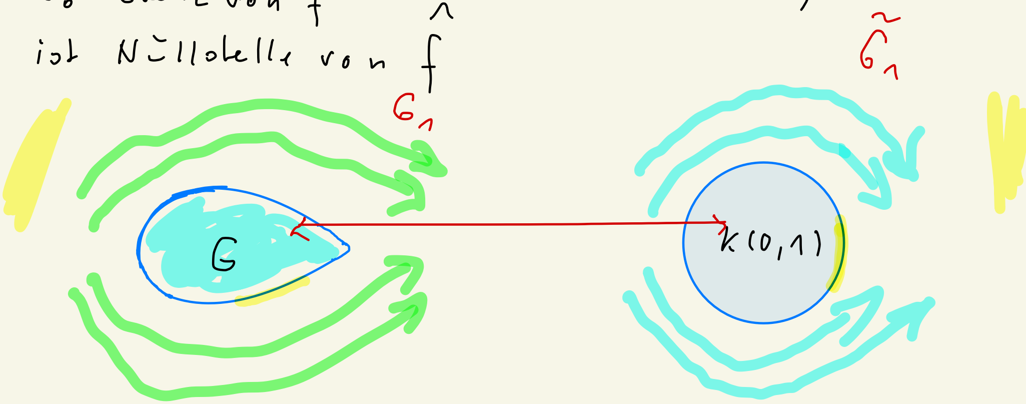
$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z_1 - z_0)^k = \underline{b_0}$$

Nullstellensatz

$\operatorname{ord}(\hat{f}, z_0) = k_0$

$\hat{f} = f - w_0$ (einfach Konst. w_0 subtrahiert)

w_0-Stelle von f ist Nullstelle von $\hat{f}$



g_{z_0} injektiv, denn bei $z = z'$

$$g_{z_0}(z) = g_{z_0}(z') \Rightarrow z - z_0 = z' - z_0$$

Sonst: (bei $g_{z_0}(G) \cap (-g_{z_0}(G)) \neq \emptyset$)

gibt es $w \in g_{z_0}(G) \cap (-g_{z_0}(G))$

$$\Longrightarrow \quad g_{z_0}^2(z) = (-1)^2 g_{z_0}^2(z')$$

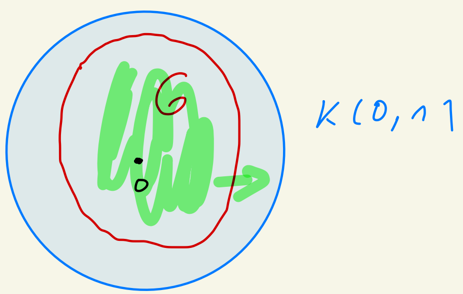
wegen $w = g_{z_0}(z) = -g_{z_0}(z')$

$$\Longrightarrow \quad z = z' \; ; \quad g_{z_0}(z) = -g_{z_0}(z)$$

$$\Longrightarrow \quad g_{z_0}(z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z - z_0 = 0$$

↯ weil $z_0 \notin G$.

$|w - w_0| > r \quad ; \quad |g_{z_0}(0) - w_0| > r$



$-h$

zweite Mögl.

Nach Thm. 1.1 bleibt bei fixen $G, z_0, \mathfrak{h}, \mathfrak{h}^2$ als Invariante nur „Vorzeichen ± 1 von h".

Ganze Fktn, meromorphe Fktn.

vgl. Def. 9.5 und Def. 9.7

Merom. Fkt. Darstellung:

$$\Big(D(F) = \mathbb{C} \setminus \underbrace{\mathcal{P}(F)} \Big)$$

$\mathcal{P}(F)$ - Menge der Polstellen von F.

G, G_1, G_2 - ganze Fktn.

$$F(z) = G(z) + \frac{G_1(z)}{G_2(z)}$$

Schicke Idee. (Partialbruch-Darstellg.)

Gamma-Fkt.

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \in \mathbb{C}$$

$n^z = \exp(z \ln n)$

$D(\Gamma) = \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$

Norm. Bed.

Fktl.-Gl. $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$

$\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(n+1) = n!$

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} : \quad \Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, mit Binetscher Fkt.

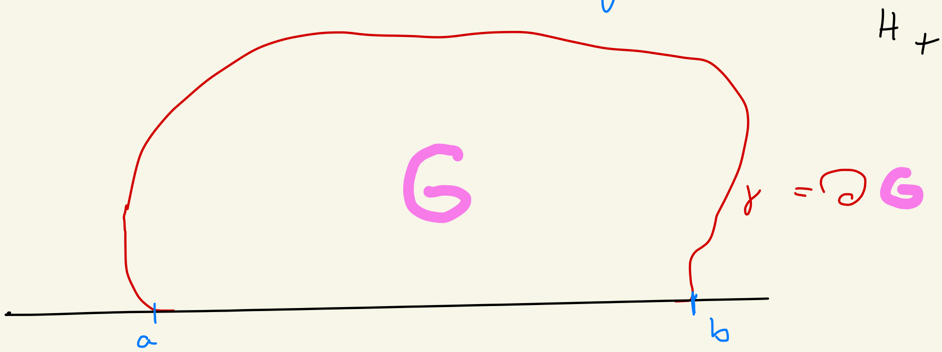
und

Euler: $\tilde{\Gamma}(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \, dt$

$(\forall t > 0)$, $D(\tilde{\Gamma}) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$

als Fortsetzungsidee auf ganz $D(\Gamma)$

Kleiner Schwarzscher Spiegelsatz:



$G \subset H_+$, $[a,b] \subset \partial G$,

$\forall z \in (a,b) \ \exists K(z,r) : K(z,r) \cap H_+ \subset G$

dann ex. Fortsetzg. hol. Fkt. f auf

$G^s \cup G \cup (a,b)$, $G^s = \{z : \bar{z} \in G\}$

„Spiegel-Gebiet"

$$\tilde{f} = u + iv = \begin{cases} f(z) & \forall z \in G \cup (a,b) \\ \bar{f}(\bar{z}) & \forall z \in G^s \end{cases}$$

speziell: $f = u(x,y) + i\,v(x,y)$

und $\bar{f}(\bar{z}) = u(x,-y) - i\,v(x,-y)$

Möbiustrf. $[a,b]$ auf

Stück von verallgem. Kreis abb.