(1.) Setze $f(z) = (z-z_0)\big(f'(z_0) + \overset{\text{Reihenrest}}{\widetilde{g(z)}}\big)$

$$= (z-z_0)\, f_1(z)$$

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{c\, f_1(z) + q(z)(z-z_0)}{(z-z_0)\, f_1(z)} = \quad c = \frac{1}{f'(z_0)}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{f'(z_0)} g(z) - \frac{1}{f'(z_0)} g(z)}{f(z)}$$

Setze

$g(z) = (z-z_0)\, g_1(z)$

$$\Rightarrow q(z) = \frac{-1}{f'(z_0)} g_1(z)$$

$$\int_{S(z_0,r)} \frac{1}{f(z)}\, dz = \frac{1}{f'(z_0)} \cdot \int_{S(z_0,r)} \frac{1}{(z-z_0)}\, dz = \frac{2\pi i}{f'(z_0)}$$

2.) Partialbruchzerl. bzw. Aufg. 1

$$\frac{1}{z^3+1} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(z+1)} + \frac{1}{3}\,\frac{2-z}{(z^2-z+1)}$$

3a) Partialbruchzerl.

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-1)^3} = -\frac{1}{8}\,\frac{1}{(z+1)} + \frac{1}{8(z-1)} + \frac{1}{2(z-1)^3} - \frac{1}{4(z-1)^2}$$

$$\int_{S(-1,1)} f(z)\, dz = -\frac{1}{8}\int_{S(-1,1)} \frac{1}{(z+1)}\, dz = -\frac{i\pi}{4}$$

Bzw. mit (1) und $\tilde{f} = (z+1)(z-1)^3$

bei $\tilde{f}'(-1) = -8$

3b) 1. Möglichkeit: Residuensatz:

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\sin(z)}{z+i}\right](-i) = \lim_{z\to -i}\left(\frac{z+i}{z+i}\sin(z)\right)(-i) = \sin(-i)$$

$$\int_{S(0,2)} \frac{\sin z}{z+i}\, dz = \frac{1}{2i}\left(e^{1} - e^{-1}\right) \cdot 2\pi i$$

bzw. Additionstheorem und Potenzreihen

3c) $\displaystyle\oint_{S(-2i,3)} \frac{1}{z^2+\pi^2}\,dz = \oint_{S(-2i,3)} \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{-1}{(z+i\pi)} + \frac{1}{(z-i\pi)}\right) dz$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{S(-2i,3)} \frac{1}{(z+i\pi)}\,dz = -1$$

3d) $\displaystyle\oint_{S(0,\frac{1}{2})} \frac{\exp(1-z)}{z^3(1-z)}\,dz = 2\pi i \;\mathrm{Res}\,[g(z)]\,(z_0=0)$

$$\boxed{g(z)} = \frac{e^{1-z}}{z^3(1-z)} = e^1\,\frac{e^{-z}}{z^3(1-z)}$$

$$= \left(\lim_{z\to 0} \frac{1}{2!}\,\frac{d^2}{dz^2}\,\frac{z^3\, e^{1-z}}{z^3(1-z)}\right)\cdot 2\pi i$$

$$= \frac{1}{2!}\left[e^1\left[\frac{e^{-z}}{1-z} - \frac{2e^{-z}}{(1-z)^2} + \frac{2e^{-z}}{(1-z)^3}\right]\right]_{z=0} \cdot 2\pi i$$

$$= \frac{1}{2}\,(1-2+2)\cdot e^1\cdot 2\pi i = \pi i\, e^1$$

oder e^{-z} als Potenzreihe und Partialbruchdarstellung