1 Einführung

Die Funktionentheorie untersucht die Eigenschaften komplexwertige Funktionen komplexer Variablen (KFKV), d.h. von Funktionen $f : D(f) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, bzw. $f : D(f) \subset \mathbb{C}_o \to \mathbb{C}$.
Hier bezeichnet $\mathbb{C}$ den Körper der komplexen Zahlen und $\mathbb{C}_o$ die kompaktifizierte komplexe Zahlenebene.
Die Anwendungen der Funktionentheorie reichen dabei von partiellen Differentialgleichungen (der Untersuchung harmonische Funktionen und exemplarisch der Regularitätstheorie elliptischer Gleichungen), der Funktionalanalysis (Abbildungsgrad und Spektraldarstellung von linearen Operatoren) bis in die Strömungsmechanik (z.B. Potentialströmungen).
In unserer Vorlesung werden wir im Sinne der Strömungsmechanik konforme Abbildungen und den Riemannscher Abbildungssatz behandeln.

2 Die Riemannsche Zahlenkugel und $\mathbb{C}_o$ als kompaktifizierte Gaußsche Zahlenebene

2.1 Der Topologische Raum

Es sei $X \neq \emptyset$ eine vorgegebene Grundmenge, $\mathfrak{P}(X)$ bezeichne die Potenzmenge von X, wobei immer $\emptyset \in \mathfrak{P}(X)$ gelte!

DEFINITION 2.1 (Topologischer Raum)**.** *$X \neq \emptyset$ sei eine nichtleere Grundmenge und $\mathfrak{P}(X)$ die Potenzmenge von X.*
Es sei τ ein nichtleeres Mengensystem, $\tau \subseteq \mathfrak{P}(X)$, mit den folgenden Eigenschaften:

(τi) $\emptyset, X \in \tau$

(τii) für alle $\{\mathscr{O}_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \tau$ *, bei beliebiger Indexmenge I gilt:* $\bigcup_{\alpha \in I} \mathscr{O}_\alpha \in \tau$

(τiii) für alle $\{\mathscr{O}_j\}_{j=1}^N \subseteq \tau$ *gilt:* $\bigcap_{j=1}^N \mathscr{O}_j \in \tau$

Wir nennen τ mit (τi)-(τiii) eine <u>Topologie</u> auf X und das geordnete Paar (X, τ) einen <u>topologischen Raum</u>.
Einen topologischen Raum (X, τ) für den zusätzlich das Hausdorffsche Trennungsaxiom :

(τiv) $\forall x, y \in X; x \neq y$ *gilt:* $\exists \mathscr{O}_x, \mathscr{O}_y \in \tau : x \in \mathscr{O}_x \;\; y \in \mathscr{O}_y$ *und* $\mathscr{O}_x \cap \mathscr{O}_y = \emptyset$

gilt, nennt man einen <u>Hausdorffschen topologischen Raum</u>.

ANMERKUNG 2.1 (Topologische Räume)**.** *Alle bekannten Standardräume der Analysis, d.h. metrische - , quasinormierte - , normierte - und unitäre Räume sind topologische Räume. Dies gilt natürlich auch für die vollständigen Räume, d.h. vollständige metrische, Frechet-, Banach- und Hilbert-Räume.*

BEMERKUNG 2.2. *Nach oben sind $\emptyset$ und X offensichtlich immer offen und abgeschlossen in (X,τ). Solche Mengen nennt man offen-abgeschlossene Mengen.*

DEFINITION 2.2 (Zusammenhang)**.** *Ist X die einzige nichtleere offen-abgeschlossene Menge in (X,τ), so nennt man den topologischen Raum (X,τ) zusammenhängend.*

ANMERKUNG 2.3 (Zusammenhang)**.** *Der Zusammenhang einer Menge (vergleiche später auch wegzusammenhängende Gebiete) ist damit immer abhängig von der Topologie!*

BEMERKUNG 2.4 (Unterraum-Topologie)**.** *Es sei $Q \subset X$ mit $Q \neq \emptyset$ und (X,τ) ein topologischer Raum. Dann wird durch*

$$\tau_Q := \{\mathscr{O} \cap Q : \mathscr{O} \in \tau\}$$

eine Topologie auf Q erklärt.

DEFINITION 2.3 (induzierte Topologie)**.** *τ_Q nennt man die von (X,τ) (oder τ) auf Q induzierte Topologie.*

BEMERKUNG 2.5 (topologischer Unterraum)**.** *Im Sinne von $(Q,\tau_Q) \subset (X,\tau)$ nennt man (Q,τ_Q) einen topologischen Unterraum von (X,τ) und τ_Q eine Unterraum-Topologie.*

Beispiel 2.1. $\mathbb{E}^2 = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ *ist ein normierter Raum (sogar Banach-Raum), bei*

$$\forall \underline{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad \|\underline{x}\| := \sqrt{\sum_{j=1}^{2} x_j^2} \quad .$$

Trick: Norm definiert Metrik und Metrik definiert Topologie.

Metrik:	$\rho(\underline{x},\underline{y}) := \|\underline{x}-\underline{y}\| \quad \forall \underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^2$
Topologie:	$U_\varepsilon(\underline{x}) := \{\underline{y} \in \mathbb{R}^2 : \|\underline{x}-\underline{y}\| < \varepsilon\} \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^2, \varepsilon \in (0,\infty)$
Werkzeug:	$\beta := \{U_\varepsilon(\underline{x}) : \underline{x} \in \mathbb{R}^2, \varepsilon \in (0,\infty)\}$
	'Umgebungsbasis'

Anwendung von $(\tau ii) - (\tau iii)$ auf β liefert τ.

DEFINITION 2.4. *Sei $a \in X$ und $U \in \mathfrak{P}(X)$, (X,τ) topologischer Raum. U heißt Umgebung von a in (X,τ), $U = U(a)$, wenn $\exists \mathscr{O} \in \tau$, so dass*

$$a \in \mathscr{O} \subset U.$$

Ist $U \in \tau$, so nennt man U offene Umgebung von a (im topologischen Raum (X,τ)).

ANMERKUNG 2.6. *Ist $Q \in \mathfrak{P}(X)$, so schreibt man bei einem topologischen Raum (X,τ) auch $Q \subset (X,\tau)$.*

2.2 Stetige Abbildungen von topologischen Räumen, kompakte topologischen Räume und Mengen

DEFINITION 2.5 (stetige Abbildungen)**.** *Es seien (X,τ) und $(\tilde{X},\tilde{\tau})$ top. Räume und $f:\ X\to\tilde{X}$. f heißt in $a_o\in X$ stetig, wenn zu jeder Umgebung $\tilde{U}(f(a_o))$ eine Umgebung $U(a_o)$ existiert, sodass $f(U)\subset\tilde{U}(f(a_o))$ gilt.*
Ist f $\forall a\in X$ stetig, so nennen wir f stetig auf X.

BEMERKUNG 2.7. *Die Definition gilt bei $D(f)\neq X$ ganz analog im Sinne von $(D(f),\tau_{D(f)})$.*

Nun sei $f:\ X\to\tilde{X}$ bijektiv.

DEFINITION 2.6 (Homöomorphismus)**.** *Es sei f stetig auf X und*
$f:(X,\tau)\to(\tilde{X},\tilde{\tau})$ mit f^{-1} stetig auf $\tilde{X}$, $f^{-1}:(\tilde{X},\tilde{\tau})\to(X,\tau)$.
Dann nennen wir f einen Homöomorphismus von (X,τ) und $(\tilde{X},\tilde{\tau})$ (oder topologische Abbildung von (X,τ) und $(\tilde{X},\tilde{\tau})$).

ANMERKUNG 2.8. *Bei homöomorphen Abbildungen (Funktionen) gilt z.B.*

$$\forall\,\mathscr{O}\in\tau:\ f(\mathscr{O})\in\tilde{\tau}$$

(offene Mengen werden auf offene Mengen abgebildet).

DEFINITION 2.7 (kompakter topologischer Raum)**.** *(X,τ) sei ein topologischer Raum. Falls*

$$\forall\,\{\mathscr{O}_\alpha\}_{\alpha\in I}\subset\tau\ \text{mit}\ X\subset\bigcup_{\alpha\in I}\mathscr{O}_\alpha$$

ein endliches Teilsystem $\{\mathscr{O}_{\alpha_j}\}_{j=1}^N\subset\{\mathscr{O}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ existiert ($\{\mathscr{O}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ nennt man eine offene Überdeckung von X) , so dass

$$X\subset\bigcup_{j=1}^N\mathscr{O}_{\alpha_j}\quad\text{gilt,}$$

so nennt man (X,τ) einen (überdeckungs-) kompakten topologischen Raum.

DEFINITION 2.8 (kompakte Mengen in (X,τ))**.** *Sei $Q\subset(X,\tau)$ abgeschlossen. Wir nennen Q (überdeckungs-) kompakt in (X,τ), falls (Q,τ_Q) ein kompakter topologischer Raum ist.*

BEMERKUNG 2.9. *Äquivalent zu voriger Definition kann man die Kompaktheit von Q in (X,τ) erklären durch:*
Q ist kompakt, wenn

$$\forall\,\{\mathscr{O}_\alpha\}_{\alpha\in I}\subset\tau:\quad Q\subset\bigcup_{\alpha\in I}\mathscr{O}_\alpha$$

eine endliche Überdeckung von Q existiert, d.h.

$$\{\mathscr{O}_{\alpha_j}\}_{j=1}^N\subset\{\mathscr{O}_\alpha\}_{\alpha\in I}:\quad Q\subset\bigcup_{j=1}^N\mathscr{O}_{\alpha_j}.$$

(Das kennen wir schon als den Heine-Borelschen Überdeckungssatz.)

BEMERKUNG 2.10 (Einpunktkompaktifizierung)**.** *Hat der Raum (X,τ) die Eigenschaft, dass jeder Punkt $a \in X$ eine kompakte Umgebung $U(a)$ besitzt, so nennt man (X,τ) lokalkompakt. Solche Räume gestatten eine „Einpunktkompaktifizierung". Durch die Einpunktkompaktifizierung erzeugen wir einen neuen kompakten topologischer Raum. Bei $X = \mathbb{C}$ versehen mit der Euklidischen Topologie τ (vgl. Bemerkung 2.12) werden wir für unsere Zwecke den kompakten topologischer Raum $(\mathbb{C}_o, \tau_o)$ erhalten.*

Es sei nun $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

DEFINITION 2.9. *Eine Teilmenge $K \subset V$ nennen wir folgenkompakt, falls jede Folge $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset K$ eine in K konvergente Teilfolge besitzt, d.h.*

$$\exists \{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \textit{ mit } \lim_{j\to\infty} x_{k_j} = x \in K.$$

BEMERKUNG 2.11. *In $(V, \|\cdot\|)$ sind die Aussagen*

(i) K ist folgenkompakt und

(ii) K ist überdeckungskompakt

äquivalent.

BEMERKUNG 2.12 (induzierte Topologie)**.** *Ist* $\dim V = N < \infty$*, so ist K genau dann kompakt, wenn K abgeschlossen und beschränkt ist.*
Betrachten wir $(V, \|\cdot\|)$ im Sinne von $(V, \tau_{\|\cdot\|})$ bei $\dim V = N < \infty$*, so ist $(V, \tau_{\|\cdot\|})$ ein lokalkompakter topologischer Raum.*
$\tau_{\|\cdot\|}$ ist hier die mittels der Norm $\|\cdot\|$, ganz analog zum Beispiel 2.1, induzierte Topologie.

2.3 Die Gaußsche Zahlenebene, chordale Entfernung (chordale Metrik), stereographische Projektion

NOTATION 2.10. *Die Einheitssphäre im $\mathbb{E}^3$ bezeichnen wir mit S^2 bzw. ω_3, d.h.*

$$\omega_3 = S^2 := \left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \|\underline{x}\| := \sqrt{\sum_{j=1}^{3} x_j^2} = 1 \right\}$$

NOTATION 2.11 (Gaußsche Zahlenebene)**.** $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ *- seien die Körper der komplexen, bzw. reellen Zahlen. Die Abbildung*

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \begin{bmatrix} \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ist bijektiv (als reeller ***Isomorphismus von*** $\mathbb{C}$ ***und*** $\mathbb{R}^2$*). Speziell können wir hier setzen:*

$$z = x + iy \;\in \mathbb{C} \quad \textit{(Hier bezeichnet } i = \sqrt{-1} \textit{ die imaginäre Einheit)}$$

Den im obigen Sinne mit $\mathbb{C}$ identifizierten $\mathbb{R}^2$ bezeichnet man als die „Gaußsche Zahlenebene".

BEMERKUNG 2.13. *Beachtet man, dass* $\forall z \in \mathbb{C}$

$$|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = z \cdot \bar{z}$$

gilt, so erhält man auch

$$\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \|_{\mathbb{E}^2}^2 = x^2 + y^2,$$

womit $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ *und* $\mathbb{E}^2 = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\mathbb{E}^2})$ *isometrisch und isomorph sind.*
In diesem Sinne wird die Gaußsche Zahlenebene normiert (topologisiert).

DEFINITION 2.12 (Kompaktifizierte Zahlenebene)**.** *Es sei* $(\mathbb{C}, \tau_{|\cdot|})$ *der oben erklärte topologische Raum (wir schreiben abkürzend* $\tau = \tau_{|\cdot|}$*). Wir erklären* $\mathbb{C}_o = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *und* τ_o *als Topologie auf* $\mathbb{C}_o$ *durch*

$$\tau_o = \tau \cup \{A \subset \mathbb{C}_o \mid \mathbb{C}_o \setminus A =: K,\ K \text{ kompakt in } (\mathbb{C}, \tau)\}$$

$(\mathbb{C}_o, \tau_o)$ *nennt man die kompaktifizierte Gaußsche Ebene oder Riemannsche Zahlenkugel.*

BEMERKUNG 2.14. *Aus Definition 2.12 kann man sofort ablesen: Ein* $U \in \tau_o$ *ist genau dann eine Umgebung von* ∞ *:* $U = U(\infty)$*, wenn* U *das „Äußere eines Kreises“ in* $\mathbb{C}$ *enthält.*

SATZ 2.15. $(\mathbb{C}_o, \tau_o)$ *ist ein kompakter topologischer Raum.*

Beweis. Sei $\{\mathscr{O}_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \tau_o$ eine Überdeckung von $\mathbb{C}_o$. Dann existiert ein $\mathscr{O} =: \mathscr{O}_{\tilde{\alpha}},\ \tilde{\alpha} \in I$ fix, mit $\infty \in \mathscr{O}$. Wir setzen $\{\mathscr{O}^o_\alpha\}_{\alpha \in I} := \{(\mathscr{O}_\alpha \setminus \mathscr{O})\}_{\alpha \in I}$ (leere Mengen immer zugelassen).
Beachte: (vgl. Def. 2.12) $\mathbb{C}_o \setminus \mathscr{O} = K \subset \mathbb{C}$, K kompakt in $(\mathbb{C}, \tau)$.
Damit existiert eine Überdeckung

$$\{\mathscr{O}^o_{\alpha_j}\}_{j=1}^N \subset \{\mathscr{O}^o_\alpha\}_{\alpha \in I} \text{ mit } K \subset \{\mathscr{O}^o_{\alpha_j}\}_{j=1}^N.$$

Es gilt $\mathscr{O} \cup \{\mathscr{O}^o_{\alpha_j}\}_{j=1}^N = \mathscr{O} \cup \{\mathscr{O}_{\alpha_j}\}_{j=1}^N \supset \mathbb{C}_o$. □

ANMERKUNG 2.16. *Der Beweis kann auch über Homöomorphismen (stereographische Projektion) geführt werden.*

Wir Bezeichnen nun die Punkte von $\omega_3 = S^2$:

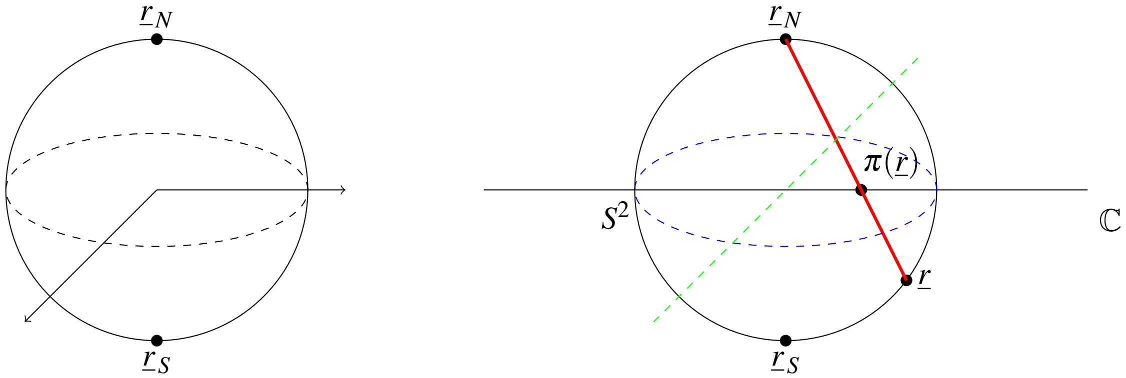
$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ mit } \underline{r} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \in \omega_3 = S^2$$

NOTATION 2.13 (Nordpol, Südpol)**.** *Die Punkte* $\underline{r} = \underline{r}_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *und* $\underline{r}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ *nennen wir Nordpol, beziehungsweise Südpol von* $S^2 = \omega_3$.

DEFINITION 2.14. *Die Abbildung* $\pi:\ S^2 \to \mathbb{C}_o$ *mit*

$$\pi(\underline{r}) := \begin{cases} \infty & \text{für } \underline{r} = \underline{r}_N \\ \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta} & \text{für } \underline{r} \neq \underline{r}_N \end{cases}$$

nennen wir die stereographische Projektion.



BEMERKUNG 2.17. $\pi^{-1}:\ \mathbb{C}_o \to S^2$ *wird erklärt durch*

$$\pi^{-1}(z) = \begin{cases} \underline{r}_N & \text{bei } z = \infty \\ \underline{r} = \frac{1}{1+|z|^2} \begin{bmatrix} z + \bar{z} \\ i \cdot (\bar{z} - z) \\ |z|^2 - 1 \end{bmatrix} & \text{bei } z \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Insbesondere ist $\pi(\underline{r}_S) = 0$ *und entsprechend* $\pi^{-1}(0) = \underline{r}_S$.

BEMERKUNG 2.18. *Wir erklären eine Topologie auf* S^2 *durch* $\tilde{\tau}_{S^2} = \tau_{\|\cdot\|_{\mathbb{E}^3}} \cap S^2$.
Dann definiert π *(beziehungsweise* π^{-1}*) einen Homöomorphismus von* $(\mathbb{C}_o, \tau_o)$ *und* $(S^2, \tilde{\tau}_{S^2})$.
Die direkte Variante hiervon ist die „Metrisierung“ von $\mathbb{C}_o$ *mittels der chordalen Entfernung:*

DEFINITION 2.15 (chordale Metrik)**.** $\forall z, z_1 \in \mathbb{C}_o$ *sei*

$$\chi(z, z_1) := \|\pi^{-1}(z) - \pi^{-1}(z_1)\|_{\mathbb{E}^3}.$$

BEMERKUNG 2.19. τ_o *kann man als die von* χ *auf* $\mathbb{C}_o$ *induzierte Metrik auffassen.* $\tau_o = \tau_{\chi(\cdot,\cdot)}$.

BEMERKUNG 2.20. *Die chordale Metrik kann man auch explizit aufschreiben. Speziell erhält man (durch Nachrechnen)*

$$\chi(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{((1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2))^{\frac{1}{2}}} \quad \text{bei } z_1, z_2 \in \mathbb{C} \text{ und}$$

$$\chi(z_1, \infty) = \frac{2}{(1+|z_1|^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

NOTATION 2.16 (Abbildungen von $\mathbb{C}_o$ auf $\mathbb{C}_o$)**.**

$$T(z) := \begin{cases} \frac{1}{z} & \forall z \in \mathbb{C},\ z \neq 0 \\ \infty & bei\ z = 0 \\ 0 & bei\ z = \infty \end{cases} \qquad T^*(z) := \begin{cases} \frac{1}{\bar{z}} & \forall z \in \mathbb{C},\ z \neq 0 \\ \infty & bei\ z = 0 \\ 0 & bei\ z = \infty \end{cases}$$

$T, T^* :\ \mathbb{C}_o \to \mathbb{C}_o$. T^* nennt man auch Spiegelung an „Reziproken Radien“, T nennt man „Inversion“.

BEMERKUNG 2.21. *T und T^* sind Homöomorphismen von $(\mathbb{C}_o, \tau_o)$ („ und “ $(\mathbb{C}_o, \tau_o)$).*

Beweis. π, π^{-1} sind Homöomorphismen mit

$$\pi :\ S^2 \to \mathbb{C}_o \text{ und } \pi^{-1} :\ \mathbb{C}_o \to S^2$$

(sofort mit chordaler Entfernung, zunächst im Sinne von $\varepsilon > \chi(\pi(\underline{s}_1), \pi(\underline{s}_2)) = \|\underline{s}_1 - \underline{s}_2\|_{\mathbb{E}^3(S^2)}$, analog für π^{-1})

$$\text{Setzen } \underline{\mathfrak{J}}(\underline{s}) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{s} \quad \text{und} \quad \underline{\tilde{\mathfrak{J}}}(\underline{s}) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{s} \quad \forall \underline{s} \in S^2 \subset \mathbb{E}^3$$

$\underline{\mathfrak{J}}, \underline{\tilde{\mathfrak{J}}} :\ (S^2, \|\cdot\|_{\mathbb{E}^3}) \to (S^2, \|\cdot\|_{\mathbb{E}^3})$.

Wir beachten auch: $\underline{\mathfrak{J}}(\underline{\mathfrak{J}}(\underline{r})) = \underline{\tilde{\mathfrak{J}}}(\underline{\tilde{\mathfrak{J}}}(\underline{r})) = \underline{r} \quad \forall \underline{r} \in S^2$.
Schließlich erhalten wir:

$$T = \pi \circ \underline{\mathfrak{J}} \circ \pi^{-1} \quad \text{und} \quad T^* = \pi \circ \underline{\tilde{\mathfrak{J}}} \circ \pi^{-1}.$$

□

BEMERKUNG 2.22. *T und T^* bilden $\mathbb{C}_o$ (in χ) isometrisch auf sich ab und*

$$\chi(z_1, z_2) = \chi(Tz_1, Tz_2) = \chi(T^*z_1, T^*z_2)$$

Beweis. Sofort durch einfaches Nachrechnen. □

NOTATION 2.17. *Ist $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset (\mathbb{C}_o, \tau_o) = (\mathbb{C}_o, \chi)$ eine Folge in $\mathbb{C}_o$, dann ist $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ in $(\mathbb{C}_o, \tau_o)$ konvergent gegen $a_o \in \mathbb{C}_o$, Schreibweise $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \to a_o$, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_o = k_o(\varepsilon) :\ \forall k \geq k_o(\varepsilon) : \chi(a_k, a_o) < \varepsilon \text{ gilt.}$$

NOTATION 2.18 (Verallgemeinerte Kreise)**.** *Setzen wir*

$$K(a,r) = U_r(a) := \{z \in \mathbb{C} :\ |z - a| < r\} \text{ für } a \in \mathbb{C} \text{ und } 0 < r < \infty,$$
$$\overline{K}(a,r) := \{z \in \mathbb{C} :\ |z - a| \leq r\} = K(a,r) \cup S(a,r) \text{ und}$$
$$S(a,r) := \partial K(a,r) := \{z \in \mathbb{C} :\ |z - a| = r\},$$

dann nennen wir die $S(a,r)$ „Kreisperipherien“ und

$$\{z \in \mathbb{C} :\ A(z + \bar{z}) + iB(\bar{z} - z) + E = 0\} \cup \{\infty\} := G(A,B,E)$$

(Geraden in $\mathbb{C}$ vereinigt mit $\{\infty\}$) verallgemeinerte Kreise in $\mathbb{C}_o$. Hier sind $A, B, E \in \mathbb{C}$.

ANMERKUNG 2.23. *In Notation 2.18 kann man bei $a \in \mathbb{C}$ und $0 < r < \infty$ die Kreise $S(a,r)$ (die Kreisperipherien) in der Gestalt*

$$\begin{aligned} z \in S(a,r) &\Leftrightarrow (z-a)\overline{(z-a)} - r^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow A(z+\bar{z}) + iB(\bar{z}-z) + C(z\bar{z}-1) + D(z\bar{z}+1) = 0 \end{aligned}$$

darstellen (allgemeine Darstellung verallgemeinerter Kreise), hierbei sind

$$a = -\frac{A+iB}{C+D} \quad \text{und} \quad r^2 = \frac{A^2+B^2+C^2-D^2}{(C+D)^2},$$

also A,B,C und D bis auf einen eindeutigen Faktor bestimmt.
Dies erklärt insbesondere bei $C+D=0$ und $E=D-C$, dass man die „Geraden“ $G(A,B,E)$ auch verallgemeinerte Kreise nennt.

BEMERKUNG 2.24. *Durch einfaches Nachrechnen kann man zeigen, dass T und T^* verallgemeinerte Kreise in $\mathbb{C}_o$ auf verallgemeinerte Kreise in $\mathbb{C}_o$ abbilden.*
Betrachtet man im $\mathbb{E}^3$ die Kreise

$$\gamma(A,B,C,D) := S^2 \cap \left\{ \underline{x} \in \mathbb{E}^3 : \underbrace{\underline{x}^T \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} + D = 0}_{\text{Ebene}} \right\} \quad \text{bei} \quad \frac{|D|}{\left\| \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \right\|_{\mathbb{E}^3}} < 1$$

(Abstand der Ebene vom Nullpunkt $\underline{0} \in \mathbb{E}^3$), so werden die $\pi(\gamma(A,B,C,D))$ gerade die verallgemeinerten Kreise in $\mathbb{C}_o$.
Bei $\underline{r}_N \in \gamma(A,B,C,D)$ ist $\pi(\gamma(\ ))$ eine „Gerade“ in $\mathbb{C}_o$

3 Komplexwertige Funktionen komplexer Variablen

3.1 Auffassung und Definition

<u>Ideen</u>: (a) komplexwertige Funktionen

Es seien $G \subset \mathbb{E}^m$, $m \in \mathbb{N}$ und $f : G \to W(f) \subset (\mathbb{C}, |\cdot|) = \mathbb{E}^1_{\mathbb{C}}$.

Entsprechend der Ideen aus 2.3 kann man $\forall \underline{x} \in G : \quad f(\underline{x}) = u(\underline{x}) + i \cdot v(\underline{x})$

schreiben (hier sind wieder $u(\underline{x}) = \operatorname{Re} f(\underline{x})$ und $v(\underline{x}) = \operatorname{Im} f(\underline{x})$).

Die partiellen Ableitungen können wir hier (bei Existenz) als

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, m$$

schreiben. Spezifizieren wir $m = 2$, also $G \subset \mathbb{E}^2$ und betrachten die Funktionen

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}(\underline{x}), \quad \text{also} \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} : G \to \mathbb{E}^2,$$

dann haben wir für differenzierbare Funktionen die Jacobimatrix

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x_1,x_2)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial\underline{x}} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

zur Verfügung.

(b) Identifikation

Wie muss $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ aussehen, wenn wir die Identifikation: $z = x+iy$ und $f = u+iv$ zu Grunde legen und wissen wollen, wie $f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial z}$ sinnvoll erklärt werden kann?
1. Antwort mit Idee $i^2 = -1$: lokal: $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \underline{\underline{Z}}$.

Definition 3.1. *Eine Funktion $f: \ D(f) \subset \mathbb{C}_o \to \mathbb{C}$ nennen wir komplexwertige Funktion einer komplexen Variablen. Abkürzung: f - KFKV.*

Wir betrachten die Stetigkeit von f in $z_o \in D(f)$ (beziehungsweise $z_o \in \mathring{D}(f)$: Hier bezeichnet $\mathring{D}(f)$ die Menge aller „inneren Punkte“) von $D(f) \subset (\mathbb{C}_o, \tau_o)$).

Bemerkung 3.1. *$f: \ (D(f), \tau_0\big|_{D(f)}) \to (W(f), \tau_{\|\cdot\|}\big|_{W(f)})$ ist in $z_o \in D(f)$ stetig, wenn f im Sinne von Definition 2.5 stetig ist. In diesem Sinne ist auch Stetigkeit von f auf $D(f)$ erklärt. (Lokalisation) Sei f KFKV und $z_o \in \mathring{D}(f) \cap \mathbb{C}$. f ist stetig in z_o, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon, z_o) : |f(z_o+h) - f(z_o)| < \varepsilon \quad \forall h: \ 0 < |h| < \delta \textit{ mit } z_o + h \in D(f) \cap \mathbb{C}.$$

Lemma 3.2. *Sei f KFKV mit $\infty \in D(f)$. f ist genau dann stetig in $z_o = \infty$, wenn $f \circ T$ stetig in $w = 0$ ist.*

Beweis. (i) f ist in $z_o = \infty$ stetig mit $f(\infty) = f(T(0))$, das heißt $f \circ T$ ist in $w = 0$ stetig, weil T ein Homöomorphismus ist (Verkettung stetiger Abbildungen).

(ii) $f \circ T$ sei stetig in $w = 0$. Dann gilt: $(f \circ T \circ T^{-1}) = f$, hier ist $(f \circ T)$ stetig in $w = 0$ und T^{-1} ist stetig in ∞ (als Homöomorphismus). Damit ist alles gezeigt.

□

Definition 3.2 (komplexe Differenzierbarkeit)**.** *Sei f KFKV und $z_o \in D(f) \cap \mathbb{C}$, $z_o \in \mathring{D}(f)$. Wir nennen f in z_o (im komplexen Sinne) differenzierbar mit der Ableitung $f'(z_o)$, wenn $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, so dass $\forall h \in \mathbb{C}: \ 0 < |h| < \delta$ bei $z_o + h \in U(z_o) \subset D(f)$ gilt:*

$$\left| \frac{1}{h}(f(z_o+h) - f(z_o)) - f'(z_o) \right| < \varepsilon.$$

f nennen wir in $z_o = \infty \in D(f)$ differenzierbar, wenn die Funktion $g := f \circ T$ in $w_o = 0$ differenzierbar ist. Hier setzten wir $f'(\infty) := 0$.
Wir nennen f differenzierbar auf $M \subset D(f)$, wenn f $\forall z_o \in M$ differenzierbar ist.

BEMERKUNG 3.3. *Wie bei reellen Funktionen folgt aus der Differenzierbarkeit von f in z_o die Stetigkeit von f in z_o.*
Für die Ableitung $f'(z_o)$ schreibt man auch $f'(z_o) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_o)$.

BEMERKUNG 3.4. *Ist $z_o \in \mathbb{C}$, so gilt standardmäßig:*

$$f \text{ ist stetig in } z_o \in D(f) \Leftrightarrow u, v \text{ sind stetig in } [x_o, y_o]^T.$$

Hier ist wieder $z_o = x_o + iy_o$ und $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

Beispiel 3.1. *(a)* $f(z) = c \in \mathbb{C},\ c = \text{const}\ \forall z \in \mathbb{C}_o \ \Rightarrow\ f'(z_o) = 0\ \forall z_o \in \mathbb{C}_o$,

(b) $f(z) = z,\ D(f) = \mathbb{C} \ \Rightarrow\ f'(z_o) = 1\ \forall z_o \in \mathbb{C}$,

aber

(c) $f(z) = \bar{z},\ D(f) = \mathbb{C}$, *d.h.* $z \overset{f}{\mapsto} \bar{z}$, *beziehungsweise* $x + iy \overset{f}{\mapsto} x - iy$, *also*

$$u(x,y) = x,\ v(x,y) = -y, \quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

ist im Sinne $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} :\ \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ *differenzierbar, aber $f(z)$ ist für kein $z_o \in \mathbb{C}$ im komplexen Sinne differenzierbar, denn bei $z_o \in \mathbb{C}$ und $h \in \mathbb{R},\ h \neq 0$ haben wir:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_o + h) - f(z_o)}{z_o + h - z_o} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1, \quad \textit{sowie}$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_o + ih) - f(z_o)}{z_o + ih - z_o} = \lim_{h\to 0} -\frac{ih}{ih} = -1.$$

(d) Mit dem gleichen Argument zeigen wir: $f(z) = \operatorname{Re} z$ und $g(z) = \operatorname{Im} z$ (beziehungsweise $g(z) = i \operatorname{Im} z$) sind für kein $z_o \in \mathbb{C}$ im komplexen Sinne differenzierbar.

$$f:\ \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \textit{ sowie } g:\ \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

DEFINITION 3.3 (Holomorphe Funktionen)**.** *Es sei $f:\ D(f) \to \mathbb{C}$ (KFKV).*
Wir nennen f in z_o holomorph, wenn $\exists U(z_o) \subset D(f)$, so dass $f\ \forall z \in U(z_o)$ (im komplexen Sinne) differenzierbar ist.
Die Menge $M := \{z_o \in D(f) : f \text{ ist in } z_o \text{ holomorph}\}$ nennt man die „Holomorphie-menge“ von f (man sagt auch, dass f holomorph auf der Menge $M \subset D(f)$ ist).

SATZ 3.5 (Komplexe Differenzierbarkeit)**.** *Es sei $f:\ D(f) \to \mathbb{C}$ KFKV.*
Dann sind die folgenden Aussagen bei $z_o = x_o + iy_o \in D(f) \cap \mathbb{C}$ äquivalent.

(i) f ist in z_o im komplexen Sinne differenzierbar und

(ii) $f \sim [u,v]^T$ *ist in* $[x_o,y_o]^T$ *total differenzierbar (im reellen Sinne) und es gelten für* u,v *die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:*

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial x}(x_o,y_o) & = \frac{\partial v}{\partial y}(x_o,y_o) \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_o,y_o) & = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_o,y_o) \end{array}\right\} (1)$$

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$ Weil f in z_o differenzierbar ist, haben wir:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, so dass $\forall z = z_o + h \in U(z_o) \subset D(f)$ mit $h = k + il$ und $0 < |h| < \delta$ gilt:

$$(\circ)\ f(z_o+h) - f(z_o) = hf'(z_o) + \mathfrak{R}(z_o,h) \ \text{ mit } \left|\frac{\mathfrak{R}(z_o,h)}{h}\right| < \varepsilon$$

(beziehungsweise anders geschrieben: $\mathfrak{R}(z_o,h) = \mathscr{o}(|h|)$). Wir setzen nun $f'(z_o) = a + ib$ und $\mathfrak{R}() = \mathfrak{R}_R() + i\mathfrak{R}_I()$ mit $a,b,k,l,\mathfrak{R}_R,\mathfrak{R}_I \in \mathbb{R}$ und schreiben $(\circ)$ in Real- und Imaginärteilen $z_o + h = (x_o + k) + i(y_o + l)$:

$$\begin{aligned} & u(x_o+k, y_o+l) - u(x_o,y_o) + i(v(x_o+k,y_o+l) - v(x_o,y_o)) \\ & = ak - bl + i(bk + al) + \mathfrak{R}_R() + i(\mathfrak{R}_I()) \end{aligned}$$

Weil nun $|\underline{h}| := \|[k,l]^T\|_{\mathbb{E}^2}$, gilt $\forall [k,l]^T \in \mathbb{E}^2 :\ 0 < \|[k,l]^T\|_{\mathbb{E}^2} < \delta$:

$$0 \le \left|\frac{\mathfrak{R}_I(z_o,h)}{|h|}\right|, \left|\frac{\mathfrak{R}_R(z_o,h)}{|h|}\right| \le \left|\frac{\mathfrak{R}(z_o,h)}{|h|}\right| < \varepsilon \quad (\#)$$

Damit ist hier alles gezeigt (mit einfachem Ordnen nach Real- und Imaginärteil). Speziell erhalten wir neben totaler Differenzierbarkeit in $[x_o,y_o]^T$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = b = \frac{\partial v}{\partial x},$$

also (1).

$(ii) \Rightarrow (i)$ Wir setzen $a = \frac{\partial u}{\partial x}$ und $b = \frac{\partial v}{\partial y}$ (im Sinne von (1)). Weil u und v in $[x_o,y_o]^T$ total differenzierbar sind, wählen wir $\delta > 0$ so, dass $\forall [k,l]^T :\ 0 < \|[k,l]^T\|_{\mathbb{E}^2} < \delta$, analog zu (#) gilt:

$$0 \le \left|\frac{\mathfrak{R}_I(z_o,h)}{|h|}\right|, \left|\frac{\mathfrak{R}_R(z_o,h)}{|h|}\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\mathfrak{R}(z_o,h)}{|h|}\right| < \sqrt{2}\varepsilon,$$

damit ist f in z_o differenzierbar.

□

ANMERKUNG 3.6. *Zusätzlich könnte man auch (ii) umformulieren zu*

(iii) $[u,v]^T$ *ist total differenzierbar in* $[x_o,y_o]^T$ *und* $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ *ist in* $[x_o,y_o]^T$) *„$\mathbb{C}$-linear“.*

Dies entspricht dann wieder den Cauchy-Riemannschen-DGL.

3.2 Differentiationsregeln, Differentiationsoperatoren

DEFINITION 3.4 („Differentiationsoperatoren"). *f sei KFKV und $u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$ seien in $U([x_o, y_o]^T) = U(z_o) \subset D(f) \cap \mathbb{C}$ „reell" total differnzierbar. Dann setzen wir:*

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_o) := \frac{1}{2}\left[(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) + i(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})\right](x_o, y_o)$$

sowie

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_o) := \frac{1}{2}\left[(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) + i(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})\right](x_o, y_o)$$

FOLGERUNG 3.7. *Definition 3.4 kann äquivalent in Form von*

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) f \quad \textit{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f$$

formuliert werden.

Beweis. Restglied in Taylor-Entwicklung sei $\mathfrak{R}(z_o, \overbrace{z - z_o}^{h}) = \mathcal{O}(|h|)$. Dann gilt $\forall z \in U(z_o)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_o) + \frac{\partial f}{\partial x}(z_o) \cdot (x - x_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_o) \cdot (y - y_o) + \mathfrak{R}() = \\ &= f(z_o) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(z_o) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_o)\right) \cdot (x - x_o) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(z_o) + i\frac{\partial v}{\partial y}(z_o)\right) \cdot (y - y_o) + \mathfrak{R}() \\ &= f(z_o) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_o) \cdot (z - z_o) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_o) \cdot (\overline{z - z_o}) + \mathfrak{R}() \end{aligned}$$

Mit $z - z_o = (x - x_o) + i(y - y_o)$, $\overline{z - z_o} = (x - x_o) - i(y - y_o)$.
sowie $x - x_o = \frac{1}{2}((z - z_o) + (\overline{z - z_o}))$ und $y - y_o = \frac{i}{2}((\overline{z - z_o}) - (z - z_o))$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(z_o) &= \left(\frac{\partial f}{\partial z}(z_o) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_o)\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z_o) = i\left(\frac{\partial f}{\partial z}(z_o) - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_o)\right) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(z_o) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_o) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_o)\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_o) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_o) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_o)\right). \end{aligned}$$

Schreiben wir nun den letzten Ausdruck in u und v, so haben wir damit alles gezeigt. □

FOLGERUNG 3.8. *f ist in $z_o \in D(f) \cap \mathbb{C}$ genau dann differenzierbar, wenn*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_o) = 0 \textit{ gilt.}$$

Beweis. Folgt sofort aus den Cauchy-Riemannschen DGL (1) □

BEMERKUNG 3.9. *Konjugiert man f, so gilt*

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(z_o) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(z_o).$$

(Der Beweis ist analog zu Folgerung 3.7 und Differentiation der konjugierten Funktion ist ganz analog zum Rechnen mit Brüchen im Komplexen.)

FOLGERUNG 3.10 (Differentiationsregel 1)**.** *Es seien f und g in $z_o \in D(f) \cap D(g) \cap \mathbb{C}$ im komplexen Sinne differenzierbar, dann gilt:*

(i) $f+g$ und $f-g$ sind in z_o differenzierbar mit (vgl. linearen Vektoraum)

$$(f \pm g)'(z_o) = f'(z_o) \pm g'(z_o),$$

(ii) $f \cdot g$ ist in z_o differenzierbar mit (vgl. linearen Vektoraum bei $g = \alpha \in \mathbb{C}$)

$$(f \cdot g)'(z_o) = f'(z_o) \cdot g(z_o) + f(z_o) \cdot g'(z_o) \quad \textit{und}$$

(iii) bei $g(z_o) \neq 0$ ist die Funktion $\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)$ in z_o differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_o) = \frac{f'(z_o) \cdot g(z_o) - f(z_o) \cdot g'(z_o)}{(g(z_o))^2}.$$

Beweis. Direkt mit Folgerung 3.7, beziehungsweise

$$(iii) \quad g(z_o) \neq 0 \Rightarrow \exists U(z_o) \subset D(g) \cap \mathbb{C} \text{ mit } g(z) \neq 0 \; \forall z \in U(z_o)$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_o} \frac{\frac{f(z)}{g(z)} - \frac{f(z_o)}{g(z_o)}}{z - z_o} &\underset{\text{(Hauptnenner)}}{\overset{\text{Zähler erweitert}}{=}} \frac{1}{g(z_o)} \lim_{z \to z_o} \frac{1}{g(z)} \cdot \lim_{z \to z_o} \frac{f(z) \cdot g(z_o) - f(z_o) \cdot g(z)}{z - z_o} = \\ &= \frac{1}{(g(z_o))^2} \lim_{z \to z_o} \left[\frac{(f(z) - f(z_o))g(z_o)}{z - z_o} + \frac{f(z_o)(g(z_o) - g(z))}{z - z_o} \right] = \\ &= \frac{1}{(g(z_o))^2} (f'(z_o) \cdot g(z_o) - f(z_o) g'(z_o)). \end{aligned}$$

□

FOLGERUNG 3.11 (Differentiationsregel 2)**.** *Kettenregel:*
Seien $G, \tilde{G} \in \tau_{\|\cdot\|_{\mathbb{E}^2}} = \tau_{|\cdot|}$ (offen in $(\mathbb{C}, \tau_{|\cdot|})$), $f: \; G \to \tilde{G}$ in $z_o \in G$ komplex differenzierbar und $g: \; \tilde{G} \to \mathbb{C}$ in $w_o = f(z_o) \in \tilde{G}$ komplex differenzierbar. Dann gilt:

(iv) $(g \circ f)'(z_o) = g'(f(z_o)) \cdot f'(z_o)$

Beweis. Z.B. verkettete Differentialoperation wie in Folgerung 3.7. □

BEMERKUNG 3.12. *Analog zu Folgerung 3.11 kann man f auch als komplexwertige Funktion reeller Variablen $f: \; I \to \tilde{G}$ ansehen.*
f beschreibt dann ein Kurvenstück $\gamma(I)$ in $\tilde{G}$ (beziehungsweise in $\mathbb{C}$). Hier hat man:

$$\textit{(iv)*} \quad (g \circ f)'(t_o) = \frac{d}{dt}(g \circ f)_{|t=t_o} = g'(f(t_o)) \cdot \frac{df}{dt}(t_o)$$

Beispiel 3.2 (erste holomorphe Funktion)**.**

$$f(z) = const., \text{ sowie Polynome } P \text{ als } f(z) = P(z,0) = \sum_{k=0}^{N} a_k(z-0)^k,\ \{a_k\}_{k=0}^{N} \subset \mathbb{C}$$

und mit $Q(z,0) := \sum_{k=0}^{M} b_k(z-0)^k$, $\{b_k\}_{k=0}^{M} \subset \mathbb{C}$ *auch rationale Funktionen* $f(z):\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{P(z,0)}{Q(z,0)} \text{ mit } D(f) = \{z \in \mathbb{C} : Q(z,0) \neq 0\}$$

sind holomorphe Funktionen.

4 Biholomorphe und konforme Abbildungen

4.1 Möbiustransformationen

DEFINITION 4.1. *Vorgegeben sei die reguläre Matrix* $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2,\mathbb{C})$.
(Das heißt $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ *und* $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$. *)*

Eine Abbildung der Gestalt: $M_{\underline{\underline{A}}}(z) := \dfrac{az+b}{cz+d}$ *nennen wir Möbiustransformation.*

Speziell ist hier

$$M_{\underline{\underline{A}}}(z) = \begin{cases} \infty & \text{bei } cz+d = 0\ (z = \frac{-d}{c})\ (\text{beziehungsweise } c = 0,\ z = \infty), \\ \frac{a}{c} & \text{bei } z = \infty,\ c \neq 0, \\ \frac{az+b}{cz+d} & \text{sonst.} \end{cases}$$

das heißt $M_{\underline{\underline{A}}}:\ \mathbb{C}_o \to \mathbb{C}_o$.

Beispiel 4.1. *(i)* $T(z) = \frac{1}{z}$ *(Inversion ist Möbiustransformation)*

(ii) $\mathfrak{J}_R(z) = R \cdot z$ *(Streckung, beziehungsweise Stauchung mit* $R > 0$*)*

(iii) $\mathfrak{J}_\varphi(z) = e^{i\varphi} \cdot z$ *(Drehung,* $\varphi \in [0,2\pi)$*)*

(iv) $L_b(z) = z + b$ *(*$b \in \mathbb{C}$*, Translation)*

FOLGERUNG 4.1 (Möbiustransformationen)**.**

(i) Die Matrizen $\underline{\underline{A}}$ *und* $\alpha\underline{\underline{A}}$ *mit* $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *erklären die gleiche Möbiustransformation.*

(ii) Die inverse Möbiustransformation $M_{\underline{\underline{A}}}^{-1}$ *wird erklärt durch:*

$$M_{\underline{\underline{A}}}^{-1} = M_{\underline{\underline{A}}^{-1}} = M_{[\det \underline{\underline{A}}]^{-1} \cdot\, adj\, \underline{\underline{A}}}$$

Beweis. (*i*)

$$M_{\alpha\underline{\underline{A}}}(z) = \frac{\alpha\,(az+b)}{\alpha\,(cz+d)} = \frac{az+b}{cz+d} = M_{\underline{\underline{A}}}(z)$$

(*ii*)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \det \underline{\underline{A}} = (ad-bc) \neq 0$$

$$\operatorname{adj} \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

und (*i*).

□

BEMERKUNG 4.2. *Die Verkettung von Möbiustransformationen liefert wieder eine Möbiustransformation. Speziell gilt bei*

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \textit{und} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix},$$

wieder bei $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}} \in GL(2,\mathbb{C})$*:*

$$M_{\underline{\underline{A}}} \circ M_{\underline{\underline{B}}}(z) = M_{\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}}}(z).$$

$GL(2,\mathbb{C})$ *bezeichnet die (multiplikative) Gruppe aller regulären* 2×2*-Matrizen mit Elementen aus* $\mathbb{C}$*. Die in* $GL(2,\mathbb{C})$ *erlaubten Matrixmultiplikationen bleiben im Sinne obiger Verkettung von zugeordneten Möbiustransformationen erhalten (Homomorphismus):*

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ „neutrales Element“}$$

$$\underline{\underline{A}} \in GL(2,\mathbb{C}) \underset{\text{„Verkettungstreu“}}{\Leftrightarrow} M_{\underline{\underline{A}}} : \mathbb{C}_o \to \mathbb{C}_o$$

(später noch genauer). Wie die Matrizenmultiplikation im Allgemeinen ist auch die Verkettung zweier Möbiustransformationen <u>*nicht kommutativ*</u>*.*

BEMERKUNG 4.3. *Die Einschränkung jeder Möbiustransformation* $M_{\underline{\underline{A}}}$ *der Gestalt:* $M_{\underline{\underline{A}}}:\ D(M_{\underline{\underline{A}}}) := \mathbb{C}_o \setminus \left\{z : M_{\underline{\underline{A}}}(z) = \infty\right\} \subset \mathbb{C}_o \to \mathbb{C}$ *ist holomorph als KFKV. Bei* $\infty \neq -\frac{d}{c}$ *ist* $M_{\underline{\underline{A}}}(z)$ *holomorph in* $z=\infty$*, weil offensichtlich* $M_{\underline{\underline{A}}}(T(w)) = \frac{a+bw}{c+dw}$ *holomorph in* $w=0$ *ist. (Benutzen hier* $z=\frac{1}{w}$*.) Speziell ist* $M_{\underline{\underline{A}}}(z)$ *holomorph in* $U(-\frac{d}{c}) \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ *(nahe* $z=-\frac{d}{c}$*).*

DEFINITION 4.2 (Doppelverhältnis)**.** *Seien* $\{z_j\}_{j=1}^4 \in \mathbb{C}_o$*, paarweise verschiedene Punkte in* $\mathbb{C}_o$*. Das Doppelverhältnis der* $\{z_j\}_{j=1}^4$ *wird erklärt durch*

$$DV(z_1,z_2,z_3,z_4) := \frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\cdot\frac{z_2-z_4}{z_2-z_3} \quad \textit{bei } \{z_j\}_{j=1}^4 \in \mathbb{C},$$

beziehungsweise mit o.B.d.A. $z_4=\infty$ *durch*

$$D(z_1,z_2,z_3,z_4) := \lim_{w\to 0} DV(z_1,z_2,z_3,\underbrace{\frac{1}{w}}_{T(w)}) = \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$$

BEMERKUNG 4.4 (reellwertiges Doppelverhältnis).
Die $\{z_j\}_{j=1}^4$ *liegen auf einem verallgemeinerten Kreis von* $\mathbb{C}_o \Leftrightarrow DV(z_1,z_2,z_3,z_4) \in \mathbb{R}$
(d.h. $z_j \in S(a,r)\ \forall j \in \{1,2,3,4\},\ r \in [0,\infty),\ a \in \mathbb{C}$*, beziehungsweise* $\{z_j\}_{j=1}^4 \in G(A,B,E)$
(vgl. Notation 2.18))

Beweis. Ausrechnen im Geradenfall, sonst Peripheriewinkelsatz. □

SATZ 4.5. *Jede Möbiustransformation mit* $\underline{\underline{A}} \in GL(2,\mathbb{C})$ *lässt das Doppelverhältnis invariant, d.h. für je vier paarweise verschiedene Punkte* $\{z_j\}_{j=1}^4$ *gilt:*

$$DV(z_1,z_2,z_3,z_4) = DV(M_{\underline{\underline{A}}}(z_1), M_{\underline{\underline{A}}}(z_2), M_{\underline{\underline{A}}}(z_3), M_{\underline{\underline{A}}}(z_4))$$

Beweis. Einfaches Nachrechnen. □

BEMERKUNG 4.6. *Jede Möbiustransformation bildet verallgemeinerte Kreise in* $\mathbb{C}_o$ *auf verallgemeinerte Kreise in* $\mathbb{C}_o$ *ab.*

Beweis. Einfaches Nachrechnen. □

BEMERKUNG 4.7. *Mit Satz 4.5 kann man* $\underline{\underline{A}}$*, beziehungsweise* $M_{\underline{\underline{A}}}$ *durch das Doppelverhältnis konstruieren und zwar verlangt man* z_1, z_2, z_3 *paarweise verschieden (*$\underline{\underline{A}}$ *noch unbekannt),* $M_{\underline{\underline{A}}}(z_j) = w_j$ *(paarweise verschieden) und stellt*

$$DV(z_1,z_2,z_3,z) = DV(w_1,w_2,w_3,M_{\underline{\underline{A}}}(z))$$

einfach nach $M_{\underline{\underline{A}}}$ *um.*
Beziehungsweise man setzt formal:

$$M_{\underline{\underline{B}}_1} := \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z} \cdot \frac{z_2 - z}{z_2 - z_3}, \quad M_{\underline{\underline{B}}_2} := \frac{w_1 - w_3}{w_1 - z} \cdot \frac{w_2 - z}{w_2 - w_3}$$

und verwendet dann: $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}_2^{-1}\underline{\underline{B}}_1$*, oder* $M_{\underline{\underline{A}}}(z) = M_{\underline{\underline{B}}_2}^{-1}(M_{\underline{\underline{B}}_1}(z))$.

DEFINITION 4.3 (Spiegelpunkte). *Es seien* $\{z_j\}_{j=1}^3 \subset \mathbb{C}_o$ *paarweise verschieden und* $\tilde{S}$ *der durch die* $\{z_j\}_{j=1}^3$ *eindeutig bestimmte verallgemeinerte Kreis in* $\mathbb{C}_o$*. Wir nennen den Punkt* z^* *spiegelbildlich zu* $z \in \mathbb{C}_o$*, wenn*

$$DV(z,z_1,z_2,z_3) = \overline{DV(z^*,z_1,z_2,z_3)} \qquad \text{gilt.}$$

ANMERKUNG 4.8. *Die Korrektheit der Definition ist unmittelbar klar, z.B. durch Nachrechnen bei* $M_{\underline{\underline{A}}}(z_j) \in \mathbb{R}_o = \{z \in \mathbb{C}:\ z = \bar{z}\} \cup \{\infty\}$ *(reelle Gerade)* $\forall j \in \{1,2,3\}$.

Beispiel 4.2 (Spiegelpunkte, Spiegelung am Einheitskreis).
Wir enttarnen die Transformation $T^*(z)$ *(vergleiche Notation 2.16) als Spiegelung an* $S(0,1)$*:*

$$\tilde{S} = S(0,1), \quad z^* = T^*(z) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{z}} & \text{bei } z \notin \{0,\infty\}, \\ 0 & \text{bei } z = \infty, \\ \infty & \text{bei } z = 0. \end{cases}$$

Alle $z \in S(0,1)$ *als Elemente des Einheitskreises* $S(0,1)$ *nennt man* <u>*unimodulare Zahlen*</u>.

NOTATION 4.4. *$H_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ nennt man die „obere " Halbebene.*

Beispiel 4.3. *Sei $\mathfrak{M}_+ := \{M_{\underline{\underline{A}}} : \ M_{\underline{\underline{A}}}(H_+) = H_+\}$ die Menge der (im Einschränkung-Sinne betrachteten) Möbiustransformationen, welche H_+ auf H_+ abbilden. Dann gilt:*

$$M_{\underline{\underline{A}}} \in \mathfrak{M}_+ \Leftrightarrow \underline{\underline{A}} \in GL(2,\mathbb{R}) \ \textit{mit} \ \det \underline{\underline{A}} > 0.$$

Idee: Wir wählen $z_j \in \mathbb{R}_o$ mit $M_{\underline{\underline{B}}_1}$ wie in Bemerkung 4.6 mit $\operatorname{Im} z > 0$ und berechnen $\operatorname{Im}(M_{\underline{\underline{B}}_1}(z))$.

NOTATION 4.5. *[Cayley-Transformation]*
Eine spezielle Möbiustransformation ist die sogenannte Cayley-Transformation $M_{\underline{\underline{A}}}(z)$ mit
$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$ *(bei $\det \underline{\underline{A}} = 2i$).*

$$\textit{Hier ist} \qquad \underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{2i} \underbrace{\begin{bmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{adj\, \underline{\underline{A}}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{i} & \frac{1}{i} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}.$$

BEMERKUNG 4.9 (Cayley-Transformation)**.** *Die Anwendung der Cayley-Transformation nach Notation 4.5 liefert das folgende (sogar Rand-treue) Resultat:*

$M_{\underline{\underline{A}}}(H_+) = K(0,1)$ und $M_{\underline{\underline{A}}^{-1}}(K(0,1)) = H_+$.   (Zentral für Spektraltheorie!!!)
Explizit sind hier:

$$M_{\underline{\underline{A}}}(z) = \frac{z-i}{z+i} \ \textit{und} \ M_{\underline{\underline{A}}^{-1}} = i\frac{1+z}{1-z} = i\left(\frac{z+1}{-z+1}\right)$$

4.2 Konforme Abbildungen, holomorphe invertierbare KFKV und Biholomorphie

Sei $f : \ D(f) = G \subset \mathbb{C}_o \to \tilde{G} = W(f) \subset \mathbb{C}$ (KFKV), beziehungsweise $f : \ G \to \tilde{G} \subset \mathbb{C}_o$, $G, \tilde{G}$ offen (aus der Topologie τ_o).
Zunächst sei f KFKV und bilde $U(z_o) \subset G$ bijektiv auf $V(f(z_o)) \subset \tilde{G}$ ab, d.h.

$$f(U(z_o)) = V(f(z_o)).$$

Nun sei $\gamma : \ [a,b] \subset \mathbb{E}^1 \to G$ eine komplexe Funktion einer reellwertiger Variablen mit

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = \underbrace{\dot{\gamma}(t)}_{\text{komplexe Zahl}} \neq 0$$

(reguläre Kurve) und $\gamma(t_o) = z_o$ (d.h. $f(\gamma(t_o)) = w_o$). Die Tangente an Graphen von γ sei:

$$\tau(t) = \underbrace{\gamma(t_o)}_{z_o} + \underbrace{\dot{\gamma}(t_o)}_{\in \mathbb{C}\setminus\{0\}} \cdot (t - t_o)$$

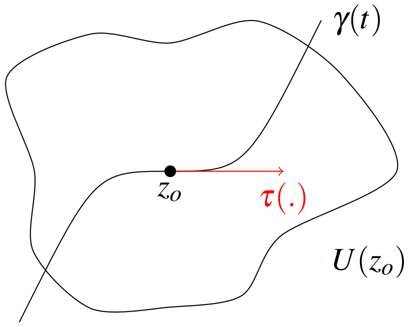


Abbildung 1: Weg in $U(z_o)$

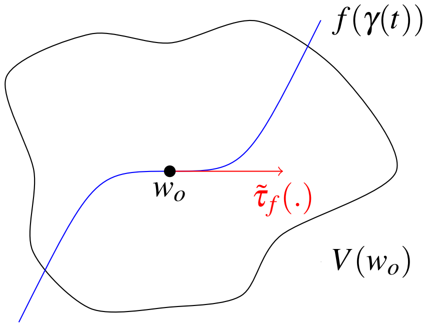


Abbildung 2: Weg in $V(w_o)$

Dazu Tangente an Graphen von $f(\gamma)$ in $w_o = f(z_o)$ (vorausgesetzt, dass die Funktion f hier total differenzierbar ist):

$$\tilde{\tau}_f(t) = \underbrace{f(z_o)}_{w_o} + (df)(\dot{\gamma}(t_o)) \cdot (t - t_o).$$

Dabei haben wir speziell wie in 3.2 (als „Kettenregel“ geschrieben)

$$df(\dot{\gamma}(t_o)) \underset{\text{Abkürzung}}{=} \frac{\partial f}{\partial z}(z_o) \cdot \dot{\gamma}(t_o) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_o) \cdot \overline{\dot{\gamma}(t_o)}, \quad z_o = \gamma(t).$$

Für möglicherweise verschiedene Kurven γ_j hat man hier immer $\dot{\gamma}_j(t_o) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. (Man sagt: „die Kurve als Graph von γ_j ist regulär“).

DEFINITION 4.6 (Konforme Abbildung)**.** *Sei f KFKV und bilde $U(z_o)$ (bei $z_o \in \mathbb{C}$) bijektiv auf $V(w_o)$, $f(z_o) = w_o$, ab (das heißt $f(U(z_o)) = V(f(z_o))$). Wir f nennen konform in z_o, wenn*

(i) die Funktion $f = u + iv$ in z_o (im Identifizierungssinne) total differenzierbar ist und

(ii) eine feste unimodulare Zahl $\alpha \in S(0,1)$ (also $|\alpha| = 1$), sowie eine Funktion $R(\xi)$ mit $R: D(R) = \mathbb{C} \setminus \{0\} \to (0,\infty)$ existieren, so dass $\forall \xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ($\xi = \dot{\gamma}(t_o) \neq 0$) gilt:

$$df(\xi) = (du + i \cdot dv)(\xi) = \alpha R(\xi)\xi.$$

(Natürlich ist auch $R(\xi) = \text{const} = R > 0$ erlaubt.)

Ergänzend nennt man dabei f konform in $z_o \in \mathbb{C}_o$ (und $w_o \in \mathbb{C}_o$), wenn f wieder $U(z_o)$ eineindeutig auf $V(w_o) = V(f(\infty))$ abbildet und die Funktionen

(iiia) $f^* := f \circ T$ bei $z_o = \infty$, $w_o \in \mathbb{C}$

(iiib) $f^* := T \circ f \circ T$ bei $z_o = w_o = \infty$

(iiic) $f^* := T \circ f$ bei $z_o \in \mathbb{C}$, $w_o = \infty$

im Sinne von Definition von oben konform im Punkt $0 \in \mathbb{C}$ (iiia) und (iiib), bzw. in z_o (iiic) sind. Ist f $\forall z_o \in G$ konform, so nennen wir f konform auf G.

BEMERKUNG 4.10. *Zum besseren Verständnis von Definition 4.6 formulieren wir die Bedingung (ii) im Sinne einer reellwertigen Abbildung: mit* $\underline{\kappa} \in \mathbb{E}^2,\ \underline{\kappa} \neq 0$ *setzen wir*

$$\xi = \operatorname{Re}\xi + i\operatorname{Im}\xi = \kappa_1 + i\kappa_2$$

und betrachten $(df)(\xi)$ *als* $\underline{F}:\ \mathbb{E}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{E}^2$. *Wir erinnern und dazu an die Möbiustransformation aus Abschnitt 4.1:*

(iii) $\mathfrak{J}_\varphi(z) := \underbrace{e^{i\varphi}}_{=\alpha} z = \alpha \cdot z$ *„Drehung“.*

(ii) $\mathfrak{J}_R := R \cdot z$, $R > 0$, *also „Streckung“.*

Wir berechnen im ersten Schritt:

$$df(\xi) \hat{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ i\frac{\partial v}{\partial x} & i\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}_{\big|z_o} \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -i\frac{\partial u}{\partial y} \\ i\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}_{\big|z_o} \underbrace{\begin{bmatrix} \kappa_1 \\ i\kappa_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\xi}} \tag{$\circ$}$$

sowie $\alpha \cdot R \cdot \xi$ *bei* $\alpha = e^{i\varphi}$ *(dieser Schritt ist zunächst rein formal). Es ist* $R > 0$, *das heißt zunächst*

$$Re^{i\varphi}\xi \hat{=} R \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ i\sin\varphi & i\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \cos\varphi & i\sin\varphi \\ i\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ i\kappa_2 \end{bmatrix}. \tag{$\circ\circ$}$$

Einfaches Rechnen liefert

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \cdot (\circ), \text{ beziehungsweise } \cdot(\circ\circ)$$

(primitive Matrizenmultiplikation).

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}_{\big|z_o} \overset{Ansatz}{=} R \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

(dabei wurde die zweite Zeile mit i multipliziert). Das heißt

$$\det\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right]_{\big|z_o} = R^2 > 0 \quad \text{und} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}}_{\det[\cdot]=1} \in SO(2).$$

Damit haben wir erhalten:

$$\underline{F}(\underline{\kappa}) = R \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \underline{\kappa},$$

das heißt $\underline{F}(\underline{\kappa})$ *ist die gestreckte (gestauchte) Spalte* $\underline{\kappa}$, *welche um den Winkel* φ *gedreht wurde, beziehungsweise*

$$R^2 = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right] > 0$$

$$\left.\begin{aligned} \text{und} \quad \tfrac{1}{R}\left(\tfrac{\partial u}{\partial x}\right) &= \tfrac{1}{R}\left(\tfrac{\partial v}{\partial y}\right) = \cos\varphi, \\ \text{sowie} \ -\tfrac{1}{R}\left(\tfrac{\partial u}{\partial y}\right) &= \tfrac{1}{R}\left(\tfrac{\partial v}{\partial x}\right) = \sin\varphi \end{aligned}\right\} \text{Cauchy-Riemann}$$

Anders formuliert sind konforme Abbildungen f im Sinne von Definition 4.6 winkeltreu und orientierungstreu.

FOLGERUNG 4.11. *$f:\ G \to \mathbb{C}$ ist genau dann in $G \subset \mathbb{C}$ konform, wenn f in G holomorph mit $f'(z_o) \neq 0\ \forall z_o \in G$ ist.*

Beweis. Folgt sofort aus Bemerkung 4.10. Wir beachten nur, dass

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z}(z_o)\right|^2 = |f'(z_o)|^2 \underset{\text{Cauchy-Riemann}}{=} R^2 = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\Bigg|_{z_o = x_o + iy_o} > 0 \quad \text{gilt.}$$

□

BEMERKUNG 4.12. *Bindet man die Zusatzvereinbarungen aus Definition 4.6 mit ein, so können wir die Möbiustransformationen*

$$M_{\underline{\underline{A}}}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}_o \ (\underline{\underline{A}} \in GL(2,\mathbb{C}))$$

als konforme Abbildungen $M_{\underline{\underline{A}}}:\ \mathbb{C}_o \to \mathbb{C}_o$ erkennen.

BEMERKUNG 4.13. *Jede Möbiustransformation $M_{\underline{\underline{A}}}$ kann als Komposition der Beispiele aus 4.1 - Inversion T, Streckung $\mathfrak{J}_R$, Drehung $\mathfrak{J}_\varphi$ und Translation L_b dargestellt werden (nur Translationen benötigt man im allgemeinen Fall zweimal).*

Beweis. Nachrechnen mit Fallunterscheidung. □

DEFINITION 4.7 (Biholomorphie)**.** *$f:\ G \to \tilde{G}$ (bei $G, \tilde{G} \subset \mathbb{C}_o$ offen) sei KFKV. Wir nennen f biholomorph, wenn*

(i) $f:\ G \to \tilde{G}$ bijektiv,

(ii) f holomorph in G, sowie

(iii) $f^{-1}:\ \tilde{G} \to G$ holomorph ist.

DEFINITION 4.8 (Automorphismen)**.** *Biholomorphe KFKV $f:\ G \to G$ nennt man Automorphismen von G.*

BEMERKUNG 4.14. *Unter Beachtung von Bemerkung 4.3 aus 4.1 kann man jede Möbiustransformation*

$$M_{\underline{\underline{A}}}:\ \mathbb{C}_o \to \mathbb{C}_o,\ \underline{\underline{A}} \in GL(2,\mathbb{C})$$

im Sinne von Definition 4.8 als Automorphismus von $\mathbb{C}_o$ ansehen.

Eine weitere anschauliche Eigenschaft biholomorpher Funktionen liefert der folgende Satz zur Ableitung der Umkehrfunktion.

SATZ 4.15 (lokale Biholomorphie)**.** *Sei $f:\ G \to \mathbb{C}$ KFKV in G holomorph und $f':\ G \to \mathbb{C}$ in G stetig. Weiterhin sei $f'(z_o) \neq 0$ für einen Punkt $z_o \in G$.*
Dann existieren offene Mengen $U(z_o) \subset G$ sowie $V(f(z_o))) = V(w_o)$, so dass im Einschränkungssinne $f:\ U(z_o) \to V(w_o)$ biholomorph ist. Hier gilt zudem:

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \qquad \forall w \in V(w_o) \tag{\#}$$

Beweis. Existenz von $U(z_o)$ ist offensichtlich, weil $f'(z_o) \neq 0$ und f' stetig in G.
Damit gilt $\forall z \in U(z_o):\ f'(z) \neq 0$. Der Rest folgt aus dem Satz zur Umkehrfunktion zusammen mit Folgerung 3.11 (*iv*) aus 3.2 in Gestalt von

$$w = f(f^{-1}(w)), \quad \text{das heißt} \quad 1 = f'(f^{-1}(w)) \cdot (f^{-1})'(w).$$

□

FOLGERUNG 4.16. *Ist $f:\ G \to \tilde{G} = f(G)$ KFKV holomorph mit $f'(z_o) \neq 0\ \forall z_o \in G$ und f' stetig auf G, dann ist f biholomorph und im Sinne von Folgerung 4.11 auch konform.*

Beispiel 4.4. *Automorphismen auf $K(0,1)$:*
$f = M_{\underline{\underline{A}}}:\ K(0,1) \to K(0,1) = G$ mit

$$M_{\underline{\underline{A}}}(z) := \frac{az+b}{cz+d} \quad \textit{und} \quad \underline{\underline{A}} \in \left\{ \underline{\underline{A}}_{\vartheta,w} = \begin{bmatrix} e^{i\vartheta} & -e^{i\vartheta}w \\ -\overline{w} & 1 \end{bmatrix},\ \vartheta \in \mathbb{R},\ |w| < 1, w \in \mathbb{C} \right\}$$

sind Automorphismen auf $G = K(0,1)$. Bei $w = 0$ ist $M_{\underline{\underline{A}}}(z) = e^{i\vartheta}z = \mathfrak{J}_\vartheta z$ eine Drehung.
Im Falle $w \neq 0,\ |w| < 1$, überprüft man einfach den Rand $S(0,1)$ von $K(0,1)$. Hier hat man:

$$\begin{aligned}
M_{\underline{\underline{A}}}(z) = M_{\vartheta,w}(z) \qquad & = \frac{e^{i\vartheta}(z-w)}{-\overline{w}z+1}, \\
|M_{\vartheta,w}(1)| = |e^{i\vartheta}\frac{1-w}{-\overline{w}+1}| \qquad & = |e^{i\vartheta}\frac{1-w)}{1-\overline{w}}| = 1, \\
|M_{\vartheta,w}(i)| = |e^{i\vartheta}\frac{i-w}{-i\overline{w}+1}| \qquad & = |e^{i\vartheta}\frac{i-w}{i(-\overline{w}-i)}| = 1 \quad (\bar{i} = -i), \\
|M_{\vartheta,w}(-1)| = |e^{i\vartheta}\frac{(-1-w)}{1+\overline{w}}| \qquad & = 1, \quad \textit{d.h. alles wieder Punkte von } S(0,1), \\
|M_{\vartheta,w}(0)| = |e^{i\vartheta}\frac{-w}{1}| \qquad & < 1,
\end{aligned}$$

damit ist alles gezeigt.

ANMERKUNG 4.17. *Die Cayley-Transformation nach Notation 4.5 aus 4.1 (vergleiche auch Bemerkung 4.7) ist ein Beispiel eines Biholomorphismus von H_+ auf $K(0,1)$. Hier war*

$$M_{\underline{\underline{A}}}(H_+) = K(0,1) \quad \textit{und} \quad M_{\underline{\underline{A}}}(z) := \frac{z-i}{z+i},$$

Kontrolle: $M_{\underline{\underline{A}}}(\partial H_+) = S(0,1)$ ($\partial H_+ = \mathbb{R}_o = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \mathbb{C}_o$). Auch als die Einschränkung im obigen Sinne ist die Cayley-Transformation konform.

5 Potenzreihen und elementare Funktionen

5.1 Standardwerkzeuge und formale Potenzreihen

Sei zunächst $G \subset \mathbb{C}$ offen (d.h. $G \in \tau_o \cap \mathbb{C}$). Wir formulieren ein Standard-Resultat für (holomorphe) KFKV.

LEMMA 5.1. *Die Folge $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ holomorpher Funktionen $f_k : G \to \mathbb{C}$ sei auf G gleichmäßig konvergent gegen $f: G \to \mathbb{C}$. Die zugehörige Folge der Ableitungen $\{f_k'\}_{k=1}^{\infty}$ sei gleichmäßig konvergent gegen eine Grenzfunktion g, wobei alle f_k' auf G stetig seien.*
Dann ist f holomorph mit $f' = g$ (holomorphe Grenzfunktion).

ANMERKUNG 5.2 (Konvergenz). *Gleichmäßig konvergent heißt:*
$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \rightrightarrows f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists k = k_o(\varepsilon)$ *derart, dass*

$$\forall k \geq k_o(\varepsilon) \text{ gilt: } \sup_{z \in G} |f(z) - f_k(z)| < \varepsilon,$$

wie in Lemma 5.1 bräuchten wir sogar z.B. nur punktweise Konvergenz der Grundfolge, das heißt $\exists z_o \in G$: mit $\{f_k(z_o)\}_{k=1}^{\infty} \underset{\mathbb{E}^1_{\mathbb{C}}}{\to} f(z_o)$ in diesem z_o.

Beweis. Es genügen die Kenntnisse aus Analysis 1, wir überprüfen nur die Cauchy-Riemannschen DGL:

$$\begin{aligned}
\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{u_k + iv_k\}_{k=1}^{\infty} &\to f = u + iv \\
\{\frac{\partial u_k}{\partial x}\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{\partial v_k}{\partial y}\}_{k=1}^{\infty} &\to \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \\
\{-\frac{\partial u_k}{\partial y}\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{\partial v_k}{\partial x}\}_{k=1}^{\infty} &\to -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.
\end{aligned}$$

□

Wir schwächen die gleichmäßige Konvergenz ab zu lokal gleichmäßiger Konvergenz:

DEFINITION 5.1. *Es seien $f_k: G \to \mathbb{C}\ \forall k \in \mathbb{N}_o$. Wir nennen $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ lokal gleichmäßig konvergent gegen f_o, wenn $\forall z_o \in G\ \exists U(z_o) \subset G$, so dass*

$$\{f_k\big|_{U(z_o)}\} \underset{U(z_o)}{\rightrightarrows} f_o\big|_{U(z_o)}.$$

BEMERKUNG 5.3. *In der Auffassung als Folge von Partialsummen nutzen wir Definition 5.1 ganz analog für Funktionenreihen.*

BEMERKUNG 5.4. *Lokal gleichmäßige Konvergenz auf G kann man offensichtlich auch im folgenden Sinne interpretieren:*

$$\forall U \subset G \text{ mit } \overline{U} \subset G,\ \overline{U} \text{ kompakt, gilt: } \{f_k\big|_U\} \underset{U}{\rightrightarrows} f_o\big|_U$$

DEFINITION 5.2. *Wir nennen einen Ausdruck der Gestalt*

$$\mathscr{P}(z,z_o) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_o)^j$$

bei $\{a_j\}_{j=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$; $z, z_o \in \mathbb{C}$ *eine (formale) Potenzreihe in* $\mathbb{C}$ *im Entwicklungspunkt* z_o.

BEMERKUNG 5.5 (Linearer Vektorraum)**.** *Aus Definition 5.2 wird sofort klar, dass* $\mathscr{P}(z_o,z_o) = a_o$. *Sind zwei Potenzreihen* $\mathscr{P}(z,z_o)$ *und* $\mathfrak{Q}(z,z_o)$ *vorgegeben (verwenden hier immer den gleichen Entwicklungspunkt* z_o*), so erklären wir die Gleichheit von Potenzreihen (mit* $\mathfrak{Q}(z,z_o) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j (z-z_o)^j$*) durch*

$$\mathscr{P}(z,z_o) = \mathfrak{Q}(z,z_o) \Leftrightarrow \forall j \in \mathbb{N}_o : a_j = b_j.$$

Das Nullelement im Raum der Potenzreihen ist

$$o_{.}(z,z_o) = 0 = \sum_{j=0}^{\infty} 0 \cdot (z-z_o)^j.$$

Da Addition und skalare Multiplikation einfach im folgenden Sinne erklärbar sind:

$$\mathscr{P}(z,z_o) \pm \mathfrak{Q}(z,z_o) := \sum_{j=0}^{\infty} (a_j \pm b_j)(z-z_o)^j, \quad \textit{bzw.}$$
$$\lambda \mathscr{P}(z-z_o) := \sum_{j=0}^{\infty} \lambda a_j (z-z_o)^j \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C}),$$

kann man die Menge der Potenzreihen in z_o *als linearen Vektorraum auffassen.*

FOLGERUNG 5.6. *Zudem kann man Potenzreihen multiplizieren (multiplikativer Ring der Potenzreihen). Vorschrift:*

$$\mathscr{P}(z,z_o)\mathfrak{Q}(z,z_o) := \sum_{j=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k})(z-z_o)^j. \quad \textit{(Cauchysche Produktformel)}$$

Formal aufgeschrieben ist das (multiplikative) Einselement

$$\mathscr{E}(z,z_o) := 1 \cdot (z-z_o)^0 = 1 \quad .$$

DEFINITION 5.3. $\mathscr{P}(z,z_o)$ *sei vorgegeben. Wir nennen*

$$K_{\mathscr{P}}(z_o) := \{z \in \mathbb{C} : \ \mathscr{P}(z,z_o) \textit{ konvergiert}\}$$

den Konvergenzbereich von $\mathscr{P}()$ *und*

$$\rho_{\mathscr{P}}(z_o) := \sup\{|z-z_o| : \ \mathscr{P}(z,z_o) \textit{ konvergiert}\}$$

den Konvergenzradius von $\mathscr{P}(z,z_o)$.

SATZ 5.7 (Konvergenz von Potenzreihen). *Es sei $\mathscr{P}()$ als Potenzreihe vorgegeben. Dann gilt:*

(i) $\mathring{K}_{\mathscr{P}}(z_o) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_o| < \rho_{\mathscr{P}}\} = K(z_o, \rho_{\mathscr{P}})$,

(ii) auf der Menge (dem Konvergenzkreis) $\mathring{K}_{\mathscr{P}}(z_o)$ konvergiert $\mathscr{P}$ absolut und lokal gleichmäßig,

(iii) Der Konvergenzradius $\rho_{\mathscr{P}}$ von $\mathscr{P}()$ wird bestimmt durch

$$\rho_{\mathscr{P}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{j\to\infty}} \sqrt[j]{|a_j|}}; \quad \overline{\lim_{j\to\infty}} = \limsup_{j\to\infty}$$

mit den Konventionen $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$,

(iv) hat man in $\mathscr{P}(z, z_o) : \ a_j \neq 0$ für (fast) alle $j \geq j_o$, so gilt:

$$\underline{\lim_{j\to\infty}} \frac{|a_j|}{|a_{j+1}|} \leq \rho_{\mathscr{P}} \leq \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{|a_j|}{|a_{j+1}|}$$

und bei eigentlicher Existenz:

$$\lim_{j\to\infty} \left| \frac{a_j}{a_{j+1}} \right| = \rho_{\mathscr{P}}$$

Beweis. Grundkurs Analysis. □

FOLGERUNG 5.8 (Mit Lemma 5.1 und Satz 5.7). *Sind $\mathscr{P}(z, z_o)$ und $\tilde{\mathscr{P}}(z, z_o)$ Potenzreihen der speziellen Gestalt*

$$\mathscr{P}(z, z_o) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_o)^j, \quad \tilde{\mathscr{P}}(z, z_o) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) a_{j+1} (z - z_o)^j,$$

dann gilt: $\rho_{\mathscr{P}} = \rho_{\tilde{\mathscr{P}}}$. Desweiteren ist $\mathscr{P}()$ in $K(z_o, \rho_{\mathscr{P}})$ holomorph bei

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathscr{P} = \mathscr{P}'(z, z_o) = \tilde{\mathscr{P}}(z, z_o) =: \mathscr{P}^{(1)}(z, z_o).$$

Beweis. Offensichtlich. □

BEMERKUNG 5.9 (Taylor-Reihen). *Bei $\rho > 0$ hat man speziell $\mathscr{P}$ als Koeffizienen der Taylor-Reihe:*

$$a_j = \frac{1}{j!} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^j \mathscr{P}(z, z_o) \right]_{\big| z = z_o} = \frac{1}{j!} \cdot \mathscr{P}^{(j)}(z_o, z_o) \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

(hier sind höhere komplexe Ableitungen wieder einfach induktiv erklärt).

Beweis. Offensichtlich, d.h. Taylor-Reihe einfach hinschreiben. □

5.2 Elementare Funktionen (Auswahl)

Exponentialfunktionen und „verwandte Funktionen“:

(a)

$$\exp(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(z-0)^j,\ \rho_{\exp} = \infty, \text{das heißt für den Konvergenzkreis:} K(0,\rho_{\exp}) = \mathbb{C}.$$

Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion schreiben wir mit $z, w \in \mathbb{C}$:

$$\exp(z)\exp(w) = \exp(z+w).$$

Dazu formal „reelle“ Darstellung:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(e^{iy}) = e^x \cos y + ie^x \sin y, \quad \exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Neu: Die Eponentialfunktion exp ist periodisch mit der Periode $2\pi i$, das heißt

$$\exp(z+2\pi i) = \exp(z)\underbrace{e^{2\pi i}}_{=1} = \exp(z).$$

Damit gibt es ein Problem bei der Konstruktion der Umkehrfunktion, weil schon $\exp(\Omega) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dabei ist $\Omega = \{z \in \mathbb{C} :\ -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$ der Hauptstreifen (Fundamentalstreifen) der Exponentialfunktion.

(b) Trigonometrische und hyperbolische Funktionen

$$\sin z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} z^{2j+1}, \quad \cos z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} z^{2j}$$

mit $\exp(iz) = \cos z + i \sin z$. Wir beachten, dass $(-1)^j = (i)^{2j}$:

$$i\sin(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2j+1}}{(2j+1)!} = \sinh(iz) \text{ und } \qquad \cos z = \cosh(iz).$$

Konvergenzradien sind hier immer $\rho = \infty$.
Die sinusoidalen Funktionen haben hier die Perioden 2π bzw. $2\pi i : \sin(z) = \sin(z+2\pi)$, $\cos(z) = \cos(z+2\pi)$, $\sinh(z) = \sinh(z+2\pi i)$ und $\cosh(z) = \cosh(z+2\pi i)$.
Die Funktionen $\sin(.), \cos(.), \sinh(.)$ und $\cosh(.)$ haben den Definitionsbereich $K(0,\rho) = \mathbb{C}$ und Wertebereich $\mathbb{C}$.
Zusätzlich haben wir die bekannten Standard-Beziehungen:

$$\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}).$$

Die Eigenschaften der Exponentialfunktion unreißt der folgende Satz:

SATZ 5.10. *Die Exponentialfunktion* $\exp(z) = e^z$ *hat die Periode* $2\pi i$ *mit*

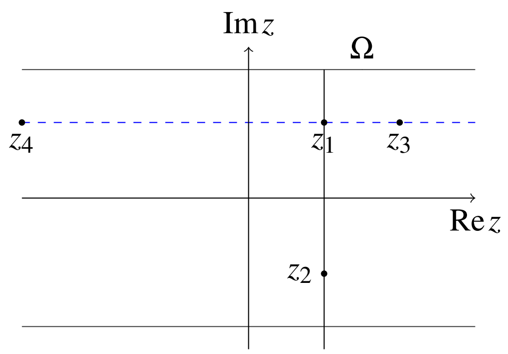
$$W(\exp()) = \tilde{G} = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

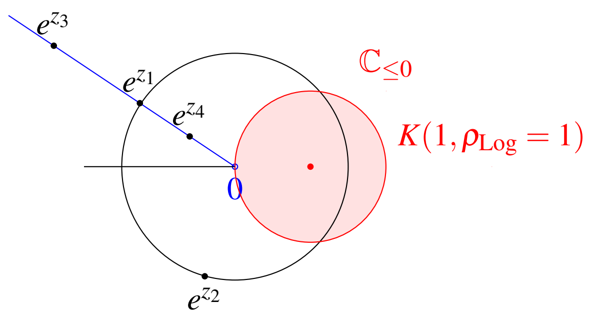
$\forall w \in \tilde{G}$ *gibt es genau ein* $z \in \Omega$ *(*Ω *Fundamentalstreifen) mit* $e^z = w$.
Die Abbildung

$$e^z : \ \mathring{\Omega} = \{z \in \mathbb{C} : \ -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\} \to \mathbb{C} \setminus \{\xi \in \mathbb{R} : \ \xi \leq 0\} = \mathbb{C}_{\leq 0}$$

ist ein Biholomorphismus (und natürlich konform). $\mathbb{C}_{\leq 0}$ *ist hier die längs der negativen reellen Achse aufgeschnittene komplexe Ebene.*

Beweis. Wir überprüfen $(e^z)' = e^z \neq 0$, $|e^z| > 0$, Offenheit wird durch Ω, Bijektivität zum Beispiel durch $-\pi < \operatorname{Im} \leq \pi$ gesichert. □





BEMERKUNG 5.11. *Setzt man* $\Omega_{(0)} := \Omega$ *und* $\Omega_{(k)} = \Omega_{(0)} + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ *und „klebt “die* $\mathbb{C}_{\leq 0}$ *entlang der negativen (reellen) Achse mit formal steigendem Argument zusammen, so entsteht ein Gebilde, die* <u>*Riemannsche Fläche*</u> *mit* ∞ *vielen „Blättern“. Dann kann man erreichen, dass*

$$Log : \ (\exp(2k\pi i)\cdot)\mathbb{C}_{\leq 0} \to \Omega_{(k)}, \ k \in \mathbb{Z}$$

(als Zweige der Logarithmusfunktion abbildet). $\mathbb{C}_{\leq 0} \to \Omega_{(0)}$ *nennt man den Hauptzweig der Logarithmusfunktion.*

(c)
$$\operatorname{Log}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(z-1)^k, \ \rho = \rho_{\text{Log}} = 1.$$

(d) Die „binomische Reihe“
$$\mathscr{P}_\kappa(z,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\kappa}{k}(z-0)^k, \quad \binom{\kappa}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{\kappa+1-j}{j} \ \left(\overset{\kappa\in\mathbb{N}_o}{\cong} \ \frac{\kappa!}{k!(\kappa-k)!}\right)$$
Bei $\kappa \in \mathbb{N}_o : \ \mathscr{P}_\kappa(z,0) = (1+z)^\kappa$, erhalten wir das bekannte Standardpolynom $P(z,0) = P_\kappa(z,0) = \mathscr{P}_\kappa(z,0) = (1+z)^\kappa$ und formal $\rho = \infty$.
Auch die Bezeichnung binomische Funktion für $(1+z)^\kappa = \mathscr{P}_\kappa(z,0)$ ist gebräuchlich.
Hier hat man: $\rho = 1$ bei $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbb{N}_o\}$ bzw. sogar $\kappa \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{N}_o\}$.

6 Integration von komplexwertigen Funktionen komplexer Variablen

6.1 Integration in $\mathbb{C}$ im Sinne von Kurvenintegralen 2. Art, Komplexe Wegintegrale

Analog zu 4.2 sei $\gamma:\ [a,b]\to G\subset\mathbb{C}$.
Wir schwächen die Differenzierbarkeit von γ in (a,b) ab zu:

Definition 6.1 (komplexe Wege). *Es sei $\gamma:[a,b]\to G$ stetig. Wir nennen $\gamma(a)$ den Anfangspunkt und $\gamma(b)$ den Endpunkt von γ. γ heißt geschlossen, wenn $\gamma(a)=\gamma(b)$ gilt.*
Wir nennen γ stückweise stetig differenzierbar, falls $\exists\mathscr{Z}_{[a,b]}\in\mathfrak{Z}_{[a,b]}$ mit

$$\mathscr{Z}_{[a,b]}=\{a_o=a,a_1,\dots,a_N=b\},\quad a_j<a_{j+1}\ \forall j=0,\dots,N-1$$

ist eine Zerlegung von $[a,b]$, so dass $\gamma_j=\gamma_{\big|[a_j,a_{j+1}]}$ stetig differenzierbar $\forall j=0,\dots,N-1$ (stückweise glatt). (Bei Existenz „rechts-“ und „linksstetiger “Ableitungen.)

Bemerkung 6.1. *$[a,b]$ definiert den Durchlaufsinn auf γ.*

Beispiel 6.1 (Beispiel komplexe Wege).

(a) $S(z_o,1)=\{\gamma(t)=z_o+e^{it},\ t\in[0,2\pi]\},\ \gamma(0)=\gamma(2\pi)$ *geschlossen,* $\gamma:\ [0,2\pi]\to\mathbb{C}$.

(b) Strecken $[z_o,z_1]:=\{\gamma(t)=z_o+t(z_1-z_o),\ t\in[0,1]\},\ \gamma:\ [0,1]\to\mathbb{C}$

(c) „Umorientierter Weg“

$$\begin{aligned}\gamma:\ [a,b]\to\mathbb{C},\quad \gamma^-:\ [a,b]\to\mathbb{C},\\ \gamma=\gamma(t),\ \textit{sowie}\ \gamma^-:=\gamma(a+b-t),\\ \gamma^-(a)=\gamma(b)\ \textit{und}\ \gamma^-(b)=\gamma(a).\end{aligned}$$

(d) Polygone $[z_o,\dots,z_N]:=[z_o,z_1]\cup[z_1,z_2]\cup\dots\cup[z_{N-1},z_N]$ *bei Kompositionsvereinbarung:*

$$\begin{aligned}\gamma_j:\ [a_j,b_j]\to\mathbb{C},\quad \gamma_1(b_1)=\gamma_2(a_2),\\ \gamma_1\cup\gamma_2:\ [a_1,b_1+(b_2-a_2)]\to\mathbb{C},\end{aligned}$$

erklärt durch:

$$(\gamma_1\cup\gamma_2)(t):=\begin{cases}\gamma_1(t) & \forall t\in[a_1,b_1]\\ \gamma_2(t-b_1+a_2) & \forall t\in[b_1,b_1+(b_2-a_2)]\end{cases}$$

Erinnerung an die Kurvenintegrale 2. Art - hier speziell im $\mathbb{E}^2$:

Betrachten das Kurvenintegral 2. Art zunächst mit $\underline{\Gamma}:\ [a,b] \to \hat{G} \subset \mathbb{E}^2$, $\underline{\Gamma}$ *differenzierbar.*

$$\text{Einheitstangentenvektor an den „Weg“ } \underline{\Gamma} \text{ im Punkt } \underline{\Gamma}(t):\quad \underline{\tau}(t) = \frac{1}{\|\dot{\underline{\Gamma}}(t)\|_{\mathbb{E}^2}} \begin{bmatrix} \dot{\Gamma}_1(t) \\ \dot{\Gamma}_2(t) \end{bmatrix},$$

$$\text{und „Einheits-Normalenvektor“(Durchlaufsinn):}\quad \pm\,\underline{\mathfrak{n}}(t) = \frac{1}{\|\dot{\underline{\Gamma}}(t)\|_{\mathbb{E}^2}} \begin{bmatrix} \dot{\Gamma}_2(t) \\ -\dot{\Gamma}_1(t) \end{bmatrix}.$$

Das Kurvenintegral 2. Art schreiben wir mit vorgegebenem Vektorfeld $\underline{w}(\underline{x})$, $\underline{w}:\ \hat{G} \to \mathbb{E}^2$ *bei Existenz in der Gestalt:*

$$\int_{\underline{\Gamma}} \underline{w}^T \cdot \underline{\tau} ds = \int_a^b \underline{w}^T \cdot \begin{bmatrix} \dot{\Gamma}_1(t) \\ \dot{\Gamma}_2(t) \end{bmatrix} dt, \quad ds = \|\dot{\underline{\Gamma}}\|_{\mathbb{E}^2} dt.$$

Einfache Übertragung ins Komplexe:

$$\gamma(t) := \Gamma_1(t) + i\Gamma_2(t), \quad \dot{\gamma}(t) = \dot{\Gamma}_1(t) + i\dot{\Gamma}_2(t), \quad \|\dot{\underline{\Gamma}}\|_{\mathbb{E}^2} = |\dot{\gamma}(t)|$$

$f = u + iv$:

$$\int_{\underline{\Gamma}} [u,-v]^T \underline{\tau}(t) ds + i \cdot \int_{\underline{\Gamma}} [u,-v]^T \underline{\mathfrak{n}}(t) ds \overbrace{=}^{(I)+(II)i} \int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u+iv)(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt$$

(I) *Arbeit, um Punkt von* $\gamma(a)$ *nach* $\gamma(b)$ *unter Einfluss von* $\underline{w} = \begin{bmatrix} u \\ -v \end{bmatrix}$ *zu bewegen.*

(II) *„Fluss“durch* γ *in Richtung* $\underline{\mathfrak{n}}$, *beziehungsweise „Arbeit“ im Vektorfeld* $\underline{\tilde{w}} = \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}$.

Definition 6.2 (Komplexes Integrale). *Es sei* $\gamma:\ [a,b] \to G$ *stückweise glatt (stückweise stetig differenzierbar). Wir erklären das komplexe Integral durch:*

$$\int_\gamma f(z)dz := \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\gamma_j} f(z)dz = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(\gamma_j(t))\dot{\gamma}_j(t)dt.$$

(Hier haben wir $\gamma_j := \gamma\big|_{[a_j,a_{j+1}]}$, $j = 0,\ldots,N-1$.*)*

Bemerkung 6.2 (Umparametrisierung). *Analog zu den Standardeigenschaften von Kurvenintegralen 2. Art, haben wir bei Durchlaufsinn-erhaltender Umparametrisierung:*

$$\beta:\ [c,d] \to [a,b] \text{ bei } \beta(c) = a,\ \beta(d) = b \text{ und } \beta'(t) > 0\ \forall t$$

(reellwertige Funktion reeller Variablen, monoton wachsend) die Standardeigenschaften:

(i)

$$\int_{\gamma\circ\beta} f(\tilde{z})d\tilde{z} = \int_\gamma f(z)dz,$$

(ii)

$$-\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma^-} f(z)dz \qquad \gamma^- \textit{mit entgegengesetztem (inversem) Durchlaufsinn},$$

darüber hinaus ist das Integral linear:

(iii)

$$\int_\gamma (\alpha_1 f_1(z) + \alpha_2 f_2(z))dz = \alpha_1 \int_\gamma f_1(z)dz + \alpha_2 \int_\gamma f_2(z)dz$$

und additiv bei Kurvenkomposition:

(iv)

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

(v) *Ist γ stückweise glatt und $|f(z)| \le M \ \forall z \in \gamma$, gilt:*

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \le M|\gamma|.$$

Hierbei bezeichnet $|\gamma|$ die Länge des Weges γ, das heißt:

$$|\gamma| = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} \underbrace{|\dot\gamma_j(t)|dt}_{(ds)_j} \quad \textit{(vergleiche Definition 6.2)}$$

Beispiel 6.2. *„Die Zahl der Funktionentheorie“ $2\pi i$.*
Seien $0 < r < \infty$, $z = z_o + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $\frac{dz}{dt} = ire^{it}$ sowie k in $\mathbb{Z}$. Wir berechnen

$$\int_{S(z_o,r)} (z - z_o)^k dz = \int_o^{2\pi} (re^{it})^k ire^{it} dt = ir^{k+1} \int_o^{2\pi} e^{i(k+1)t} dt =$$

$$= \begin{cases} r^{k+1} \frac{1}{k+1} [e^{i(k+1)t}]_o^{2\pi} = 0 & \textit{wenn } k \neq -1 \\ ir^{k+1} \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i \cdot r^0 \ = \ 2\pi i & \textit{wenn } k = -1 \end{cases}$$

SATZ 6.3. *Es sei $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ eine auf $G \subset \mathbb{C}$ lokal gleichmäßig konvergente Folge mit Grenzwert f_o und $\gamma : \ [a, b] \to G$ ein stückweise glatter Weg.*
Dann gilt

$$\lim_{k \to \infty} \int_\gamma f_k(z)dz = \int_\gamma f_o(z)dz.$$

Beweis. Folgt sofort mit Bemerkung 6.2 (v) und 5.4. □

DEFINITION 6.3 (komplexe Stammfunktion)**.** *Sei $f : \ G \to \mathbb{C}$ (KFKV) stetig auf G.*
Eine Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ nennen wir (komplexwertige) Stammfunktion von f in G, wenn

(1) *F in G holomorph ist und*

(2) *$\forall z \in G : \ F'(z) = f(z)$ gilt.*

BEMERKUNG 6.4. *Differentiationsregel (iv)* und Stammfunktion (aus Bemerkung 3.12 (iv)* geschrieben mit γ) liefern:*

$$f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma = F'(\gamma(t))\cdot\dot\gamma = \frac{d}{dt}F(\gamma(t)).$$

Ist $\gamma:\ [a,b]\to G$ stückweise glatt, $f:G\to\mathbb{C}$ stetig mit Stammfunktion F, dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \sum_{j=0}^{N-1}\int_{a_j}^{a_{j+1}} F'(\gamma(t))\dot\gamma(t)dt \qquad (i)\\ &\overset{HDI}{=}\sum_{j=0}^{N-1}[F(\gamma(a_{j+1}))-F(\gamma(a_j))] = F(\gamma(b))-F(\gamma(a))\end{aligned}$$

und für geschlossene Wege γ:

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \qquad (ii)$$

ANMERKUNG 6.5. *Mit Bemerkung 6.4 und Satz 6.3 kann man das Beispiel zu $2\pi i$ nutzen: Es seien $a, z_o\in\mathbb{C}$ mit $|a-z_o|\neq r>0$, dann gilt*

$$\int_{S(z_o,r)}\frac{1}{z-a}dz = \begin{cases}2\pi i & bei\ |a-z_o|<r\\ 0 & bei\ |a-z_o|>r\end{cases}$$

Erster Fall: $|a-z_o|<|z-z_o|\ \forall z\in S(z_o,r)$.
Idee: Trick mit Hilfe geometrischer Reihen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-a} &= \frac{1}{z-z_o+z_o-a} = \frac{1}{z-z_o}\frac{1}{(1-\frac{a-z_o}{z-z_o})}\\ &= \frac{1}{z-z_o}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a-z_o}{z-z_o}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a-z_o)^k}{(z-z_o)^{k+1}}.\end{aligned}$$

Im Fall $|z-z_o|<|a-z_o|$ erhält man analog:

$$\frac{1}{z_o-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_o)^k}{(a-z_o)^k}\qquad als\ reine\ Potenzreihe.$$

Der Rest folgt standardmäßig (Folge der Patialsummen).

SATZ 6.6 (Stammfunktion). *$f:\ G\to\mathbb{C}$ sei KFKV, f stetig und G wegzusammenhängend. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

(i) *f besitzt in G eine Stammfunktion F,*

(ii) $\int_\gamma f(z)dz = 0\quad \forall\gamma\subset G,\ \gamma$ *geschlossen,*

(iii) $\int_\gamma f(z)dz$ *ist* <u>*wegunabhängig*</u>*, das heißt $\forall\gamma_o,\gamma_1\subset G$ stückweise glatt,*
mit $\gamma_j:\ [a^{(j)},b^{(j)}]\to G,\ j=0,1,$ und gleichen Anfangs- und Endpunkten :

$$\begin{aligned}\gamma_o(a^{(0)}) &= \gamma_1(a^{(1)}) = z_o\\ \gamma_o(b^{(0)}) &= \gamma_1(b^{(1)}) = z_1\end{aligned}\qquad gilt\ \int_{\gamma_o}f(z)dz = \int_{\gamma_1}f(z)dz.$$

ANMERKUNG 6.7 (Wegzusammenhang)**.** *G nennen wir wieder wegzusammenhängend, wenn es zu jeder Wahl von zwei Punkten $z, \tilde{z} \in G$ eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to G$ mit $\gamma(a) = z$ und $\gamma(b) = \tilde{z}$ gibt (wobei das abgeschlossene $[a,b]$ mit der Standardtopologie des $\mathbb{E}^1$ versehen sei). Ist G in $\mathbb{E}^1_{\mathbb{C}}$ wegzusammenhängend, so ist G auch zusammenhängend. Die Umkehrung braucht Zusammenhang von G und lokalen Wegzusammenhang, d.h. aus G zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend $\Rightarrow$ G wegzusammenhängend.*

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$ Bemerkung 6.4 (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Wir setzen $\gamma = \gamma_o \cup \gamma_1^-$ als geschlossenen Weg (analog $(iii) \Rightarrow (ii)$).

$(iii) \Rightarrow (i)$ Wir nutzen, dass G wegzusammenhängend ist, das heißt zu $z, z_o \in G$ existiert ein stückweise glatter Weg $\gamma \subset G$ mit Anfangspunkt z_o und Endpunkt z. Wir setzen $F(z) = \int_\gamma f(\zeta) d\zeta$ (wohldefiniert, da das Integral wegunabhängig ist) und betrachten $w \in U(z) \subset G$ (dicht bei z) und $\gamma_w = \gamma \cup [z,w]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F(w) - F(z) &= \int_{[z,w]} f(\zeta) d\zeta = \int_{[z,w]} f(z) d\zeta + \int_{[z,w]} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \\ &= f(z)(w-z) + \int_{[z,w]} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta. \end{aligned}$$

Weil f stetig ist, können wir zu beliebigen $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ finden, sodass $|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon \ \forall \zeta \in K(z,\delta) \subset G$. Mit Bemerkung 6.2 (v) erhalten wir bei $w \in K(z,\delta)$:

$$\left| \int_{[z,w]} f(\zeta) - f(z) d\zeta \right| \le \varepsilon |w - z|.$$

$|w - z| = |[z,w]|$ ist die „Länge des Weges"!

$$\Rightarrow \forall w \in K(z,\delta) \setminus \{z\} : \quad \left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \right| < \varepsilon,$$

also $F'(z) = f(z)$.

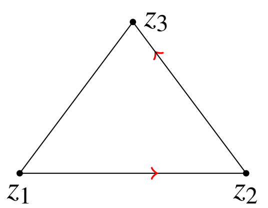
□

6.2 Goursat-Lemma, Cauchyscher Integralsatz für sternförmige Gebiete

NOTATION 6.4 (Dreiecke)**.** *Seien z_1, z_2 und z_3 paarweise verschiedene komplexe Zahlen mit*

$$z_1, z_2, z_3 \in G \subset \mathbb{C} \text{ sowie } \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \notin \mathbb{R}$$

(liegen nicht auf einer Geraden). $\triangle$ sei das abgeschlossene Dreieck mit Eckpunkten z_1, z_2, z_3. Wir setzen



$$\partial\triangle = [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup [z_3, z_1].$$

Im allgemeinen Fall sei $\partial\triangle$ im mathematisch positiven Sinn durchlaufen (das Innere des Dreiecks liegt beim Rand-Durchlauf zur Linken).

BEMERKUNG 6.8. *Elementargeometrische Überlegungen liefern:*

(a) $|\partial\triangle| \geq \max\limits_{z,w\in\triangle} |z-w|$

und mit $\triangle'$ als eines von vier kongruenten Teildreiecken von $\triangle$:

(b) $\frac{1}{2}|\partial\triangle| = |\partial\triangle'|$ *(einfach jede Seite halbiert).*

(c) Kongruente Dreiecke haben alle den gleichen Umfang $|\partial\triangle|$
(- und natürlich auch die gleiche Fläche).

DEFINITION 6.5 (konvexe Mengen)**.**
$M \subset \mathbb{C}$ heißt konvexe Menge in $\mathbb{C}$, wenn $\forall z_1, z_2 \in M$ mit $z_1 \neq z_2$ gilt: $[z_1, z_2] \subset M$.

DEFINITION 6.6 (sternförmige Gebiete)**.**
Sei $G \subset \mathbb{C}$. Wir nennen G sternförmig (bezüglich z_o), wenn $\forall z \in G$ mit $z \neq z_o$ gilt:

$$[z_o, z] \subset G \text{ bei } z_o \in G.$$

SATZ 6.9. *Sei G sternförmig bezüglich z_o und KFKV $f: G \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) f besitzt auf G eine komplexwertige Stammfunktion und

(ii) $\forall\triangle \subset G$ mit einem Eckpunkt in z_o gilt:

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz \;=\; 0.$$

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$ Wie in Satz 6.6.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Wir setzen wieder $F(z) = \int_{[z_o,z]} f(\zeta)d\zeta$ und wählen w zunächst so, dass $[z,w] \subset G$. Nun verbinden wir, da G sternförmig bezüglich z_o ist, w mit z_o. Orientierungsbeachtend schreiben wir (vergleiche Beispiel (d) aus Abschnitt 6.1):

$$0 = \int_{[z_o,z,w,z_o]} f(\zeta)d\zeta = F(z) + \int_{[z,w]} f(\zeta)d\zeta - F(w) \quad \text{(Polygonzüge)}$$

und erhalten $F(w) - F(z) = \int_{[z,w]} f(\zeta)d\zeta$. Nun ist die Argumentation völlig analog zu Beweis von Satz 6.6.

□

LEMMA 6.10 (Goursat-Lemma)**.** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $f: G \to \mathbb{C}$ holomorphe KFKV. $\triangle$ sei ein abgeschlossenes Dreieck nach Notation 6.4 mit $\triangle \subset G$. Dann gilt:*

$$\int_{\partial\triangle} f(\zeta)d\zeta = 0.$$

Beweis. Wir erklären eine rekursive Folge von abgeschlossenen Dreiecken:

$$\triangle^{(0)} = \triangle, \quad \triangle^{(1)}_{\alpha_1} := \triangle', \quad \alpha_1 \in \{1,2,3,4\}.$$

Induktiv zerlegen wir jedes $\triangle^{(1)}_{\alpha_1}$ weiter (jeweils in vier kongruente Teildreiecke).
Die Steuergröße der Auswahlmethode erklären wir durch:

$$I(\triangle) := \int_{\partial\triangle} f(\zeta)d\zeta \quad (\forall \triangle \subset G).$$

Bei $0 = k$ wählen wir das $\triangle^{(1)}_{\alpha_1}$, $\alpha_1 \in \{1,2,3,4\}$ mit

$$\max_{\alpha_1 \in \{1,2,3,4\}} |I(\triangle^{(1)}_{\alpha_1})| = |I(\triangle^{(1)})|,$$

der Index ist hier einfach fest (als Index von einem der vier Teildreiecke). Analog erklären wir induktiv:

$$\triangle^{(k+1)} = \triangle^{(k+1)}_{\alpha_{k+1}}: \quad |I(\triangle^{(k+1)})| = \max_{a_{k+1} \in \{1,2,3,4\}} |I(\triangle^{(k+1)}_{\alpha_{k+1}})|.$$

Induktiv haben wir dabei (indem wir die linke Seite als Summe der Integrale über die vier Teildreiecksränder mit der Dreiecksungleichung schreiben):

$$|I(\triangle^{(k)})| \leq 4|I(\triangle^{(k+1)})| \tag{$*$}$$

Nach dem Prinzip der Intervallschachtelung $\exists z_o \in \bigcap_{k=0}^{\infty} \triangle^{(k)} \subset G$. Die Differenzierbarkeit von f (auch) in z_o liefert bei $\zeta \in U(z_o)$ (hinreichend klein):

$$f(\zeta) = \underbrace{f(z_o) + f'(z_o)(\zeta - z_o)}_{(\heartsuit)\text{ Stammfunktion existiert}} + \eta(\zeta)(\zeta - z_o), \quad \text{bei } \lim_{\zeta \to z_o} \eta(\zeta) = 0, \tag{$\circ$}$$

beziehungsweise $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:$

$$|\eta(\zeta)| \leq \varepsilon \quad \forall \zeta \in K(z_o, \delta),$$

sowie (vergleiche Wahl von z_o) $\exists k = k_o(\delta): \ \triangle^{(k)} \subset K(z_o, \delta)$, $\forall k \geq k_o(\delta):$

$$\begin{aligned}
I(\triangle^{(k)}) &= \int_{\partial\triangle^{(k)}} f(\zeta)d\zeta \\
&\overset{(\circ)}{=} \underbrace{\int_{\partial\triangle^{(k)}} f(z_o)d\zeta + \int_{\partial\triangle^{(k)}} f'(z_o)(\zeta - z_o)d\zeta}_{=\,0,\text{ Stammfunktion existiert }(\heartsuit)\text{ und geschlossener Weg}} + \int_{\partial\triangle^{(k)}} \eta(\zeta)(\zeta - z_o)d\zeta \\
&= \int_{\partial\triangle^{(k)}} \eta(\zeta)(\zeta - z_o)d\zeta.
\end{aligned}$$

Nun wählen wir $k \geq k_o(\delta(\varepsilon))$ (damit $\triangle^k \subset K(z_o, \delta)$ und $|\eta(\zeta)| \leq \varepsilon$).
Das heißt mit $|\zeta - z_o| \leq |\partial\triangle^{(k)}|$ (Bemerkung 6.8 (a)) und Bemerkung 6.2 (v) gilt:

$$\forall k \geq k_o(\delta): \quad |I(\triangle^{(k)})| \leq \varepsilon |\partial\triangle^{(k)}|^2.$$

Diese Ungleichung nutzen wir nun einfach für die Abschätzung von $\int_{\partial\triangle} f(z)dz = \int_{\partial\triangle^{(0)}} f(z)dz$:

$$|\int_{\partial\triangle^{(0)}} f(z)dz| = |I(\triangle^{(0)})| \overset{(*)}{\leq} 4^k |I(\triangle^{(k)})| \;\leq\; 4^k \varepsilon |\partial\triangle^{(k)}|^2 \;=$$

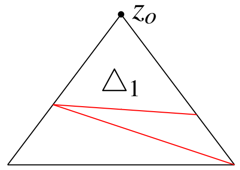
$$\overset{\text{Bem. 6.8 (b)}}{=} \varepsilon 4^k \left(\frac{|\partial\triangle^{(0)}|}{2^k}\right)^2 \;=\; \varepsilon|\partial\triangle^{(0)}|^2.$$

Da ε beliebig, folgt $\int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0$. □

FOLGERUNG 6.11. *Lemma 6.10 gilt auch bei abgeschwächten Vorraussetzungen:*
f sei nur stetig auf G und f holomorph in $G\setminus\{z_o\}$, $z_o \in G$.
Dann gilt $\forall\triangle \in G$ mit z_o Eckpunkt von $\triangle$:

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0.$$

Beweis. Wir zerlegen $\triangle$ in drei Teildreiecke (alle mathematisch positiv durchlaufen).



$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = \underbrace{\sum_{j=2}^{3} \int_{\partial\triangle_j} f(z)dz}_{=0 \text{ (nach Lemma 6.10)}} + \int_{\partial\triangle_1} f(z)dz$$

$$\text{und} \quad \left|\int_{\partial\triangle} f(z)dz\right| \leq |\partial\triangle_1| \cdot \max_{z\in\triangle_1} |f(z)|,$$

$|\partial\triangle_1| \to 0$ (können wir beliebig klein machen).

□

FOLGERUNG 6.12. *Sei G sternförmig mit $G \subset \mathbb{C}$. Dann besitzt jede (auf G) holomorphe Funktion $f: G \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Stammfunktion.*

Beweis. Lemma 6.10 und Satz 6.9. □

FOLGERUNG 6.13 (Cauchyscher Integralsatz in sternförmigen Gebieten)**.**
Sei $f: G \to \mathbb{C}$, G sternförmig und f holomorph in G.
Dann gilt $\forall\gamma \subset G$, γ geschlossen und stückweise glatt, dass

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Beweis. Folgerung 6.12 und Satz 6.6. □

FOLGERUNG 6.14. *Sei G sternförmig bezüglich $z_o \in G$.*
Die in G stetige KFKV $f: G \to \mathbb{C}$ sei in $G\setminus\{z_o\}$ holomorph.
Dann hat KFKV f eine komplexe Stammfunktion.

Beweis. Folgerung 6.11 und Satz 6.9. □

7 Cauchysche Integralformel, Potenzreihen und Differenzierbarkeitseigenschaften holomorpher Funktionen

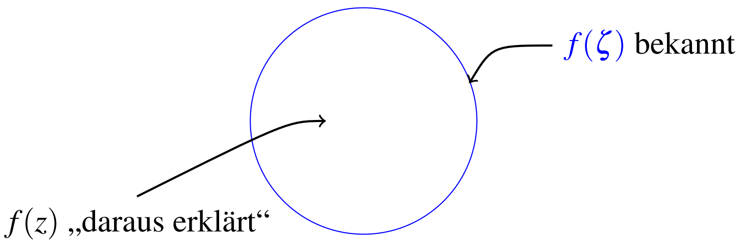
7.1 Cauchysche Integralformel und deren erste Verallgemeinerungen

Bedeutung: Holomorphe Funktionen f sind schon durch Vorgabe ihrer Werte auf der Kreisperipherie $S(z_o,r)$ in ganz $K(z_o,r)$ und damit auf ganz $\overline{K}(z_o,r)$ wohldefiniert.

SATZ 7.1 (Cauchysche Integralformel)**.** *$f: G \to \mathbb{C}$ sei in G holomorph, G offen. Zudem sei für $z_o \in G$ bei $r > 0$ (entsprechend gewählt) $\overline{K}(z_o,r) \subset G$. Dann gilt $\forall z \in K(z_o,r)$:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_o,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Idee:



Beweis. Wir halten $z \in K(z_o,r)$ fest und erklären die Hilfsfunktion $g: G \to \mathbb{C}$ durch

$$g(\zeta) := \begin{cases} f'(z) & \text{bei } \zeta = z \\ \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & \text{sonst } (\zeta \in G,\ z \neq \zeta) \end{cases}.$$

Die Hilfsfunktion g ist offensichtlich in $G \setminus \{z\}$ holomorph und in ganz G stetig.
Anwendung von Folgerung 6.14 mit z als Punkt und $\underset{(\hat{=} G \text{ in Folg. } 6.14)}{K(z_o,r_1)} \subset G$ bei $r < r_1$ liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{S(z_o,r)} g(\zeta) d\zeta = \int_{S(z_o,r)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_{S(z_o,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{S(z_o,r)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_{S(z_o,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \cdot \underbrace{2\pi i}_{\text{vgl. Anm.6.5}} \end{aligned}$$

□

FOLGERUNG 7.2 (Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen)**.**
Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, f holomorph in G sowie $\overline{K}(z_o,r) \subset G$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_o + re^{it}) dt = f(z_o).$$

Beweis. Wir nutzen Satz 7.1 mit $z = z_o$, also $\zeta = z_o + re^{it}$. Damit erhalten wir:

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S(z_o,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_o} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\overbrace{z_o + re^{it}}^{\zeta})}{re^{it}}(ire^{it})dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_o + re^{it})dt.$$

□

SATZ 7.3. *$G \subset \mathbb{C}$ sei ein beschränktes Gebiet (also offen), dessen Rand $\partial G = \bigcup_{j=1}^N \gamma_j$ aus endlich vielen glatten Kurvenstücken besteht. Die $\gamma_j,\ j = 1,\dots,N$, haben paarweise keine gemeinsamen inneren Punkte. Die ersten $\gamma_j,\ j = 1,\dots,\ell \le N$ seien keine Schlitzkurven und so orientiert, dass G beim Durchlauf zur „Linken“ liegt (mathematisch positiv). Weiter sei $f:\ \tilde{G} \to \mathbb{C}$ (KFKV) bei $\tilde{G} \supset \overline{G}$ in $\overline{G}$ total differenzierbar.(d.h. $\mathrm{Re} f \in \mathbb{C}^1(\overline{G})$ und $\mathrm{Im} f \in \mathbb{C}^1(\overline{G})$)*
Dann gilt $\forall z \in G$ bei $z = \xi + i\eta$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{\ell}\int_{\gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi}\int_G \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\frac{\overbrace{dG}^{d\xi d\eta}}{\zeta - z}.$$

Beweis. Wir wählen r so, dass $\overline{K}(z,r) \subset G$ und wenden den Gaußschen Integralsatz auf G_1 mit $G_1 := G \setminus \overline{K}(z,r)$ an (auch Stokescher Integralsatz der Ebene genannt), $\underline{w} \in \underline{\mathbb{C}}^1(\overline{G_1})$:

$$\int_{G\setminus\overline{K}(z,r)} \left[\frac{\partial w_2}{\partial \xi} - \frac{\partial w_1}{\partial \eta}\right] d\xi d\eta = \sum_{j=1}^{\ell}\int_{\gamma_j \tilde{=} \underline{\Gamma}_j} \underline{w}^T \underline{\tau}\, ds - \int_{S(z,r)} \underline{w}^T \underline{\tau}\, ds$$

und erklären die wohldefinierte Funktion

$$g(\zeta) = u(\zeta) + iv(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \quad \forall \zeta \in G_1 = G \setminus \overline{K}(z,r) \quad .$$

Wir arbeiten ganz analog zur „Erinnerung an den $\mathbb{E}^2$“ in 6.1 und setzen zunächst

$$\underline{w} = \begin{bmatrix} -u \\ v \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathrm{rot}\,\underline{w} = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\right) = -2\,\mathrm{Im}\frac{\partial g}{\partial \overline{\zeta}},$$

beziehungsweise

$$\underline{w} = \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathrm{rot}\,\underline{w} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta} = 2\,\mathrm{Re}\frac{\partial g}{\partial \overline{\zeta}}.$$

(Hier haben wir skalare Rotationen.) Wir nutzen den kleinen Trick:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}\frac{1}{(\zeta - z)} = 0 \quad (\text{da } (\zeta - z)^{-1} \text{ in } G_1 \text{ holomorph}),$$

und erhalten nach der Produktregel: $$\frac{\partial g}{\partial \overline{\zeta}} = \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}\frac{1}{(\zeta - z)} \quad .$$

Beachten von Definition 3.4 liefert:

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\right]$$

$$\Rightarrow 2i\int_{G_1} \underbrace{\frac{\partial g}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)}_{\frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}\frac{1}{(\zeta - z)}} d\xi d\eta = \sum_{j=1}^{\ell}\int_{\gamma_j} g(\zeta)d\zeta - \int_{S(z,r)} g(\zeta)d\zeta.$$

Da $f \in \mathbb{C}^1_{\mathbb{K}}(\overline{G}) \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\right| \leq M \ \forall \zeta \in G$ (hier mit Körper $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), erhält man mit $\rho = |\zeta - z|$:

$$\lim_{r\to 0}\left|\int_{\overline{K}(z,r)} \frac{\partial g}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)d\zeta d\eta\right| \overset{\text{Polarkoordinaten}}{\leq} \lim_{r\to 0}\left(M \cdot \underbrace{\int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\varphi d\rho}{\rho}}_{=2\pi r}\right) = 0.$$

Beachten hier immer bei $r \to 0$ den Start mit $G_1 = G \setminus \overline{K}(z,r)$.
Andererseits erhält man (wie in Abschnitt 3.2) wieder standardmäßig:

$$f(\zeta) = f(z) + \frac{\partial f}{\partial \zeta}(z)\cdot(\zeta - z) + \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}(z)\cdot\overline{(\zeta - z)} + \mathfrak{R}(z, \zeta - z)$$

Benutzen wir wieder $\mathfrak{R}(\cdot) = \mathscr{o}(|\zeta - z|) = \sigma(\zeta)\cdot|\zeta - z|$, so folgt:

$$\int_{S(z,r)} g(\zeta)d\zeta = f(z)\underbrace{\int_{S(z,r)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}}_{=2\pi i} + \frac{\partial f}{\partial \zeta}(z)\underbrace{\int_{S(z,r)} 1 d\zeta}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}(z)\underbrace{\int_{S(z,r)} \frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z}d\zeta}_{|Int1|\leq 2\pi r} + \underbrace{\int_{S(z,r)} \frac{\sigma(\zeta)|\zeta - z|}{\zeta - z}d\zeta}_{|Int2|\leq 2\pi r \sup_{\zeta\in S(z,r)}|\sigma(\zeta)|}.$$

Für die Abschätzung der Beträge der Integrale nutzen wir hier die Bemerkung 6.2 (v) :

$$\begin{aligned}
|Int1| &= \left|\int_{S(z,r)} \frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z}d\zeta\right| \leq \left|\int_{S(z,r)} |e^{-2it}|d\zeta\right| = 2\pi r \quad \text{und} \\
|Int2| &= \left|\int_{S(z,r)} \frac{\sigma(\zeta)|\zeta - z|}{\zeta - z}d\zeta\right| \leq 2\pi r \sup_{\zeta\in S(z,r)} |\sigma(\zeta)|.
\end{aligned}$$

Die Behauptung von Satz 7.3 erhalten wr nun einfach mit oben bei dem Grenzübergang
$r \to 0$. □

FOLGERUNG 7.4. *G und ∂G seien wie in Satz 7.3 . Ist die Funktion f holomorph in G, so liefert Satz 7.3 wegen*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}} = 0$$

eine Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{\ell}\int_{\gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Beweis. Seien $\partial G, G$ wie in Satz 7.3 und $g = u + iv$ mit wieder $g(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$:

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{\zeta}} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right]}_{= \operatorname{rot}\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}} + i \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\right]}_{= \operatorname{rot}\begin{bmatrix} -u \\ v \end{bmatrix}}\right)$$

$$\operatorname{rot}_{(\xi,\eta)}\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta} \overset{\text{formal}}{\cong} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \\ v & u & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{sowie}$$

$$\operatorname{rot}_{(\xi,\eta)}\begin{bmatrix} -u \\ v \end{bmatrix} = \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \overset{\text{formal}}{\cong} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \\ -u & v & 0 \end{vmatrix}.$$

Zwischenschritt:

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{\zeta}} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{rot}\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} + i \operatorname{rot}\begin{bmatrix} -u \\ v \end{bmatrix}\right).$$

Damit folgt:

$$2i \frac{\partial g}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta) = i \operatorname{rot}\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} - \operatorname{rot}\begin{bmatrix} -u \\ v \end{bmatrix}.$$

Einsetzen in das Integral liefert nun schließlich:

$$\begin{aligned}
2i \int_{G_1} \frac{\partial g}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta) d\xi d\eta &= \int_{G_1} \left(\operatorname{rot}\begin{bmatrix} u \\ -v \end{bmatrix} + i \operatorname{rot}\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}\right) d\xi d\eta \\
&= \int_{\partial G_1} \left[\begin{bmatrix} u \\ -v \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} \dot{\Gamma}_1(t) \\ \dot{\Gamma}_2(t) \end{pmatrix} + i \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} \dot{\Gamma}_1(t) \\ \dot{\Gamma}_2(t) \end{pmatrix}\right] \frac{1}{\|\dot{\Gamma}(t)\|} ds \\
&= \int_{\partial G_1} (u\dot{\Gamma}_1(t) - v\dot{\Gamma}_2(t)) + i(v\dot{\Gamma}_1(t) + u\dot{\Gamma}_2(t)) \frac{1}{\|\dot{\Gamma}(t)\|} ds \\
&\overset{\text{vgl. Def.}}{=} \int_{\gamma = \partial G_1} g(\zeta) d\zeta = \int_{\tilde{\gamma} = \partial G} g(\zeta) d\zeta - 2\pi i f(z).
\end{aligned}$$

Dabei beachten wir wieder, dass $\frac{\partial g}{\partial \overline{\zeta}} = \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta) \frac{1}{\zeta - z}$ gilt, weil $\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}\left(\frac{1}{\zeta - z}\right) = 0$ $(z \neq \zeta)$ war, und erhalten:

$$\begin{aligned}
2\pi i f(z) &= \int_{\hat{\gamma} = \partial G} g(\zeta) d\zeta - 2i \int_G \frac{\partial g}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta) d\xi d\eta \\
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{\gamma} = \partial G} g(\zeta) d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_G \frac{\partial g}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta) d\xi d\eta \\
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{\ell} \int_{\gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.
\end{aligned}$$

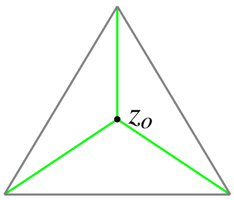
□

SATZ 7.5. *Seien $G \subset \mathbb{C}$ offen und die KFKV f bei $f: \; G \to \mathbb{C}$ holomorph in G.*
Dann gilt $f \in C^\infty(G)$ (im Sinne totaler Differenzierbarkeit).

Beweis. Weil G offen, $\exists \overline{K}(z_o, r) \subset G$, sowie Dreieck $\triangle \subset G$ mit $z_o \in \mathring{\triangle}$ (innerer Punkt).

$$\text{Wir setzen } \forall z \in G: \; g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o} & \text{bei } z \neq z_o, \\ f'(z_o) & \text{bei } z = z_o. \end{cases}$$

Die Funktion g ist stetig in G und holomorph in $G \setminus \{z_o\}$. Wir wenden dreimal Folgerung 6.11 an.



z_o ist innerer Punkt: $\displaystyle\int_{\partial\triangle} g(\zeta)d\zeta = 0$

(nur aufgespalten, jedes Teildreieck hat z_o als Eckpunkt).
Wir schreiben das Integral nun explizit und erhalten:

$$f(z_o) \cdot \underbrace{\int_{\partial\triangle} \frac{d\zeta}{\zeta - z_o}}_{=2\pi i, \text{ Satz 7.3 mit } \tilde{f}(z)=1} = \int_{\partial\triangle} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_o} d\zeta$$

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\triangle} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_o} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\triangle} \frac{f(\zeta)}{\zeta - (x_o + iy_o)} d\zeta.$$

Damit ist die rechte Seite ein Parameterintegral und somit beliebig oft differenzierbar nach x_o und y_o. Stetigkeitsargumente liefern, dass dies auch für $U(z_o) \subset \mathring{\triangle}$ gilt.
Alle Ableitungen (unter dem Integral) sind dabei stetig in $\partial\triangle \times U$. □

FOLGERUNG 7.6 (k-te Ableitungen holomorpher Funktionen)**.**
Bezeichnen $f^{(k)}$ die k-te Ableitung von f (KFKV) im komplexen Sinne ($k \in \mathbb{N}_o$), dann liefert Satz 7.5 das Ergebnis:
Ist f in $G \subset \mathbb{C}_o$ holomorph (G Gebiet), dann existieren alle $f^{(k)}$ $\forall k \in \mathbb{N}$
(d.h. f ist im komplexen Sinne beliebig oft differenzierbar) und die $f^{(k)}$ sind auf G holomorph.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $f^{(1)}(z) = f'(z)$ in G holomorph ist.
Zunächst sei $z_o \in G \setminus \{\infty\}$. Dann haben wir, da f holomorph in G (wieder mit $f = u + iv$):

$$f'(z_o) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o).$$

Nach Satz 7.5 haben wir: $u, v \in C^\infty(G \setminus \{\infty\})$. Differenzieren wir die Cauchy-Riemannschen DGL nach x, so erhalten wir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}() = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} f' = \underset{\text{Satz von Schwarz}}{\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}()} = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} f'$$

$$\text{sowie} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}() = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} f' = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x}() = -\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} f',$$

das heißt, die Cauchy-Riemannschen DGL sind für $\operatorname{Re} f'$ und $\operatorname{Im} f'$ erfüllt. Da der Punkt $[x_o, y_o]^T$ beliebig war, das heißt hier $z_o = x_o + iy_o \in G$ beliebig $\Rightarrow$ f' holomorph (differenzierbar in Umgebung).
Bei $z_o = \infty \in G$ folgt analog zu oben:
$(f \circ T)'$ ist in $z = 0$ holomorph. Anwendung der Kettenregel liefert:

$$(f' \circ T)(z) = -z^2 (f \circ T)'(z) \text{ ist in } z_o \text{ holomorph,}$$

also ist f' in z_o holomorph. □

SATZ 7.7 (Cauchyscher Integralsatz in Randform)**.**
Es sei G ein Gebiet, $G \subset \mathbb{C}$ (wie in Satz 7.3) und $f: \tilde{G} \to \mathbb{C}$ sei auf $\overline{G} \subset \tilde{G}$ holomorph.
Dann gilt:

$$\sum_{j=1}^{\ell} \int_{\gamma_j} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

(Die γ_j sind hier wieder keine Schlitzkurven.)

Beweis. Wir wählen $z \in G$ beliebig und wenden Folgerung 7.4 auf die Funktion $\tilde{f}$ mit $\tilde{f}(\zeta) := f(\zeta)(\zeta - z)$ an. Dann ist offenbar:

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}(z) \int_{S(z,r)} 1 d\zeta = 0 \quad \text{bei} \quad f(\zeta) = \frac{\tilde{f}(\zeta)}{(\zeta - z)}$$

□

BEMERKUNG 7.8. *Satz 7.7 kann man unter schwächeren Vorraussetzungen formulieren.*
Es reicht hier sogar: f stetig auf $\overline{G}$ und holomorph in G.

FOLGERUNG 7.9. *Mit Folgerung 6.12 erhält man:*
Ist G sternförmig, $G \subset \mathbb{C}$ und f in G holomorph, dann existiert eine holomorphe komplexwertige Stammfunktion F von f und mit f ist auch F in G unendlich oft (im komplexen Sinne) differenzierbar. Dabei sind alle Ableitungen beliebiger Ordnung von f bzw. F holomorph in G.

Beweis. Analog zu Folgerung 7.6. □

7.2 Lokale Darstellung holomorpher Funktionen durch Potenzreihen

Wie in Kapitel 5.1 sei $\mathscr{P}(z, z_o) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_o)^j$ mit Konvergenzradius $\rho_{\mathscr{P}} = (\overline{\lim_{j \to \infty}} \sqrt[j]{|a_j|})^{-1} > 0$.

Mit Satz 7.5 und Folgerung 7.4 wissen wir im Taylor-Sinne:

(a) Mit f sind auch alle Ableitungen $f^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$; von f holomorph, sowie

(b) die Ableitungen $f^{(k)}$ kann man über Parameterintegrale (z.B. mit der Cauchyscher Integralformel) berechnen.

SATZ 7.10 (Entwicklung holomorpher Funktionen in Potenzreihen). *Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_o \in G$ und $K(z_o, r) \subset G$.*
Dann existiert eine Potenzreihe $\mathscr{P}(z, z_o)$ mit Konvergenzradius $\rho_{\mathscr{P}} = r$, so dass gilt:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_o)^j, \quad \textit{wobei } \forall \rho:\ 0 < \rho < r.$$

Die a_j können berechnet werden durch:

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_o,\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{j+1}} d\zeta.$$

Beweis. (Vergleiche Anmerkung vor Satz 6.6)
Bei $0 < \tilde{\rho} < \rho < r$ und $|z - z_o| \leq \tilde{\rho}$ betrachten wir wieder, bei $\zeta \in S(z_o, \tilde{\rho})$:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z - z_o)^j}{(\zeta - z_o)^{j+1}} \quad \text{(gleichmäßig konvergent als geometrische Reihe).}$$

Einsetzen dieser Reihe in die Cauchysche Integralformel für Kreisperipherie nach Satz 7.1 liefert:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_o,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\int_{S(z_o,\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_o)^{j+1}} d\zeta \right] (z - z_o)^j.$$

Die Koeffizienten sind eindeutig bestimmt. Die Grenzübergänge $\tilde{\rho} \to \rho$ sowie $\rho \to r$ liefern die Behauptung, also lokal gleichmäßige Konvergenz in $K(z_o, r)$ (Konvergenzradius). □

BEMERKUNG 7.11. *Analog kann man die a_j durch einfache Differentiation von*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_o,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z)$$

nach z als die üblichen und wohlbekannten Taylor-Entwicklungs-Koeffizienten ausrechnen.

FOLGERUNG 7.12 (Potenzreihe im Entwicklungspunkt $z_o = \infty$).
Auch Potenzreihen um ∞ können wir sachgemäß erklären.
Dazu seien $f: G \to \mathbb{C}$ (KFKV), G ein Gebiet mit $\infty \in G$ und f holomorph in G.
Mit $\overline{K}(0,R)$ bezeichnen wir den „kleinsten“ Kreis, so dass $\mathbb{C}_o \setminus \overline{K}(0,R) \subset G$.

$$\textit{Dann gilt:} \quad \forall z \in \mathbb{C}_o \setminus \overline{K}(0,R): \quad f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \cdot (f \circ T)^j(0) \cdot z^{-j} =: \mathscr{P}(z, \infty).$$

Die umgeschriebene Reihe

$$\mathfrak{Q}(w, 0) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (f \circ T)^j (w - 0)^j$$

hat den Konvergenzradius $r_{\mathfrak{Q}} \geq \dfrac{1}{R}$.

Beweis. Satz 7.10 mit der Funktion $f \circ T$ in $K(0, \frac{1}{R})$. □

BEMERKUNG 7.13 (Cauchy-Abschätzung)**.**
Für die Koeffizienten der Potenzreihe aus Satz 7.10 gilt die Standardabschätzung

$$\forall j \in \mathbb{N}_o: \ |a_j| \leq \frac{1}{r^j} \max_{\zeta \in S(z_o,r)} |f(\zeta)| = \frac{1}{r^j} M(r),$$

denn wir haben: $$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_o,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_o)^{j+1}} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\max_{\zeta \in S(z_o,r)} |f(\zeta)|}{r^{j+1}} \cdot 2\pi r = \frac{1}{r^j} M(r).$$

BEMERKUNG 7.14. *Der Identitätssatz für Potenzreihen liefert:*
Die Darstellung der holomorphen Funktion durch $\mathscr{P}(z,z_o)$, beziehungsweise $\mathscr{P}(z,\infty)$ ist eindeutig. Das heißt, alle Koeffizienten sind durch die holomorphe Funktion $f(z)$ in eineindeutiger Weise bestimmt. (Hier sind die Entwicklungsstellen immer fix!)

DEFINITION 7.1 (Nullstellenordnung)**.**
Es sei eine Potenzreihe einer holomorphen Funktion $\mathscr{P}(z,z_o) = f(z)$ vorgegeben.
Wir nennen z_o eine Nullstelle der Ordnung k, wenn für $\mathscr{P}(z,z_o) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_o)^j$, beziehungsweise $\mathscr{P}(z,z_o = \infty) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{-j}$

$$k = \min\{j \in \mathbb{N}_o: \ a_j \neq 0\} \quad \textit{gilt.}$$

(Es sind hier natürlich auch Nullstellen 0-ter Ordnung zugelassen).

DEFINITION 7.2 (diskrete Teilmenge)**.** *Es sei $M \subset (\mathbb{C}_o, \chi)$. Wir nennen M diskrete Teilmenge von $(\mathbb{C}_o, \chi)$, wenn $\forall z \in M \ \exists U \in \tau_o: \ M \cap U = \{z\}$.*

ANMERKUNG 7.15. *Häufungspunkt von einer diskrete Teilmenge M kann nur (höchstens) $z_o = \infty$ sein. Diskrete Teilmengen werden wir nutzen, um jeweils Nullstellen und sogenannte isolierte singuläre Stellen gesondert (lokal) zu betrachten.*

BEMERKUNG 7.16 (Prinzip isolierter Nullstellen)**.** *Es sei $f: \ G \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_o \in G$ mit $\overline{K}(z_o,r) \subset G$ $(r > 0)$, $f(z_o) = a_o = 0$.*
Gilt $f\big|_{K(z_o,r)} \neq 0$, dann existiert $U(z_o) \subset G$, so dass

$$\forall z \in U(z_o) \setminus \{z_o\}: \quad f(z) \neq 0. \quad \textit{gilt.}$$

Beweis. Wir schreiben

$$f(z) = \mathscr{P}(z,z_o) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_o)^j.$$

Wären alle $a_j = 0 \ \forall j \in \mathbb{N}_o$, dann wäre $f(z) \equiv 0$ bei $z \in K(z_o,r)$ (z_o ist in diesem Falle eine Nullstelle der Ordnung ∞).

Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Voraussetzung, das heißt $\exists k < \infty$ als Ordnung der Nullstelle z_o und

$$f(z) = \sum_{j=k}^{\infty} a_j (z-z_o)^j = (z-z_o)^k \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} a_{k+j}(z-z_o)^j}_{=:\mathfrak{Q}(z,z_o),\text{ mit } \mathfrak{Q}(z_o,z_o)\neq 0}$$

$\Rightarrow$ Der Standardtrick $g(z) := \mathfrak{Q}(z,z_o),\ g(z_o) \neq 0$ liefert die Behauptung. □

BEMERKUNG 7.17 (Verallgemeinerte Cauchysche Abschätzung)**.** *(Vergleiche Bemerkung 7.13.)*
Wir betrachten die holomorphe Funktion $f:\ G \to \mathbb{C}$, $\overline{K}(z_o,r) \subset G$, $r > 0$.
Dann gilt für $z \in K(z_o,r)$ mit $M(r) := \max\limits_{\zeta \in S(z_o,r)} |f(\zeta)|$:

$$|f^{(j)}(z)| \leq j! \frac{r \cdot M(r)}{(r - |z-z_o|)^{j+1}} \quad \forall j \in \mathbb{N}_o.$$

Beweis.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_o,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{(Cauchy-Formel)},$$

das heißt

$$f^{(j)}(z) = \frac{j!}{2\pi i} \int_{S(z_o,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{j+1}} d\zeta = \frac{j!}{2\pi i} \int_{S(z_o,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_o - (z-z_o))^{j+1}} d\zeta.$$

Mit der Standardabschätzung aus Bemerkung 6.2 (v) folgt:

$$|f^{(j)}(z)| \leq j! \frac{2\pi r}{2\pi} \frac{M(r)}{(r - |z-z_o|)^{j+1}}.$$

□

8 Grundeigenschaften holomorpher Funktionen

8.1 Satz von Liouville, Identitätssatz

SATZ 8.1 (Satz von Liouville)**.**
Jede auf $\mathbb{C}$ holomorphe und beschränkte Funktion $f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist konstant.

Beweis. Weil f beschränkt ist, existiert eine Zahl M mit $0 < M < \infty$ und $|f(z)| \leq M\ \forall z \in \mathbb{C}$.
Wir betrachten $f(z)$ im Sinne von

$$f(z) = \mathscr{P}(z,0) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-0)^j.$$

Radienunabhängig kann man für lokal gleichmäßig konvergente Potenzreihen $M(r) = M$ setzen.
Mit Bemerkung 7.13 gilt:

$$|a_j| \leq \frac{M}{r^j},$$

das heißt bei $j \in \mathbb{N}$ und $r \to \infty:\ a_j = 0\ \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow\ f(z) = a_o.$

□

SATZ 8.2 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Ein komplexes Polynom N-ten Grades, $N \in \mathbb{N}$:*

$$P_N(z,z_o) = \sum_{j=0}^{N} a_j (z-z_o)^j$$

hat genau N (komplexwertige und in Vielfachheit gezählte) Nullstellen.

Beweis. (Rekursiv)
Wir zeigen: $P_N(z,0) = \sum_{j=0}^{N} \tilde{a}_j z^j$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$, wobei hier $P_N(z,0): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
Wäre $P_N(z,0) \neq 0 \; \forall z \in \mathbb{C}$, dann wäre auch die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{P_N(z,0)}, \quad f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

holomorph. Wir schreiben dies betragsmäßig in der Form

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^N|} \frac{1}{\left|\sum_{j=0}^{N} \tilde{a}_j \frac{z^j}{z^N}\right|}$$

$$\text{mit } \lim_{|z| \to \infty} \frac{1}{|z^N|} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{|z| \to \infty} \left| \sum_{j=1}^{N} \tilde{a}_j \frac{z^j}{z^N} \right| = |\tilde{a_N}|,$$

das heißt: hier wäre $|f(z)| \leq M$, also beschränkt. Nach Satz 8.1 wäre $f(z) = \text{const}$, dies ist ein Widerspruch zum Polynomgrad bei $N \geq 1$. Somit ist die Annahme falsch und es folgt die Behauptung. □

SATZ 8.3 (Satz von Morera)**.** *Sei $f: G \to \mathbb{C}$ ($G \subset \mathbb{C}_o$) KFKV und in G stetig. Für alle geschlossenen, stückweise glatten Wege γ, zu denen es einen Kreis $K(z_o,r)$ mit :$\gamma \subset K(z_o,r) \subset G$ gibt , sei*

$$\int_\gamma f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Dann ist f in G holomorph.

Beweis. Zunächst sei $z_o \neq \infty$. $\forall z \in K(z_o,r)$ werde die Funktion $F(.)$ erklärt durch:

$$F(z) := \int_{[z_o,z]} f(\zeta) d\zeta.$$

Die komplexe Funktion $F(z)$ ist komplexe Stammfunktion von $f(z)$ und dabei (analog zu Satz 6.6) holomorph in $K(z_o,r)$. Der Rest ergibt sich aus Folgerung 7.6. Hier gilt $F \in C^{(k)}(G)$ im komplexen Sinne $\forall k \in \mathbb{N}$.
Analog: $z_o = \infty \;\Rightarrow\; f \circ T$ ist in sternförmiger Umgebung von $0: \; V(0)$ holomorph nach oben.
Alle Überlegungen resultieren wieder analog aus Folgerung 7.6. □

SATZ 8.4 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen)**.** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph. Es sei $\{z_k\}_{k=0}^{\infty} \subset G$ mit*

$$\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \underset{\mathbb{E}^1_{\mathbb{C}}}{\to} z_o, \text{ wobei } \forall k \in \mathbb{N}: \; z_k \neq z_o \text{ und } \forall k \in \mathbb{N}: \; f(z_k) = 0.$$

Dann gilt $f \equiv 0$ auf G.

Beweis. (Unterraumtopologie-Beweis) Wir setzen

$$G_o := \{z \in G:\ \exists U(z) \subset G:\ f_{\big|U(z)} = 0\}$$

und nutzen das Prinzip der isolierten Nullstellen nach Bemerkung 7.16.
Gemäß der Voraussetzung gilt $z_o \in G_o$, das heißt $G_o \neq \emptyset$ und G_o ist offen (bezüglich G).
Da G zusammenhängend ist, ist alles gezeigt, falls $\overline{G_o}^{\tau_o \cap G} = G_o$ gilt, weil dann $G = G_o$ sein muss.
Wir zeigen, dass

$$\forall \{w_j\}_{j=1}^{\infty} \subset G_o:\ \exists \lim_{j\to\infty} w_j = w_o \in G$$

für die Grenwerte immer $w_o \in G_o$ gilt, was wieder sofort mit Bemerkung 7.16 folgt. Damit gehören alle Häufungspunkte von G_o zu G_o, was heißt: G_o ist abgeschlossen (bezüglich G).
Mit diesem (Abschluss-)Trick ist G_o bezüglich G offen-abgeschlossen, also $G = G_o$. □

ANMERKUNG 8.5. *Satz 8.4 kann man auch einfach so formulieren:*
Hat die Menge der Nullstellen von f einen Häufungspunkt in G, dann gilt $f \equiv 0$ auf G.

SATZ 8.6 (Weierstraßscher Konvergenzsatz). *$f_j:\ G \to \mathbb{C},\ j \in \mathbb{N}$ seien holomorph und $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ konvergiere lokal gleichmäßig (vergleiche Definition 5.1) gegen $f:\ G \to \mathbb{C}$. Dann ist auch f holomorph mit (lokal gleichmäßig konvergenter Ableitung)*

$$\{f_j'\}_{j=1}^{\infty} \to f'.$$

Beweis. Holomorphie von f:

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\partial\triangle} f_j(z)dz = \lim_{j\to\infty} 0 \underset{\text{lokal glm. konv.}}{=} \int_{\partial\triangle} f(z)dz \quad \text{bei } \triangle \subset G.$$

(Auch den Satz von Morera (Satz 8.3) könnten wir analog nutzen).
Wir zeigen noch lokal gleichmäßige Konvergenz der Folge der Ableitungen: Hier ist die Funktion f' zunächst als komplexe Ableitung der holomorphen Funktion f wohldefiniert!
Dazu sei $\overline{K}(z_o,r) \subset G$, für $z \in K(z_o,\frac{r}{2})$ haben wir entsprechend der verallgemeinerte Cauchyschen Abschätzung nach Bemerkung 7.17:

$$\sup_{z\in K(z_o,\frac{r}{2})} |f_j'(z) - f'(z)| \leq \frac{r}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} \max_{\zeta\in S(z_o,r)} \underbrace{|f_j(\zeta) - f(\zeta)|}_{j \text{ hinreichend groß}}$$

und damit eine beliebig kleine „Majorante“. □

DEFINITION 8.1 (lokal gleichmäßige Beschränktheit, lokal gleichgradige Stetigkeit)**.**
Vorgegeben sei die Funktionen-Folge $\{\underline{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$ mit $\underline{f}_k:\ G \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m\ \forall k \in \mathbb{N}$ bei G offen.

*$\{\underline{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$ heißt **lokal gleichmäßig beschränkt**, falls $\forall \underline{x}_o \in G$ eine Umgebung $U(\underline{x}_o) \subset G$ und eine Konstante $M = M(U(\underline{x}_o))$ existieren, so dass $\forall \underline{x} \in U(\underline{x}_o)$:*

$$\|\underline{f}_k(\underline{x})\|_{\mathbb{E}^m} \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \textit{gilt.}$$

*$\{\underline{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$ heißt **lokal gleichgradig stetig**, wenn $\forall \underline{x}_o \in G\ \exists U(\underline{x}_o) \subset G$, so dass $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$, mit dem bei beliebigen $\underline{x}, \underline{x}' \in U(\underline{x}_o)$ mit $\|\underline{x} - \underline{x}'\|_{\mathbb{E}^n} < \delta(\varepsilon)$*

$$\|\underline{f}_k(\underline{x}) - \underline{f}_k(\underline{x}')\|_{\mathbb{E}^m} < \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \textit{gilt.}$$

SATZ 8.7 (Arzela-Ascoli).
$\{\underline{f}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sei eine Funktionen-Folge lokal gleichmäßig beschränkter und lokal gleichgradig stetiger Funktionen (nach Definition 8.1).
Dann existiert eine Teilfolge $\{\underline{f}_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ von $\{\underline{f}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\{\underline{f}_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{\underline{f}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \quad ,$$

die lokal gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion $\underline{f}_o$ konvergiert.

Beweis. Analysis II, vergleiche z.B. Günther, Beyer, Gottwald, Wünsch: Grundkurs Analysis Band 2, Seite 88ff, beziehungsweise 157/158. □

LEMMA 8.8. *Es sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen, $f_k: G \to \mathbb{C}\ \forall k \in \mathbb{N}_o$. Sind die $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig beschränkt, dann sind die $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ auch lokal gleichgradig stetig.*

Beweis. Wir wählen $z_o \in G$ und $r > 0 : \overline{K}(z_o, 2r) \subset G$.
Da $\overline{K}(z_o, 2r)$ kompakt, existiert ein $M > 0$, so dass $\forall k \in \mathbb{N}$, sowie $\forall z \in \overline{K}(z_o, 2r) : |f_k(z)| \leq M$.
Mit der Cauchyschen Integralformel gilt nach Satz 7.1 mit $z', z \in K(z_o, r)$:

$$\left|f_k(z) - f_k(z')\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{S(z_o,2r)}\left(\frac{f_k(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f_k(\zeta)}{\zeta - z'}\right)d\zeta\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{S(z_o,2r)}\frac{f_k(\zeta)\cdot(z'-z)}{(\zeta-z)(\zeta-z')}d\zeta\right| \leq$$
$$\underset{\text{Bem. 7.17}}{\leq} \frac{|z-z'|M(2\pi r\cdot 2)}{2\pi r^2} = \frac{2M}{r}|z-z'| \qquad \text{bei: } |\zeta - z_o| = 2r, \quad |z - z_o| < r\ .$$

□

FOLGERUNG 8.9 (Satz von Montel).
Zu jeder lokal gleichmäßig beschränkten Folge holomorpher Funktionen $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k: G \to \mathbb{C}$ existiert eine Teilfolge $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, welche lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Grenzfunktion $f_o: G \to \mathbb{C}$ konvergiert.

$$\{f_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \underset{U}{\rightrightarrows} f_o$$

Beweis. Kombination von Lemma 8.8 (ginge auch mit gleichmäßig beschränkter Ableitungsfolge), Satz 8.7 und Satz 8.6.

□

8.2 Gebietstreue, Maximumprinzip

SATZ 8.10 (Existenz von Nullstellen).
Sei $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph und $\overline{K}(z_o, r) \subset G$. Gilt

$$|f(z_o)| < \min_{\zeta\in S(z_o,r)} |f(\zeta)|, \quad \textit{so hat } f \textit{ eine Nullstelle in } K(z_o, r).$$

Beweis. Den Beweis führen wir indirekt.
Weil nach Voraussetzung $0 < \min_{\zeta\in S(z_o,r)} |f(\zeta)|$ gilt, hat f keine Nullstellen auf $S(z_o, r)$.

Annahme: ($\circ$) f hat keine Nullstellen in $K(z_o, r)$.
Mit ($\circ$) hat dann die Funktion$f$ keine Nullstellen in $\overline{K}(z_o, r) = K(z_o, r) \cup S(z_o, r)$, woraus folgt, dass die Funktion $g = \dfrac{1}{f}$ wohldefiniert in $U(z_o) \supset \overline{K}(z_o, r)$ ist. Zudem ist die Funktion g auch holomorph in $U(z_o) \supset \overline{K}(z_o, r)$.
Mit Folgerung 7.2 (Mittelwerteigenschaft), angewandt auf g:

$$g(z_o) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_o + re^{it})dt, \quad \text{gilt:}$$

$$\frac{1}{|f(z_o)|} = |g(z_o)| \leq \frac{2\pi}{2\pi} \underbrace{\max_{\zeta \in S(z_o, r)} \left|\frac{1}{f(\zeta)}\right|}_{\text{Primitive Abschätzung}} \Leftrightarrow |f(z_o)| \geq \min_{\zeta \in S(z_o, r)} |f(\zeta)|.$$

Da dies ein Widerspruch zur Voraussetzung von Satz 8.10 ist, war unsere Annahme ($\circ$) falsch und f hat eine Nullstellen in $K(z_o, r)$. □

SATZ 8.11 (Satz von der Gebietstreue)**.**
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Die Funktion $f: G \to \mathbb{C}$ sei holomorph und nicht konstant.
Dann ist $f(G)$ als Bild von G unter f ein Gebiet.

Beweis. Zu zeigen: $f(G) \in \tau_o \cap f(G)$ und hier offen-abgeschlossen (als die einzige offen-abgeschlossene Menge neben $\emptyset$).

($\circ$) Offenheit (halbklassisch): Wir betrachten die Frage:
Existiert $\forall z_o \in G$ ein $\varepsilon > 0$, so dass $K(f(z_o), \varepsilon) \subset f(G)$?
Mit $w: \ |w - f(z_o)| < \delta$ (hinreichend klein) untersuchen wir die Funktion $f_w(z) = f(z) - w$.

Bei $w = f(z_o)$ gilt (mit Satz 8.4): $$0 = |\underbrace{f_{f(z_o)}(z_o)}_{=f(z_o)-f(z_o)}| < \min_{\zeta \in S(z_o, r)} |\underbrace{f(\zeta) - f(z_o)}_{=f_{f(z_o)}(\zeta)}| =: 2\varepsilon.$$

(Hier nutzen wir auch das Prinzip der isolierten Nullstellen nach Bemerkung 7.16!
Ein solcher Radius r muss existieren, man kann sogar sichern, dass r fix aus einem Intervall entnommen werden kann.)
Wir setzen $\varepsilon = \delta$ und betrachten $w \in K(f(z_o), \varepsilon)$:

$$\begin{aligned}\min_{\zeta \in S(z_o, r)} |f_w(\zeta)| &= \min_{\zeta \in S(z_o, r)} |f_w(\zeta) \pm f(z_o)| \\ &\geq \min_{\zeta \in S(z_o, r)} |f(\zeta) - f(z_o)| - |f(z_o) - w| \\ &\geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon > |f(z_o) - w| = |f_w(z_o)|.\end{aligned}$$

Mit Satz 8.10 folgt: $f_w(z)$ hat eine Nullstelle in $K(z_o, \varepsilon)$. Das heißt:

$$\forall w \in K(f(z_o), \varepsilon)\ \exists z \in K(z_o, r): \ f(z) = w,$$

beziehungsweise $K(f(z_o), \varepsilon) \subset f(K(z_o, r)) \subset f(G)$.

($\circ\circ$) Abgeschlossenheit: Sei V Teilmenge von $f(G)$ mit $f(G) \supset V \neq \emptyset$ und zudem offen-abgeschlossen in $\tau_o \cap f(G)$. Die Stetigkeit von f liefert hier $V = f(G)$.

$\square$

SATZ 8.12. *Sei $f:\ G \to \mathbb{C}$ KFKV holomorph, $f \not\equiv \text{const}$, $G \subset \mathbb{C}_o$. Dann gilt für alle $U(z_o)$ mit beliebigem $z_o \in G$:*

$$\exists w \in U(z_o): \quad |f(z_o)| < |f(w)|.$$

Beweis. O.B.d.A. sei $z_o \in G \cap \mathbb{C}$ (ansonsten verwenden wir wieder $f \circ T$), $z_o, U(z_o)$ fest. Wir wählen $K(z_o, r) \subseteq U(z_o)$ und nutzen die Potenzreihen-Entwicklung von f:

$$\forall z \in K(z_o, r): \ f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_o)^j. \quad (\circ)$$

Sei $|z - z_o| = \rho < r$, das heißt $z = z_o + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$. Damit schreiben wir $(\circ)$ als:

$$f(z_o + \rho e^{it}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \rho^j e^{ijt}$$

(absolut und gleichmäßig konvergent). Wegen der Orthogonalität der $\{e^{ikt}\}_{k=0}^{\infty}$ im Sinne des $\mathbb{L}_2(0, 2\pi)$ gilt:

$$(*) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_o + \rho e^{it})|^2 dt \underset{\text{Parsevalsche Gl.}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 \rho^{2j}.$$

Wie beim Satz 8.10: Sei $|f(z)| \leq |f(z_o)|\ \forall z \in K(z_o, r)$, dann gilt:

$$|a_o|^2 = |f(z_o)|^2 \geq \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 \rho^{2j} \ \Rightarrow a_j = 0\ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Aus dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen (Satz 8.4) folgt $f(z) = f(z_o)\ \forall z \in K(z_o, r)$. Dies ist ein Widerspruch, da f nicht lokal konstant ist, also folgt die Behauptung. $\square$

ANMERKUNG 8.13 (Lebesgue-Hardy-Klassen)**.**
Ausdrücke der Gestalt $(*)$ nutzt man bei Beschränktheit des Termes der Form:

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(0 + re^{it})|^2 dt$$

als Normquadrat-Definition von Lebesgue-Hardy-Räume(Klassen) von holomorphen Funktionen auf dem Einheitskreis $K(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

FOLGERUNG 8.14 (Starkes Maximumprinzip)**.** *Sei $G \subset \mathbb{C}_o$ und $f:\ G \to \mathbb{C}$ holomorph. Gibt es ein $z_o \in G$ (und $r > 0$) derart, dass*

$$\forall z \in K(z_o, r) \cap G: \quad |f(z)| \leq |f(z_o)|$$

(beziehungsweise $\forall z \in G \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{K}(0, R))$), dann gilt $f \equiv \text{const}$ (auf G).

Beweis. Folgt sofort aus Satz 8.12. □

FOLGERUNG 8.15 (Schwaches Maximumprinzip)**.** *Sei $G \subset \mathbb{C}_o$, f in G holomorph und stetig auf $\overline{G}^{\tau_o}$ mit $\overline{G}^{\tau_o} \setminus G = \partial G \neq \emptyset$. Dann gilt*

$$\max_{z \in \overline{G}^{\tau_o}} |f(z)| = \max_{z \in \partial G} |f(z)|.$$

($\overline{G}^{\tau_o}$ ist kompakt als abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}_o$.)

Beweis. (i) f ist eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge, d.h. nach Weierstraß wird das Maximum in (bzw. auf) $\overline{G}^{\tau_o}$ angenommen.

(ii) Bei $|f(z_o)| = \max\limits_{z \in \overline{G}^{\tau_o}} |f(z)|$, $z_o \in G \Rightarrow f(z) \equiv \text{const}$.
Damit kann ein (echtes inneres) Maximum: als $z_o \in G$ nicht existieren.

□

Analog formuliert man im Sinne der Idee: $g = \dfrac{1}{f}$:

FOLGERUNG 8.16 (Starkes Minimumprinzip)**.** *Sei $G \subset \mathbb{C}_o$, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Gibt es ein $z_o \in G$ (und $r > 0$, beziehungsweise $R > 0$) derart, dass*

$$\forall z \in K(z_o, r) \cap G : \qquad |f(z)| \geq |f(z_o)|$$

$$\textit{bzw. ganz analog bei } \infty \in G : \quad \forall z \in G \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{K}(0,R)) : |f(z)| \geq |f(z_o = \infty)|,$$

$$\textit{dann gilt:} f(z_o) = 0 \quad \textit{oder} \quad f(z) \equiv \text{const}.$$

FOLGERUNG 8.17 (Schwaches Minimumprinzip)**.**
Sei $G \subset \mathbb{C}_o$, f in G holomorph und stetig auf $\overline{G}^{\tau_o}$, $\partial G \neq \emptyset$. Dann gilt:
f hat in G mindestens eine Nullstelle, oder

$$\min_{z \in \overline{G}^{\tau_o}} |f(z)| = \min_{z \in \partial G} |f(z)|.$$

FOLGERUNG 8.18 (Nullstellenkriterium)**.**
Sei $G \subset \mathbb{C}$, G beschränktes Gebiet, $f : \overline{G}^{\tau_o} \to \mathbb{C}$ stetig und auf G holomorph. Gibt es ein $z_o \in G$ mit

$$|f(z_o)| < \min_{z \in \partial G} |f(z)|,$$

dann hat f eine Nullstelle in G (vergleiche Satz 8.10).

8.3 Das Schwarzsche Lemma und Automorphismen von $K(0,1)$

Erinnerung an 4.2:

$$\underline{\underline{A}}_{\vartheta,w} = \begin{bmatrix} e^{i\vartheta} & -e^{i\vartheta} w \\ -\overline{w} & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{\underline{\underline{A}}}(z) = \frac{e^{i\vartheta}(z-w)}{(-\overline{w}z+1)} \tag{\#}$$

$\vartheta \in [0, 2\pi)$, $w \in K(0,1)$.

NOTATION 8.2. *Wir setzen*

$$\mathrm{Aut}(K(0,1)) := \{f:\ K(0,1) \to K(0,1),\ f \textit{ biholomorph}\}.$$

In Analogie zu Definition 4.8 schreiben wir mit $G = K(0,1)$*:* $\mathrm{Aut}(G)$.

Mit Abschnitt 8.2, Folgerung 8.18 haben wir:
$\forall f \in \mathrm{Aut}(K(0,1))$ existiert $z_o \in K(0,1)$, so dass $f(z_o) = 0$ (oder einfach $0 \in f(K(0,1))$).
Wir konstruieren zu f eine Funktion g_{z_o}:

$$g_{z_o}(z) = \underbrace{\frac{z+z_o}{\overline{z_o}z+1}}_{g_{z_o}(0)=z_o} \quad (w = -z_o,\ \vartheta = 0).$$

Dann ist $f \circ g_{z_o} \in \mathrm{Aut}(K(0,1))$ mit $f \circ g_{z_o}(0) = 0$.

BEMERKUNG 8.19. *Mit den obigen Ausführungen reicht es aus, Automorphismen zu betrachten, die den Kreismittelpunkt fest lassen, also den Punkt* $z_1 = 0$ *als Fixpunkt haben.*

SATZ 8.20 (Schwarzsches Lemma)**.**
Sei $f:\ K(0,1) \to K(0,1)$ *holomorph mit der Fixpunk-Eigenschaft:* $f(0) = 0$*. Dann gilt*

$$|f'(0)| \le 1 \quad \textit{und} \quad \forall z \in K(0,1):\ |f(z)| \le |z|.$$

Gilt hier $|f'(0)| = 1$*, oder für ein* z_o *mit* $0 < |z_o| < 1:\ |f(z_o)| = |z_o|$*,*
dann ist f *eine Drehung, d.h.*

$$\forall z \in K(0,1):\ f(z) = e^{i\vartheta} z\,.$$

Beweis. Wir setzen

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & \text{bei } 0 < |z| < 1, \\ f'(0) & \text{bei } z = 0. \end{cases}$$

Dann ist $g(z)$ holomorph auf $K(0,1)$. Bei $0 < r < 1$ nutzen wir das Schwache Maximumprinzip nach Folgerung 8.15 :

$$\forall z \in \overline{K}(0,r),\ r < 1: \quad |g(z)| \le \max_{z \in S(0,r)} |g(z)| \le \frac{1}{r}$$

(Trivialabschätzung $f(z) < 1,\ |z| = r$).
Bei Grenzübergang $r \to 1$ erhalten wir $\forall z \in K(0,1):\ |g(z)| \le 1$ und daraus $|f(z)| \le |z|$.
Sei nun $|f'(0)| = 1$, oder $\exists z_o:\ 0 < |z_o| < 1:\ |f(z_o)| = |z_o|$, dann ist $|g(z_o)| = |\dfrac{f(z_o)}{z_o}| = 1$, also nimmt $|g|$ sein Maximum in $K(0,1)$ an, das heißt

$$|g(z_o)| = \text{const} = 1 \Rightarrow f(z) = e^{i\vartheta} z.$$

Ist andererseits

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z\to 0} g(z) = g(0),$$

also $|f'(0)| = |g(0)| \le 1$, mit der obigen Argument folgt wie bei $f'(0) = 1$ wieder
$f(z) = e^{i\vartheta} z$. □

SATZ 8.21. *Ist $f \in \mathrm{Aut}(G)$ mit der Fixpunk-Eigenschaft: $f(0) = 0$, dann ist f eine Drehung.*

Beweis. (Mit Satz 8.20.) Es gilt $f^{-1}, f \in \mathrm{Aut}(G)$, sowie $f^{-1}(0) = 0$.
Die Anwendung des Schwarzschen Lemmas auf f, f^{-1} liefert:

$$\forall z \in G = K(0,1): \ |f(z)| \leq |z|, \text{ sowie } \forall w = f(z) \in G: \ |f^{-1}(w)| \leq |w|.$$

Durch Einsetzen ergibt sich: $\forall z \in G: \ |z| \leq |f(z)| \Rightarrow \forall z \in G: |f(z)| = |z|$.
Der Rest folgt wieder aus Satz 8.20. □

FOLGERUNG 8.22. *Jedes $f \in \mathrm{Aut}(G)$ ist eine Möbiustransformation der Gestalt (#).*

Beweis. Satz 8.21 und 8.19 (beziehungsweise Vorbemerkungen). Das heißt

$$\mathrm{Aut}(G = K(0,1)) = \left\{ M_{\underline{\underline{A}}}(z) : \vartheta \in \mathbb{R},\ |w| < 1 \text{ und } \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}_{\vartheta,w} = \begin{bmatrix} e^{i\vartheta} & -e^{i\vartheta} w \\ -\overline{w} & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

□

9 Isolierte singuläre Stellen holomorpher Funktionen und die Laurententwicklung

9.1 Erklärung und Konvergenz der Laurententwicklung

Wir erinnern uns an die diskrete Teilmenge M aus Definition 7.2.

DEFINITION 9.1 (Isolierter singulärer Stellen). *Es sei $G \in \tau_o$, $G \neq \emptyset$, sowie $f: \ G \setminus \{z_o\} \to \mathbb{C}$ holomorph, also $z_o \notin D(f)$. Dann nennen wir z_o eine isolierte singuläre Stelle von f.*

DEFINITION 9.2 (Arten isolierter singulärer Stellen).
z_o sei eine isolierte singuläre Stelle nach Definition 9.1. Wir nennen

(i) z_o hebbar oder eine hebbare isolierte singuläre Stelle der Fkt. f, falls $\exists f^*: \ G \to \mathbb{C}$, holomorph mit $f^* \equiv f$ auf $G \setminus \{z_o\}$. Diese Fortsetzung f^* von f nennt man auch „ergänzte Funktion“.

(ii) z_o Polstelle von f, wenn z_o nicht hebbar ist und ein $N \in \mathbb{N}$ derart existiert, dass die Fkt.

$$g(z) := f(z)(z - z_o)^N \quad \forall z \in G \setminus \{z_o\} \quad , \text{bzw. } g(z) := f(z) z^{-N} \ \forall z \in G \setminus \{\infty\} \text{ bei } z_o = \infty,$$

in z_o eine hebbare isolierte singuläre Stelle hat ($\star$).
Wir nennen $k := \min\{N \in \mathbb{N} \text{ mit } (\star)\}$ die „Ordnung der Polstelle z_o“ von f und setzen hier als Indikator $\mathrm{ord}(f, z_o) := -\min\{N \in \mathbb{N} \text{ mit } (\star)\} = -k$.
Polstellen nennt man auch außerwesentliche isolierte singuläre Stellen.

(iii) z_o wesentliche isolierte singuläre Stelle, falls (i) und (ii) nicht zutreffen.

BEMERKUNG 9.1 (Nullstellen- und Polstellenordnung).
In der Definition 7.1 hatten wir die Nullstellenordnung erklärt. Im Sinne von Definition 9.2 (ii) kann man für die Nullstellenordnung der Nullstelle z_o von f bei
$f(z) = \mathscr{P}(z,z_o) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_o)^j$, *bzw.* $f(z) = \mathscr{P}(z,z_o=\infty) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{-j}$, *auch schreiben:*

$$\operatorname{ord}(f,z_o) := \min\{N \in \mathbb{N}_o : \ a_N \neq 0\}$$

Diese Schreibweise nutzt man später insbesondere beim Satz vom logarithmischen Residuum.

Beispiel 9.1. *Zu*

(i)

$$\frac{z}{z} = f_1(z),\ G = \mathbb{C},\ z_o = 0 \quad f_1^*(z) = 1$$
$$\frac{\sin(z)}{z} = f_2(z),\ G = \mathbb{C},\ z_o = 0 \quad f_2^*(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} z^{2j}$$

(vergleiche Beispiel b) aus 5.2).

(ii) $f_3(z) = \frac{1}{z^2}(e^z - 1),\ G = \mathbb{C},\ z_o = 0,$ *Polstellenordnung* $1,\ \operatorname{ord}(f_3, z_o = 0) = -1$.

(iii) $f_4(z) = \sin\frac{1}{z},\ G = \mathbb{C},\ z_o = 0;$ $\quad f_5(z) = \sin z,\ G = \mathbb{C}_o,\ z_o = \infty.$

BEMERKUNG 9.2. *Sei* $z \neq \zeta$. *Bei* $|z - z_o| < |\zeta - z_o|$ *ist*

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z-z_o)^j}{(\zeta - z_o)^{j+1}}$$

und für $|\zeta - z_o| < |z - z_o|$ *gilt*

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_o)^j}{(z-z_o)^{j+1}}$$

(Trick: geometrische Reihe).

SATZ 9.3. *Es sei*

$$R(z_o, \rho_1, \rho_2) = \{z \in \mathbb{C} : \ \rho_1 < |z - z_o| < \rho_2\} \tag{$*$}$$

ein Annulus (Kreisringgebiet) mit „Mittelpunkt“ $z_o \in \mathbb{C}$ *bei* $0 \le \rho_1 < \rho_2 \le \infty$ *und*
$f : R(z_o, \rho_1, \rho_2) \to \mathbb{C}$ *holomorph.*
Dann gilt $\forall z \in R(z_o, \rho_1, \rho_2)$ *im Sinne lokal gleichmäßiger und absoluter Konvergenz:*

(i)

$$f(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j (z-z_o)^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_o)^j + \sum_{j=-1}^{-\infty} a_j (z-z_o)^j$$
$$\textit{mit } a_j := \frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_o,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_o)^{j+1}} d\zeta \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

(ii) *Die* $\{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ *sind hier unabhängig vom gewählten* $r : \ \rho_1 < r < \rho_2$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Radienunabhängigkeit der Koeffizienten a_j.
Dazu betrachten wir einen Annulus um z_o: $\tilde{R}(z_o, r_1, r_2)$ mit $\rho_1 < r_1 < r_2 < \rho_2$ (o.B.d.A.) (analog zu $(*)$) und $\partial\tilde{R} = S(z_o, r_1) \cup S(z_o, r_2)$.
Da die Integranden in den $a_j\ \forall j \in \mathbb{Z}$ wegen $z_o \notin \partial\tilde{R}$ offensichtlich holomorph sind, folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz in Randform, Satz 7.7, sofort

$$0 = -\int_{S(z_o,r_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_o)^{j+1}} d\zeta + \int_{S(z_o,r_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_o)^{j+1}} d\zeta,$$

damit ist (ii) gezeigt (Radienunabhängigkeit).
Wir arbeiten nun mit der Cauchyschen Integralformel in der Gestalt von

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{S(z_o,r_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{S(z_o,r_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\right),$$

bei $z \in \tilde{R}$, das heißt $r_1 < |z - z_o| < r_2$ (Folgerung 7.4).
Bei $\zeta \in S(z_o, r_2)$ und bei $\zeta \in S(z_o, r_1)$ nutzen wir die Tricks mit geometrischen Reihen nach Bemerkung 9.2. Wir erhalten (wegen der jeweils gleichmäßigen Konvergenz lassen sich Integral und Summe vertauschen):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left(\int_{S(z_o,r_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_o)^{j+1}} d\zeta\right)(z - z_o)^j \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_{S(z_o,r_1)} f(\zeta)(\zeta - z_o)^{j+1} d\zeta\right)\frac{1}{(z - z_o)^j}\right) =: L(z, z_o).$$

Mit von r unabhängigen Koeffizienten ist somit (i) als Darstellung gezeigt.
Einfache Betrachtung der Konvergenzradien liefert:
Mit $f(z) = L_N(z, z_o) + L_H(z, z_o)$ hat

$$L_N(z, z_o) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_o)^j = \mathscr{P}_N(z, z_o)$$

den Konvergenzradius $r_{\mathscr{P}_N} \geq \rho_2$ und

$$L_H(z, z_o) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}\tau^k = \mathscr{P}_H(\tau, 0), \text{ bei } \tau = \frac{1}{(z - z_o)}$$

den Konvergenzradius $r_{\mathscr{P}_H(\tau,0)} \geq \frac{1}{\rho_1}$, das heißt $\frac{1}{r_{\mathscr{P}_H(\tau,0)}} \leq \rho_1 < |z - z_o|$.
Also konvergiert $f(z)$ in $R(z_o, \rho_1, \rho_2)$. Hieraus folgt unmittelbar lokal gleichmäßige Konvergenz und absolute Konvergenz (geometrische Reihe).
Eindeutigkeit der Darstellung: Sei zweite Darstellung gegeben, dann sind die Koeffizienten eindeutig (identisch: $a_j \equiv \tilde{a}_j$ in jedem Index $j \in \mathbb{Z}$). Hier nutzt man einfach Beispiel 6.1 und Bemerkung 6.2 aus 6.1. □

Bei dem obigem Satz 9.3 war $z_o \in \mathbb{C}$ vorausgesetzt worden. Die folgende Bemerkung erklärt das Vorgehen bei $z_0 = \infty$.

BEMERKUNG 9.4 (Laurententwicklung von f in ∞)**.**
Satz 9.3 kann auch auf die Situation angewandt werden, bei der $z_o = \infty$ isolierte singuläre Stelle der in G holomorphen Funktion f ist.
Wir wählen hier ein minimales ρ_1 (als minimalen Radius) so, dass $\mathbb{C} \setminus \overline{K}(0,\rho_1) \subset G$ gilt.
Die Funktion f besitzt dann in $R(0,\rho_1,\infty)$ die Darstellung

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^{-j} + \sum_{j=-1}^{-\infty} b_j z^{-j} \tag{iii}$$
$$\text{mit } b_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(0,r)} f(\zeta)\zeta^{j-1} d\zeta \quad \forall j \in \mathbb{Z} \text{ bei } r > \rho_1.$$

DEFINITION 9.3 (Laurententwicklung von f in der isolierten singulären Stelle z_o, Residuum)**.**
Die Darstellungen (i) und (iii) nennt man die Laurententwicklung von f in der isolierten singulären Stelle $z_o \in \mathbb{C}$, beziehungsweise $z_o = \infty$.
Bei (i) nennt man

$$L_N(z,z_o) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_o)^j$$

und bei (iii)

$$L_N(z,\infty) := \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^{-j},$$

den Nebenteil der Laurententwicklung, sowie

$$L_H(z,z_o) := \sum_{j=-1}^{-\infty} a_j (z-z_o)^j, \text{ beziehungsweise } L_H(z,\infty) := \sum_{j=-1}^{-\infty} b_j z^{-j},$$

den Hauptteil der Laurententwicklung.
Die Koeffizienten $a_{-1} = (\operatorname{Res} f)(z_o)$ im Falle (i) und $-b_1 = (\operatorname{Res} f)(\infty)$ im Falle (iii) nennt man das Residuum von f in z_o, beziehungsweise das Residuum von f in ∞.

ANMERKUNG 9.5. *Bei $z_o = \infty$ wird das Residuum aus dem Nebenteil der Laurententwicklung genommen. Das Vorzeichen erklärt sich durch den Durchlaufsinn auf $S(0,r)$.*

FOLGERUNG 9.6. *Mit der Laurententwicklung kann man sofort anhand der Koeffizienten folgende Aussagen treffen:*

$$\begin{aligned}
z_o \text{ hebbar} \quad &\Leftrightarrow \quad L_H \equiv 0 \text{ (alle Koeffizienten des Hauptteils verschwinden)},\\
z_o \text{ Polstelle} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{Im Hauptteil sind nur endlich viele Koeffizienten von } 0 \text{ verschieden},\\
z_o \text{ wesentlich} \quad &\Leftrightarrow \quad \infty \text{ viele Koeffizienten in } L_H \text{ verschwinden nicht.}
\end{aligned}$$

Für die folgende Betrachtungen fixieren wir nochmals die Ideen zur Nullstellen- und Polstellenordnung aus Bemerkung 9.1. Ziel ist hier eine einheitliche Kenngröße für Nullstellen und Polstellen.

NOTATION 9.4 (ord(f, z_o))**.**
Es sei z_o eine Nullstelle, oder isolierte singuläre Stelle von $f: U(z_o) \setminus \{z_o\} \to \mathbb{C}$.
Wir setzen

(i) $\operatorname{ord}(f, z_o) = N$*, falls*

$$f(z) = \sum_{j=N}^{\infty} a_j (z - z_o)^j \ \forall z \in U(z_o), \quad \textit{bzw. } f(z) = \sum_{j=N}^{\infty} b_j z^{-j} \ \forall z \in U(z_o = \infty).$$

($\operatorname{ord}(f, z_o) = N \in \mathbb{N}_o$ *ist die Nullstellenordnung von z_o, vergleiche Definition 7.1.)*

(ii) $\operatorname{ord}(f, z_o) = 0$*, falls z_o hebbar und $f^*(z_o) \neq 0$,*
sonst, also bei z_o hebbar und $f^*(z_o) = 0$, nach (i) $\operatorname{ord}(f, z_o) := \operatorname{ord}(f^*, z_o)$.

(iii) $\operatorname{ord}(f, z_o) = -N$*, falls z_o Polstelle der Ordnung N (vergleiche Definition 9.2 (ii)).*

SATZ 9.7 (Laurententwicklung von Quotienten holomorpher Funktionen)**.**
Die Funktionen f und g seien in $U(z_o)$ holomorph, $z_o \in \mathbb{C}_o$. z_o sei eine Nullstelle von f der Ordnung N: $\operatorname{ord}(f, z_o) = N \in \mathbb{N}_o$ *und Nullstelle von g der Ordnung M:* $\operatorname{ord}(g, z_o) = M \in \mathbb{N}_o$.
Dann gilt:

(i) Bei $N \geq M = 0$ ist $\dfrac{f}{g}$ in $U(z_o)$ holomorph und hat in z_o eine Nullstelle der Ordnung N:

$$\operatorname{ord}(f, z_o) = \operatorname{ord}(\frac{f}{g}, z_o) = N.$$

(ii) Bei $M > 0$ hat man die Fälle:

(a) $N \geq M > 0 \Rightarrow z_o$ hebbar und $\left(\dfrac{f}{g}\right)^*$ als ergänzende Funktion hat in z_o eine Nullstelle der Ordnung

$$\operatorname{ord}(\left(\frac{f}{g}\right)^*, z_o) = N - M.$$

(b) $N < M \Rightarrow z_o$ Polstelle der Ordnung $M - N$, das heißt

$$\operatorname{ord}(\frac{f}{g}, z_o) = -(M - N) = N - M.$$

Beweis. Folgt aus Division von Potenzreihen und der Cauchyschen Produktformel für Potenzreihen nach Folgerung 5.6 durch direktes Ablesen (wie Polynomdivision, nur „einfacher“).

□

9.2 Weitere Kriterien zur Charakterisierung isolierter singulärer Stellen

DEFINITION 9.5 (Ganze Funktion)**.**
Eine auf ganz $\mathbb{C}$ erklärte und holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nennen wir eine ganze Funktion.

NOTATION 9.6 (Ganze rationale und ganze transzendente Funktion)**.**
f sei eine ganze Funktion, wir nennen f ganze rationale Funktion, falls $f = P_N(z,z_o)$ ein Polynom N-ten Grades ist.
Andernfalls nennen wir f eine ganze transzendente Funktion (z.B. $f(z) = \sin z,\ \exp(z), \ldots$).

SATZ 9.8 (Riemann)**.**
$z_o \in \mathbb{C}_o$ ist genau dann eine hebbare isolierte singuläre Stelle der Funktion f, wenn

$$\exists U(z_o),\ M:\ 0 < M < \infty:\ \forall z \in U(z_o) \setminus \{z_o\} \text{ gilt, dass } |f(z)| \leq M \text{ ist}$$

(f ist in $U(z_o) \setminus \{z_o\}$ beschränkt).

Beweis. Sei $z_o \in \mathbb{C}$ hebbar. Wir setzen $\tilde{U}(z_o) = \overline{K}(z_o, r)$ ($\tilde{U}(z_o) \subset U(z_o)$)

$$\Rightarrow f^*(z) = L_N(z,z_o) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_o)^j \ \forall z \in \tilde{U}(z_o).$$

Es ist f^* stetig auf $\tilde{U}(z_o)$ und $\tilde{U}(z_o)$ kompakt $\Rightarrow$ $f^*(z)$ ist in $\tilde{U}(z_o)$ beschränkt, also $f(z)$ in $\tilde{U}(z_o) \setminus \{z_o\}$ beschränkt (analog bei $z_o = \infty$).
Sei andererseits $|f(z)| \leq M \ \forall z \in \tilde{U}(z_o) \setminus \{z_o\}$.
Wir schreiben lokal f mit der Laurententwicklung:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_o)^j + \sum_{j=-1}^{-\infty} a_j (z-z_o)^j$$

und haben für die Koeffizienten im Hauptteil

$$a_{-j} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta \in S(z_o,\rho)} f(\zeta)(\zeta - z_o)^{j-1} d\zeta \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

(hier $0 < \rho < r$, bei $|z - z_o| < r$), das heißt

$$|a_{-j}| \leq \frac{1}{2\pi} M \rho^{j-1} 2\pi\rho = M\rho^j \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Da nun $\rho \to 0$ möglich wird, gilt $|a_{-j}| = 0 \ \forall j \in \mathbb{N}$
Ganz analog arbeiten wir bei $z_o = \infty$. □

FOLGERUNG 9.9 (Satz von Liouville für ganze Funktionen)**.**
f sei eine ganze Funktion. Ist hier $\infty = z_o$ hebbare isolierte singuläre Stelle von f, dann gilt $f \equiv \mathrm{const}\ \forall z \in \mathbb{C}_o$.

Beweis. Weil f stetig ist, haben wir:

$$\forall r > 0:\ |f(z)| \leq K_1 \quad \forall z \in \overline{K}(0,r)$$

$z_o = \infty$ als hebbare isolierte singuläre Stelle von f bedeutet

$$\Leftrightarrow \exists K_2:\ |f(z)| \leq K_2 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{K}(0, \tilde{r})$$

$\Rightarrow |f(z)|$ ist auf $\mathbb{C}$ beschränkt $\Rightarrow$ (Satz von Liouville) $f \equiv \mathrm{const}\ \forall z \in \mathbb{C}$. □

FOLGERUNG 9.10. *Die Beschränktheit von f in $U(z_o)$ bei $z_o \in \mathbb{C}$ ist äquivalent zu*

$$\lim_{z\to z_o}(z-z_o)f(z) = 0 \quad (\textit{andere Schreibweise: } f(z) = \mathscr{O}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)),$$

sowie $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)\frac{1}{z} = 0$.

SATZ 9.11 (Polstellensatz)**.** *Sei z_o eine isolierte singuläre Stelle der Funktion f. Dann ist z_o genau dann eine Polstelle, wenn*

$$\lim_{z\to z_o}|f(z)| = \infty$$

(im Sinne bestimmter Divergenz) gilt.

Beweis. Ist z_o eine Polstelle, so liefert die Laurententwicklung um z_o sofort

$$\lim_{z\to z_o}|f(z)| = \infty.$$

(Bei $z_o \in \mathbb{C}$ und Polstellenordnung N setzen wir $|z-z_o| = \rho$ so klein, dass $f(z) = (z-z_o)^{-N}\mathscr{P}(z,z_o)$ mit

$$|\mathscr{P}(z,z_o)| > C_1 > 0 \quad \forall z \in \overline{K}(z_o,\rho) \quad \Rightarrow \quad |f(z)| \geq \frac{1}{\rho^N}C_1 \quad (\rho \to 0).)$$

Ist andererseits $\lim\limits_{z\to z_o}|f(z)| = \infty$, $z_o \in \mathbb{C}$, dann existiert

$$\rho > 0 : \ \forall z \in K(z_o,\rho)\setminus\{z_o\} : \ |f(z)| \geq C > 0$$

$\Rightarrow g = \frac{1}{f}$ ist in $K(z_o,\rho)\setminus\{z_o\}$ holomorph und beschränkt. Mit Satz 9.8 ist z_o hebbare isolierte singuläre Stelle von g.
Annahme:

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j(z-z_o)^j \quad \text{mit } b_o \neq 0,$$

dann hätte $f(z)$ in z_o eine hebbare isolierte singuläre Stelle (einfach wieder Reziprokes einer Potenzreihe). Dies ist aber ein Widerspruch zu

$$\lim_{z\to z_o}|f(z)| = \infty \quad \Rightarrow \quad b_o = 0$$

(also Polstellenordnung $N \geq 1$).
Bei $z_o = \infty$ muss $g(z) = f(\frac{1}{z})$ eine Polstelle in $z_I = 0$ haben. Damit folgt die Behauptung hier schon analog zu oben. □

BEMERKUNG 9.12 (Chordale Stetigkeit)**.**
Sei $z_o \in \mathbb{C}_o$ Polstelle einer in $U(z_o)\setminus\{z_o\}$ holomorphen Funktion f, dann kann man mit

$$f^*(z) = \begin{cases} f(z) & \textit{bei } z \in U(z_o)\setminus\{z_o\}, \\ \infty & \textit{bei } z = z_o, \end{cases}$$

eine ergänzte Funktion definieren. Wir formulieren:
$f^*(z)$ ist im Sinne von $f^* : \ U(z_o) \subseteq \mathbb{C}_o \to \mathbb{C}_o$ chordal stetig.

SATZ 9.13 (Casorati-Weierstraß)**.** *f hat in z_o genau dann eine wesentliche isolierte singuläre Stelle, wenn $f(U(z_o)\setminus\{z_o\})$ dicht in $\mathbb{C}$ ist.*

Beweis. Sei z_o eine wesentliche isolierte singuläre Stelle.
Wäre $f(U(z_o)\setminus\{z_o\})$ nicht dicht in $\mathbb{C}$, das heißt $\exists c_o\in\mathbb{C}$ und $\varepsilon>0$, so dass

$$\forall z\in U(z_o)\setminus\{z_o\}:\quad |f(z)-c_o|\geq\varepsilon>0 \tag{\#}$$

$\Rightarrow (f(z)-c_o)^{-1}=: g(z)$ hat in z_o eine hebbare singuläre Stelle (g ist holomorph in $U(z_o)\setminus\{z_o\}$ und dort beschränkt: $|g(z)|\leq\frac{1}{\varepsilon}$).
Also gilt

$$g^*(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{a}_j(z-z_o)^j=(z-z_o)^N\mathscr{P}(z,z_o)$$

mit $\mathscr{P}(z_o,z_o)\neq 0$, $N\in\mathbb{N}_o$.

$$\Rightarrow f(z)-c_o=\frac{(z-z_o)^{-N}}{\mathscr{P}(z,z_o)}\quad\text{(höchstens Polstelle für }\frac{1}{g}\text{).}$$

Damit ist

$$(z-z_o)^N f(z)=c_o(z-z_o)^N+\frac{1}{\mathscr{P}(z,z_o)}$$

also eine Polstelle, oder hebbare isolierte singuläre Stelle und die Annahme (#) folglich falsch.
Das heißt

$$\forall c_o\in\mathbb{C},\ \varepsilon>0\ \exists z\in U(z_o)\setminus\{z_o\}:\quad |f(z)-c_o|<\varepsilon\quad\text{(Definition von Dichtheit).}$$

Andererseits ist f in $U(z_o)\setminus\{z_o\}$ weder beschränkt (also bei $f(U(z_o)\setminus\{z_o\})$ dicht in $\mathbb{C}$), noch kann $\lim\limits_{z\to z_o}|f(z)|=\infty$ im Sinne bestimmter Divergenz gelten.
$\Rightarrow z_o$ ist wesentliche isolierte singuläre Stelle von f (analog für $z_o=\infty$). □

Beispiel 9.2 (Wesentliche isolierte singuläre Stellen)**.**
Die Funktionen $\sin(\frac{1}{z})$ *bei* $z_o=0$ *und* $\sin(z)$, *beziehungsweise* $\exp(z)$ *bei* $z_o=\infty$,
haben die Eigenschaft, dass die Funktionswerte dieser Funktionen in $U(z_o)\setminus\{z_o\}$ dicht in $\mathbb{C}$ liegen.
Insbesondere existiert bei $z_o=\infty$ eine Folge

$$\{z_k\}_{k=1}^{\infty}\subset U(\infty)\setminus\{\infty\}$$

mit $\{\exp(z_k)\}_{k=1}^{\infty}\to 0$.

DEFINITION 9.7 (Meromorphe Funktionen)**.** *M sei eine diskrete Teilmente nach Definition 7.2 und $M\subset\mathbb{C}$, weiter sei $f:\ \mathbb{C}\setminus M\to\mathbb{C}$ holomorph. f habe $\forall\tilde{z}\in M$ (betrachtet als isolierte singuläre Stelle) in $\tilde{z}$ eine Polstelle. Dann nennen wir f eine meromorphe Funktion.*

BEMERKUNG 9.14. *Für meromorphe Funktionen ist aus der Definition von M klar, dass die Polstellen von f keinen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$ haben.*
Meromorphe Funktionen gestatten eine „Partialbruchentwicklung“, die oft besser konvergiert als jede Potenzreihenentwicklung.

Beispiel 9.3. *$M = \mathbb{Z}$: $f = (\pi\cot(\pi\cdot)) : \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ hat hier $\forall z \in D(f)$ die Darstellung:*

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-k^2}$$

BEMERKUNG 9.15 (Automorphismen auf $\mathbb{C}$)**.**
Bei $G = \mathbb{C}$ gilt:

$$\mathrm{Aut}(G) = \{f : G \to G : f(z) = az + b \ \forall z \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$$

(hier ist $\mathrm{Aut}(G)$ *analog zu Notation 8.2 erklärt).*

Beweis. (i) Jeder Automorphismus von $\mathbb{C}$ ist eine ganze Funktion, das heißt

$$\forall f \in \mathrm{Aut}(G) : \quad f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$$

mit Konvergenzradius ∞. Wären nicht nur endlich viele der $a_j \neq 0$ bei $j \in \mathbb{N}_o$, so wäre $z_o = \infty$ eine wesentliche isolierte singuläre Stelle von f.
Mit dem Satz 9.13, dem Satz von Casorati-Weierstraß, und $r > 0$ gilt:

$$f(U(\infty)\setminus\{\infty\}) = f(\mathbb{C}\setminus\overline{K}(0,r))$$

ist dicht in $\mathbb{C}$ und $\emptyset \neq f(K(0,r))$ ist ein Gebiet, also offen.
$\Rightarrow f(K(0,r)) \cap f(\mathbb{C}\setminus\overline{K}(0,r)) \neq \emptyset$, dies ist aber ein Widerspruch zur Injektivität von f.

(ii) Analog folgt wieder mit der Injektivität von f, dass f in ∞ eine Polstelle 1. Ordnung hat, das heißt $f(z) = az + b = a_1 z + a_o$.

□

BEMERKUNG 9.16 (formale Ausdehnung zu „Automorphismen" auf $\mathbb{C}_o$)**.**
Im Sinne von chordal-stetiger Fortsetzung gilt:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_o) = \{M_{\underline{\underline{A}}} : \mathbb{C}_o \to \mathbb{C}_o \text{ mit } \underline{\underline{A}} \in GL(2,\mathbb{C})\}.$$

(Vergleiche auch mit Bemerkung 4.14: $\forall \underline{\underline{A}} \in GL(2,\mathbb{C})$ ist $M_{\underline{\underline{A}}}(z)$ biholomorph.)

Beweis. Für $f(\infty) = \infty$ ist die Aussage mit Bemerkung 9.15 offensichtlich.
Bei $f(z_o) = \infty$ und $f(\infty) = w_o$ ist die Funktion

$$g^*(z) = \frac{1}{f(z) - w_o} \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{z_o\}, \quad g^*(z_o) = 0$$

aus $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, das heißt $g^*(z) = cz + d \ \forall z \in \mathbb{C}$. Umstellen nach f liefert die Behauptung. □

9.3 Der Residuensatz

DEFINITION 9.8 (Wiederholung von Definition 9.3)**.**
Sei z_o eine isolierte singuläre Stelle von f, dann ist

$$(\operatorname{Res} f)(z_o) = a_{-1} \quad \textit{und} \quad a_{-1} := \frac{1}{2\pi i}\int_{S(z_o,r)\subset U(z_o)} f(\zeta)d\zeta,$$

beziehungsweise bei $z_o = \infty$:

$$L(z,\infty) = f(z) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{b_l}{z^l} \quad : \qquad (\operatorname{Res} f)(\infty) = -b_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{S(0,r)\subset U(\infty)} f(\zeta)d\zeta$$

das Residuum von f in z_o.

BEMERKUNG 9.17. *$\gamma = \partial G$ sei eine stückweise glatte Kurve und Rand des Gebiets $G \subset \mathbb{C}_o$. Auf $G \cup \partial G$ sei f holomorph mit Ausnahme der isolierten singulären Stelle $z_o \in G$. Weiterhin sei γ so orientiert, dass G zur Linken liegt.*

$$\textit{Dann gilt:} \qquad (\operatorname{Res} f)(z_o) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma=\partial G} f(z)dz.$$

(Man vergleiche hierzu auch den Cauchyschen Integralsatz in Randformulierung, Satz 7.7.)

Beweis. (*i*) Sei $z_o \in \mathbb{C}$ und $\overline{K}(z_o,r) \subset G$, dann liefert der Cauchysche Integralsatz für

$$G \setminus \overline{K}(z_o,r): \qquad 0 = \int_\gamma f(z)dz - \int_{S(z_o,r)} f(z)dz.$$

Damit folgt die Behauptung sofort aus der Definition.

(*ii*) Sei nun $z_o = \infty$, dann folgt die Behauptung aus (*i*) mit $\mathbb{C}_o \setminus \overline{K}(0,r)$.
Eine zweite Möglichkeit ist das Nutzen der gleichmäßigen Konvergenz von $L(z,z_o)$ auf $S(z_o,r)$. Durch Vertauschen von Integration und Summation folgt:

$$a_{-1} \cdot \left(\int_{S(z_o,r)} \frac{d\zeta}{\zeta - z_o} = 2\pi i\right).$$

(Ablesen aus Laurententwicklung.)

□

BEMERKUNG 9.18. *Einfache Grenzwert-Tricks zur Berechnung von Residuen bei $z_o \in \mathbb{C}$: Sofort ablesbar: Hat f in z_o eine Polstelle 1. Ordnung, dann gilt*

$$(\operatorname{Res} f)(z_o) = \lim_{z\to z_o}(z - z_o)f(z).$$

Analog gilt bei Quotienten

$$f = \frac{g}{h}, \quad g(z_o) \neq 0,$$

falls z_o eine Nullstelle 1. Ordnung von h ist:

$$(\operatorname{Res} f)(z_o) = \lim_{z\to z_o}(z - z_o)\frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z\to z_o}\left(\frac{z - z_o}{h(z) - h(z_o)}\right)\cdot g(z_o) = \frac{g(z_o)}{h'(z_o)}.$$

SATZ 9.19 (Residuensatz)**.** *Sei $G \subset \mathbb{C}_o$ ein Gebiet mit Rand $\partial G = \bigcup_{j=1}^{N} \gamma_j$ (analog zu Satz 7.3). Dabei seien die ersten $\gamma_j,\ j = 1,\ldots,\ell < N$ glatte Kurvenstücke und keine Schlitzkurven. Weiterhin liege G zur Linken beim Durchlauf der $\gamma_j,\ j = 1,\ldots,\ell$.*
f sei in $\tilde{G} \supset \overline{G}^{\tau_o}$ holomorph mit Ausnahme der isolierten singulären Stellen $\{z_p\}_{p=1}^{m}$ und bei $\infty \in G$ sei $\infty \in \{z_p\}_{p=1}^{m} \subset G$.
Dann gilt:

$$\sum_{j=1}^{\ell} \int_{\gamma_j} f(z)dz = 2\pi i \sum_{p=1}^{m} (\operatorname{Res} f)(z_p),$$

wobei natürlich $z_p \notin \partial G\ \forall p \in \{1,\ldots,m\}$ vorausgesetzt sei.

Beweis. Wir wenden den Cauchyschen Integralsatz in Randform, Satz 7.7 auf

$$G_1 := G \setminus \bigcup_{p=1}^{m} \overline{K}(z_p, r_p)$$

an, wobei für alle $z_p \in \mathbb{C}$: $\overline{K}(z_p,r_p) \subset G$ mit $z_q \notin \overline{K}(z_p,r_p)\ \forall q \neq p$ gelte.
Bei $z_p = \infty$ sei dies analog erfüllt. Hier sei formal wieder $K(\infty, r_p) = \mathbb{C}_o \setminus \overline{K}(0,\rho) \subset G$.
Wir beachten die Orientierung und erhalten, da f in G_1 holomorph:

$$0 = \sum_{j=1}^{\ell} \int_{\gamma_j} f(z)dz - \sum_{p=1}^{m} \left[\left(\int_{S(z_p,r_p)} f(z)dz \right) (-1)^{\delta_{z_p,\infty}} \right],$$

mit der Definition des Residuums folgt hieraus sofort die Behauptung des Satzes.

$$\delta_{z_p,\infty} = \begin{cases} 0 & \text{bei } z_p \neq \infty, \\ 1 & \text{bei } z_p = \infty. \end{cases}$$

□

BEMERKUNG 9.20 (Uneigentliche Integrale)**.**
Sei $G \subset \mathbb{C}_o$ ein Gebiet mit $G \supset (\mathbb{R}_o = \partial H_+ \cup \{\infty\}) \cup H_+$ und $f:\ G \setminus \{z_l\}_{l=1}^{N} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\{z_l\}_{l=1}^{N} \subset H_+$. f habe in $z_o = \infty$ eine Nullstelle mindestens 2. Ordnung. Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{l=1}^{N} (\operatorname{Res} f)(z_l).$$

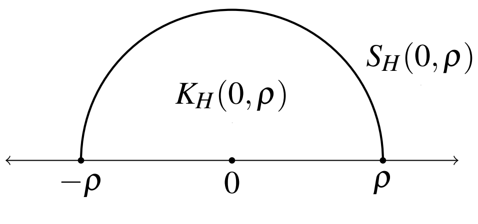


Abbildung 3: Halbkreis

Beweis. Sei ρ hinreichend groß, dann liefert der Residuensatz, Satz 9.19, für $K_H(0,\rho)$:

$$\int_{-\rho}^{\rho} f(x)dx + \int_{S_H(0,\rho)} f(z)dz = 2\pi i \sum_{l=1}^{N} (\operatorname{Res} f)(z_o).$$

Wir zeigen noch, dass

$$\lim_{\rho\to\infty} \int_{S_H(0,\rho)} f(z)dz = 0.$$

Dazu schreiben wir f als Potenzreihe in ∞: (Beachte: $\infty \notin H_+$.)

$f(z) = \frac{1}{z^2}\mathscr{P}(z,\infty)$, wobei $\forall \rho > \rho_o : \; |\mathscr{P}(z,\infty)| \leq M \; \forall z \in G : \; |z| \geq \rho$, das heißt

$$\left| \int_{S_H(0,\rho)} f(z)dz \right| = \left| \int_0^{\pi} if(\rho e^{it})\rho e^{it} dt \right| \leq \frac{M\pi}{\rho} \underset{\rho\to\infty}{\to} 0.$$

$\square$

Beispiel 9.4.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{z^4}\left(1 - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^8} - \ldots\right) \quad \textit{Nullstelle 4. Ordnung in } \infty.$$

$$\textit{Polstellen von } f \textit{ in } H_+ : \quad z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}},\; z_2 = \frac{i-1}{\sqrt{2}},$$

$$l = 1,2: \quad (\operatorname{Res} f)(z_l) \underset{\textit{vgl. Bem 9.18}}{=} \frac{1}{4z_l^3} = \frac{\sqrt{2}}{8} \begin{cases} -i-1 & l=1 \\ 1-i & l=2 \end{cases}.$$

Durch Ausrechnen folgt die Behauptung.

9.4 (Unmittelbare) Anwendungen des Residuensatzes

Die Ordnungen von Null- und Polstellen sind bereits bekannt (vergleiche zum Beispiel Notation 9.4 und Satz 9.7)

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}(f,z_j) > 0, &\quad \text{falls } z_j \text{ eine echte Nullstelle von } f \text{ und} \\ \operatorname{ord}(f,z_j) < 0, &\quad \text{falls } z_j \text{ Polstelle von } f \text{ ist.} \end{aligned}$$

SATZ 9.21 (Satz von logarithmischen Residuum)**.**
Es sei G wie in Satz 9.19, wieder mit $\tilde{G} \supset \overline{G}^{\tau_o} \supset G$, sowie $f(z) \neq 0 \; \forall z \in \tilde{G} \setminus G$.
$f: \; \tilde{G} \to \mathbb{C}_o$ sei chordal stetig, $\partial G \neq \emptyset$,

$$\partial G = \bigcup_{j=1}^{\ell} \gamma_j \; \cup \bigcup_{j=\ell+1}^{N} \gamma_j$$

und die ersten $\{\gamma_j\}_{j=1}^{\ell}$ seien keine Schlitzkurven. Dann gilt:

$$\exists \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{\ell} \int_{\gamma_j} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{p=1}^{m} \operatorname{ord}(f,z_p),$$

wobei z_p jeweils eine Pol- oder Nullstelle von f ist.

Beweis. f kann in $\tilde{G}$ nur endlich viele Nullstellen haben (in Satz 9.19 hatten wir endlich viele isolierte singuläre Stellen, welche in G liegen), die chordale Stetigkeit schließt wesentliche isolierte singuläre Stellen aus.

Argumentation:

Ist $z_{\tilde{p}} = \infty \in G$, so kann f in $z_{\tilde{p}} = \infty$ nur eine Polstelle (oder Nullstelle) endlicher Ordnung haben, das heißt $\exists U(\infty) \setminus \{\infty\}$ in dem Hauptteil der Laurententwicklung ein Polynom endlichen Grades ist.

Für ein solches Polynom endlichen Grades gibt es in $U(\infty)$ höchstens endlich viele Nullstellen und das verbleibende Restgebiet ist beschränkt.

Hätte f dort unendlich viele Nullstellen, so wäre $f \equiv 0$ ein Widerspruch zu $|f(z)| \neq 0$ auf ∂G (vergleiche Voraussetzung).

Nun sei $z_p \in G,\ z_p \neq \infty$. Dann gilt $\forall z \in U(z_p) \setminus \{z_p\}$:

$$f(z) = (z - z_p)^k g(z) \quad \text{mit} \quad g(z_p) \neq 0, \text{ und } g \text{ ist holomorph in } U(z_p).$$

Bei $k = 0$ ist z_p weder eine Polstelle noch eine Nullstelle von f und die Funktion $\frac{f'}{f}$ ist in $U(z_p)$ holomorph (im schlimmsten Fall ist z_p hebbar $\Rightarrow$ mit f^* alles wie oben, hier ist $\operatorname{ord}(f^*, z_p) = 0$).

Nun sei $k \neq 0$ mit $|k| < \infty$. Wir setzen

$$g_1(z) := g(z) + (z - z_p)\frac{1}{k}g'(z)$$

und erhalten $\forall z \in U(z_p) \setminus \{z_p\}$

$$f'(z) = k(z - z_p)^{k-1} g_1(z) \quad \text{bei} \quad g_1(z_p) \neq 0$$

(einfach Ableitung umgeschrieben), $g_1(z)$ ist holomorph in $U(z_p)$.

Wir nutzen diese Darstellung und erhalten (mindestens in $\tilde{U}(z_p) \subset U(z_p)$), dass in $\tilde{U}(z_p) \setminus \{z_p\}$ gilt:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = k \frac{g_1(z)}{g(z)(z - z_p)},$$

wobei (vergleiche oben) $\frac{g_1}{g}(z_p) = 1$ und $\left(\frac{g_1}{g}\right)$ holomorph in $\tilde{U}(z_p)$ (Grenzwert-Trick, Polstelle 1. Ordnung).

Das Ergebnis ist: $\frac{f'}{f}$ hat in z_p eine Polstelle erster Ordnung mit

$$(\operatorname{Res}\frac{f'}{f})(z_p) = k.$$

Ist z_p eine Nullstelle von f, dann ist $k > 0$ und ist z_p eine Polstelle von f, so ist $k < 0$.

Bei $z_p \in G,\ z_p = \infty$ ist alles analog mit

$$f(z) = z^{-k} g(z), \quad g(\infty) \neq 0, \quad f'(z) = -kz^{-(k+1)} g_1(z) \text{ in } U(\infty) \setminus \{\infty\}$$

und $g_1(z) = g(z) - zg'(z)\frac{1}{k}$.

Ergebnis: $\forall z \in \tilde{U}(\infty) \setminus \{\infty\}$:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{k}{z}\left(\frac{g_1}{g}\right)(z);$$

$\frac{g_1}{g}(\infty) = 1$ und $\left(\frac{g_1}{g}\right)$ holomorph in $\tilde{U}(\infty)$.

$$(\operatorname{Res}\frac{f'}{f})(\infty) = k \quad \text{mit} \quad \begin{array}{ll} k > 0, & \text{falls } \infty \text{ Nullstelle von } f \text{ und} \\ k < 0, & \text{falls } \infty \text{ Polstelle von } f. \end{array}$$

Das Zusammenfassen der Überlegungen liefert nun das Ergebnis. □

SATZ 9.22 (Rouché)**.**
Sei G wie in Satz 9.19, f, g holomorph in $\tilde{G}$. Für $z \in \tilde{G} \setminus G$ sei $f(z) \neq 0$, sowie $|g(z)| < |f(z)|$. Dann gilt

$$\sum_{p=1}^{m} \operatorname{ord}(f, z_p) = \sum_{q=1}^{n} \operatorname{ord}(f+g, z_q),$$

wobei die $\{z_p\}_{p=1}^{m}$ die Nullstellen von f in G und die $\{z_q\}_{q=1}^{n}$ die Nullstellen von $f+g$ in G bezeichnen. (Störungsinvarianz!)

Beweis. Wir erklären mit Satz von logarithmischen Residuum, Satz 9.21, die Funktion

$$2\pi i\tilde{N}(\lambda) = \sum_{j=1}^{l} \int_{\gamma_j} \left(\frac{f'(z) + \lambda g'(z)}{f(z) + \lambda g(z)}\right) dz \quad \text{für } \lambda \in [0,1]. \qquad (\circ)$$

Argumentation wieder „echter Rand“, die Anzahl der Nullstellen von f ist endlich.
Der Integrand in $(\circ)$ ist stetig in $(\tilde{G} \setminus G) \times [0,1]$ und $\tilde{N}(0)$ ganzzahlig. Aufgrund der Stetigkeit ist $\tilde{N}(\lambda)$ ganzzahlig, also $\tilde{N}(0) = \tilde{N}(1)$, beziehungsweise

$$\sum_{p=1}^{m} \operatorname{ord}(f, z_p) = \tilde{N}(0) = \sum_{q=1}^{n} \operatorname{ord}(f+g, z_q).$$

□

BEMERKUNG 9.23 (Abbildungsgrad)**.**
Der Satz von Rouché, Satz 9.22, ist ein erstes Werkzeug für die Erklärung und Begründung der (Homotopie)-Invarianz des „Abbildungsgrades“.

BEMERKUNG 9.24.
Den Satz von Rouché, Satz 9.22, kann man völlig analog für zwei Funktionen f und g (anstelle der Funktionen f und $f+g$) formulieren. Hier benutzt man dann die Voraussetzung

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

auf $\tilde{G} \setminus G$.

10 Der Riemannsche Abbildungssatz

10.1 Homotopie, Zusammenhang, einfache Fortsetzungsstrategien

DEFINITION 10.1 (Homotopie, homotope Wege).
$G \subset \mathbb{C}_o$ sei ein Gebiet, $\gamma_o, \gamma_1 :\ [a,b] \to G$ seien zwei Wege in G mit $\gamma_o(a) = \gamma_1(a) = z_a$ und $\gamma_o(b) = \gamma_1(b) = z_b$ (Anfangs- und Endpunkte stimmen überein).
Wir nennen γ_1 und γ_2 homotop in G, wenn $\exists H :\ [0,1] \times [a,b] \to G$, H stetig, mit

(i) $H(0,\cdot) = \gamma_o,\ H(1,\cdot) = \gamma_1$

(ii) $\forall s \in [0,1]$ *gilt* $H(s,a) = z_a$ *und* $H(s,b) = z_b$.

$H :\ [0,1] \times [a,b] \to G$ nennen wir eine Homotopie.

BEMERKUNG 10.1 (Homotopie als Äquivalenzrelation).
Offensichtlich wird durch Homotopie eine Äquivalenzrelation erklärt. Homotopie sichert eine stetige Deformation von γ_o in γ_1.

DEFINITION 10.2 (Einfach zusammenhängendes Gebiet).
Wir nennen ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}_o$ einfach zusammenhängend, wenn jedes Wege-Paar γ_o und γ_1, die irgendwie zwei Punkte z_a, z_b in G verbinden, in G homotop ist.

Beispiel 10.1. *Einfach zusammenhängende Gebiete:*

(i) $\mathbb{C}_o$ *und* $\mathbb{C}$ *sind einfach zusammenhängend.*

(ii) Sternförmige Gebiete G sind einfach zusammenhängend.

(iii) Alle $G \subset \mathbb{C}$, die homöomorph zu einer in $\mathbb{C}$ konvexen Menge G_1 sind (vergleiche Definition 6.5), sind einfach zusammenhängend.

(iv) Jedes Gebiet $G \subset \mathbb{C}_o$ mit $\partial G \neq \emptyset$ sowie $\partial G \neq \{\zeta\} \in \mathbb{C}$ und ∂G zusammenhängenden - oder sogar geschlossenen ∂G bei beschränkten Gebieten, ist einfach zusammenhängend.

BEMERKUNG 10.2 (Einfach zusammenhängendes Gebiet, und in G geschlossene Wege).
Ändert man in der Definition 10.2 den Durchlaufsinn von γ_1 zu γ_1^-, so ist $\gamma_o \cup \gamma_1^-$ geschlossen, beziehungsweise sogar nur der „Nullweg“ $\gamma_1 :\ [a,b] \to z_a = z_b$.
Die stetige Deformation aller Wege nach Definition 10.2 in G (einfach zusammenhängend) lässt sich damit auch für in G geschlossene Wege formulieren. (Der Nullweg ist sicher nicht injektiv!)

DEFINITION 10.3 (Freie Homotopie).
Zwei geschlossene Wege $\gamma_o, \gamma_1 :\ [a,b] \to G$ mit $\gamma_j(a) = \gamma_j(b),\ j = 0,1$; nennt man in G frei homotop, wenn $H :\ [0,1] \times [a,b] \to G$ als stetige Abbildung (freie Homotopie) existiert, so dass

(i) $H(0,\cdot) = \gamma_o$ *und* $H(1,\cdot) = \gamma_1$, *sowie*

(ii) $\forall s \in [0,1] :\ H(s,a) = H(s,b)$ *gilt (geschlossen).*

DEFINITION 10.4 (Nullhomotopie, nullhomotope Wege)**.**
Einen geschlossenen Weg γ in G, $\gamma\colon [a,b] \to G$ nennen wir nullhomotop, wenn γ frei homotop zu einem Nullweg $\tilde{\gamma}\colon [a,b] \to z_o \in G$ ist.

FOLGERUNG 10.3 (Einfach zusammenhängende Gebiete)**.**
Ein Gebiet G ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn jeder geschlossene Weg in G nullhomotop ist.

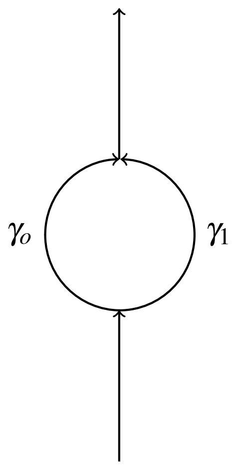


Abbildung 4: homotope Wege

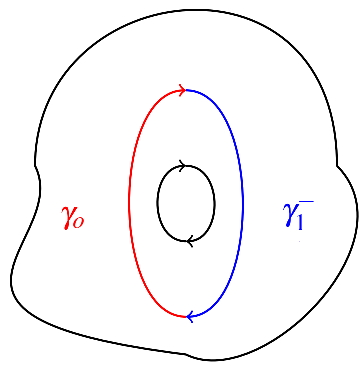


Abbildung 5: frei homotope Wege

Beweis. Hier als Skizze: (vgl. auch oben). Sei G einfach zusammenhängend nach Definition 10.2. Kontraktion nach freier Homotopie (weil durch Homotopie in G alle Kurven stetig ineinander übergehen und $\hat{G}_o$ Gebiet mit Rand $\partial\hat{G}_o = \gamma_o \cup \gamma^-$ ausfüllen). □

Wir zeigen einige Beispiele aus Beispiel 10.1:

Beweis. Beispiel 10.1:

Zu (ii) G sternförmig bezüglich $z_o \in G$, $\gamma \subset G$ geschlossen. Dann erklären wir durch:

$$H\colon [0,1]\times[a,b] \to G \quad \text{mit} \quad H(s,t) := z_o \cdot s + \gamma(t)\cdot(1-s)$$

eine freie Homotopie, das heißt alle geschlossenen Wege γ sind nullhomotop.

Zu (iii) G_1 konvexe Menge, $G_1 \subset \mathbb{C}$, $z_a, z_b \in G_1$ beliebig, aber fest. γ_o und γ_1, als z_a und z_b verbindende Wege, nutzen wir zur Erklärung von:

$$H\colon [0,1]\times[a,b] \to G \quad \text{mit} \quad H(s,t) := (1-s)\gamma_o(t) + s\cdot\gamma_1(t),$$

alles bei festem t Strecken in G_1. Damit ist alles gezeigt, weil G_1 konvex.

□

DEFINITION 10.5 (Benachbarte Potenzreihen).
Es seien $\mathscr{P}(z,z_o)$ *und* $\mathscr{P}_1(z,z_1)$ *Potenzreihen mit den Konvergenzradien* $\rho > 0$ *und* $\rho_1 > 0$.
Wir nennen $\mathscr{P}$ *und* $\mathscr{P}_1$ *benachbart, wenn* $K(z_o,\rho)\cap K(z_1,\rho_1) \neq \emptyset$*, sowie:*

$$\forall z \in K(z_o,\rho)\cap K(z_1,\rho_1): \quad \mathscr{P}(z,z_o) = \mathscr{P}_1(z,z_1) \quad \textit{gilt.}$$

Beispiel 10.2 (Benachbarte Potenzreihen, Umordnung). *Sei* $\mathscr{P}(z,z_o)$ *vorgegeben,* $z_1 \in K(z_o,\rho)$. *Die umgeordnete Potenzreihe* $\mathscr{P}_1(z,z_1)$ *ist sicher zu* $\mathscr{P}(z,z_o)$ *benachbart.*

DEFINITION 10.6 (Potenzreihenkette).
Eine endliche Familie paarweise benachbarter Potenzreihen $\{\mathscr{P}_j(z,z_j)\}_{j=1}^N$ *nennen wir eine Potenzreihenkette (PRK).*
Wir nennen eine PRK „PRK entlang eines Weges γ*“,* $\gamma\subset\mathbb{C}$*, wenn* $\gamma: [a,b]\to\mathbb{C}$ *mit* $\gamma(a) = z_1,\ \gamma(b) = z_N$ *und eine Zerlegung* $Z_{[a,b]} \in \mathfrak{Z}_{[a,b]}$ *(Menge aller Zerlegungen von* $[a,b]$*) derart existiert, dass*

$$\begin{aligned} Z_{[a,b]} &:= \{t_o = a, t_1,\dots,t_N = b\} \quad (t_j < t_{j+1},\ j = 0,1,\dots,N-1),\\ &\textit{sowie } \gamma([t_{j-1},t_j]) \subset K(z_j,\rho_j) \quad j = 1,\dots,N \end{aligned}$$

(hier seien ρ_j *die Konvergenzradien der* $\mathscr{P}_j(z,z_j)$*).*

SATZ 10.4 (Einzigkeitssatz Potenzreihenketten).
Es seien $\{\mathscr{P}_j(z,z_j)\}_{j=1}^N$ *und* $\{\mathfrak{Q}_l(z,z_l)\}_{l=1}^L$ *zwei PRK längs eines Weges* γ *in* $\mathbb{C}$.
Sind dabei $\mathscr{P}_1(z,z_1) = \mathfrak{Q}_1(z,z_1)$*, so gilt auch* $\mathscr{P}_N(z,z_N) = \mathfrak{Q}_L(z,z_L)$.

Beweis. Nach der Definition der Zerlegung existieren mit der Bezeichnung

$$\tilde{Z}_{[a,b]} = \{t_o = \tilde{t}_o = a,\dots,\tilde{t}_L = b\} \in \mathfrak{Z}_{[a,b]}$$

Intervalle mit $[t_{j-1},t_j]\cap[\tilde{t}_{l-1},\tilde{t}_l] \neq \emptyset$. In diesen Indexkombinationen sind $\mathscr{P}_j$ und $\mathfrak{Q}_l$ benachbart. (Wäre dies falsch für ein j und ein l, was nur bei $0 < j,l$ auftreten könnte, so führte diese Annahme zu einem Widerspruch zum Identitätssatz für holomorphe Funktionen, Satz 8.4.)
Damit sind die PRK längs γ sogar in der Weise verwoben, dass zunächst $\mathfrak{Q}_L = \mathscr{P}_N$ gilt.
Zudem kann man beide PRK in der Weise mischen, dass man sie in dem Sinne vereinigt, dass die die Ketten möglichst wenige, das heißt $M \le \min\{N,L\}$ („Vergrößerung“), beziehungsweise möglichst viele, das heißt $M \ge \max\{N,L\}$ („Verfeinerung“) Elemente enthalten. □

DEFINITION 10.7 (Unbeschränkte Fortsetzbarkeit in G_1).
Seien $G_1,\ G_o$ *Gebiete in* $\mathbb{C}$ *mit* $G_o\subset G_1$ *und* $f_o: G_o\to\mathbb{C}$ *sei holomorph.*
Wir nennen f_o *unbeschränkt in* G_1 *fortsetzbar, wenn entlang jeden Weges* γ*, der in* G_o *beginnt und in* G_1 *verläuft, eine PRK längs* γ *existiert.*
Man bezeichnet hier das letzte Glied (bzw. die letzten Glieder) der PRK auch als Fortsetzung von f_o *in* G_1.

BEMERKUNG 10.5.
Bei PRK längs γ kann man sich natürlich auch von den Anfangs- und Endpunkten von γ in dem Sinne lösen, dass nur $\exists\, \rho_a,\, \rho_b$ gefordert wird, bei

$$K(z_1,\rho_1)\cap K(\gamma(a),\rho_a)\neq\emptyset \text{ und } K(z_N,\rho_N)\cap K(\gamma(b),\rho_b)\neq\emptyset.$$

SATZ 10.6 (Homotopieinvarianz der Fortsetzung)**.**
Sei f_o in G_1 unbeschränkt fortsetzbar, weiter seien γ_o und γ_1 homotope Wege, mit $z_a=\gamma_o(a)=\gamma_1(a)$ und $\gamma_o(b)=\gamma_1(b)=z_b$.
Dann gilt: In $U(z_b)$ sind die jewiligen Fortsetzungen von f_o identisch.
Bezeichnen wir hier die Fortsetzung von f_o mit f_1, so erhalten wir

$$f_1:\ H([0,1]\times[a,b])\to\mathbb{C} \text{ mit } f_1(z)=f_o(z)\quad \forall z\in H([0,1]\times[a,b])\cap G_o.$$

Beweis. In G_o enthält jede PRK längs γ_s, mit $s\in[0,1]$, nur verschiedene Darstellungen von f_o in Potenzreihen.
Der Zusammenhang von $H([0,1]\times[a,b])\cap G_o$ (stetiges Übergehen) liefert, dass alle PRK längs aller Wege aus jeweils benachbarten PRK bestehen. (Probleme könnten nur in G_1 auftreten.)
$H:\ [0,1]\times[a,b]\to G_1$ ist sicher gleichmäßig stetig (vergleiche Definition von Homotopie).
Wir verwenden nun Zerlegungen $Z_{[0,1]\times[a,b]}\in\mathfrak{Z}_{[0,1]\times[a,b]}$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von H existieren $\sigma>0$, so dass eine PRK längs γ_s auch eine PRK längs $\gamma_{\tilde{s}}$ ist, wenn nur $|s-\tilde{s}|<\sigma\leq 1$ gilt. □

SATZ 10.7 (Monodromiesatz)**.**
Die Funktion f_o sei in G_o holomorph und unbeschränkt in G_1 fortsetzbar. Ist das Gebiet G_1 einfach zusammenhängend, so ist f_1 als Fortsetzung von f_o in G_1 holomorph.
(f_1 nennt man auch die analytische (oder holomorphe) Fortsetzung von f_o in G_1.)

Beweis. Mit $z_a\in G_o$ und $z_b\in G_1$ wählen wir γ als Weg von z_a nach z_b in G_1.
Über PRK längs γ setzen wir $f_1(z_b):=f(z_b)=\mathscr{P}(z_b,z_b)$. Nach dem Satz zur Homotopieinvarianz der Fortsetzung, Satz 10.6, ist $f_1(z_b)=f(z_b)$ unabhängig von der Wahl des, z_a und z_b verbindenden, Weges γ.
Mit hinreichend kleinem ρ erklären wir $K(z_b,\rho)\subset K(z_b,\rho_N)$ und bei $\zeta\in K(z_b,\rho):\ \mathscr{P}(z,\zeta)$ als Umordnungs-Potenzreihen im Sinne der Entwicklung von $\mathscr{P}(z,z_b)$ in ζ als Entwicklungspunkt. Damit kann man die PRK bis ζ verlängern (vergleiche Bemerkung 10.5). Der neue Weg sei $\gamma\cup[z_b,\zeta]=:\gamma^*\subset G_1$.
Damit lässt sich eine neue PRK von z_a nach ζ längs γ^* erklären. Mit Satz 10.6 und ζ als Entwicklungspunkt einer f_1 darstellenden PR ist f_1 holomorph in ζ, dabei ist $\zeta\in G_1$ beliebig. □

FOLGERUNG 10.8 (Holomorphe Stammfunktion)**.**
Ist f in G holomorph und G einfach zusammenhängend, so existiert die holomorphe Funktion F als komplexe Stammfunktion von f in ganz G.

Beweis. Wir wählen beliebigen Punkt $z_o \in G$ und einen abgeschlossenen Kreis $\overline{K}(z_o,r) \subset G$ (#). $K(z_o,r)$ ist offensichtlich sternförmig. In $K(z_o,r)$ existiert $F(z)$ als Stammfunktion von f. Diese Strategie ist unabhängig von der Wahl von z_o (und im Sinne (#) von r).
Für einen beliebigen Punkt $z_1 \in K(z_o,r)$ gilt dies analog ($z_o \neq z_1$). Die jeweiligen Stammfunktionen unterscheiden sich nur um additive Konstanten. Damit können wir, beginnend mit $z_o \in G$, über den Weg γ jeden Punkt $z_1 \in G$ erreichen. Setzt man nun $\mathscr{P}_o(z_o,z_o) = 0$ und gleicht man die PRK längs γ auf diese Konstante ab, so ist schließlich Satz 10.7 anwendbar. □

10.2 Hurwitzsche Sätze, schlichte Funktionen

SATZ 10.9 (Folgen-Nullstellen-Satz).
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ eine Folge von auf G holomorphen Funktionen, wobei die $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ lokal gleichmäßig gegen die in G holomorphe (Grenz-)Funktion $f \not\equiv 0$ konvergieren (Weierstraß). Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f hat in $z_o \in G$ eine Nullstelle der Ordnung k_o : $\operatorname{ord}(f,z_o) = k_o$ und

(ii) $\exists U(z_o) \subset G$, so dass für fast alle $j \in \mathbb{N}$ und $\forall \varepsilon > 0\ \exists K(z_o,\varepsilon)$, die Funktionen f_j haben in $K(z_o,\varepsilon) \subset U(z_o) \subset G$ genau k_o (in Vielfachheit gezählte) Nullstellen.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$

Der Identitätssatz für holomorphe Funktionen, Satz 8.4 liefert:

$$\exists \varepsilon_o :\ \forall z \in \overline{K}(z_o,\varepsilon_o) \subset G : \quad f(z) \neq 0 \text{ auf } \overline{K}(z_o,\varepsilon_o) \setminus \{z_o\}.$$

Für $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_o\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 :\ |f(z)| \geq \delta\ \forall z \in S(z_o,\varepsilon)$ d.h. bei $|z - z_o| = \varepsilon$.
$S(z_o,\varepsilon)$ ist kompakt und (wegen lokal gleichmäßiger Konvergenz) $\exists\, j_o = j_o(\frac{\delta(\varepsilon)}{2})$ mit:

$$\forall j \geq j_o \text{ gilt } |f(z) - f_j(z)| \leq \frac{\delta}{2} \quad (\forall z \in S(z_o,\varepsilon)).$$

Der Satz von Rouché, Satz 9.22, sichert nun die Behauptung.

$(ii) \Rightarrow (i)$

Wir sichern zunächst die Nullstelle von f in z_o. Dazu sein in (ii) ε jeweils neu und als streng monotone Nullfolge gewählt $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty} \to 0$.
Wir betrachten die Folge von jeweils aus $K(z_o,\varepsilon_m)$ fix gewählten Nullstellen $\{z^0_{j(\varepsilon_m)}\}_{j=1}^{\infty}$ (, hier nehmen wir immer genau eine der möglichen k_o Nullstellen!)

$$\{z^0_{j(\varepsilon_m)}\} \overset{m\to\infty}{\to} z_o,$$

Offensichtlich ist hier $\{z^0_{j(\varepsilon_m)}\}_{j=1}^{\infty}$ damit Cauchy-Folge mit Grenzwert z_o.
Da f stetig ist, gilt nach Auswahl im Sinne des Grenzwertes geschrieben in $j(\varepsilon_m)$:

$$\lim_{j(\varepsilon_m)\to\infty} z^0_{j(\varepsilon_m)} = z_o \text{ und } \lim_{j(\varepsilon_m)\to\infty} f(z^0_{j(\varepsilon_m)}) = f(z_o) \text{ sowie } \lim_{j(\varepsilon_m)\to\infty} f_\ell(z^0_{j(\varepsilon_m)}) = f_\ell(z_o)\,\forall \ell \in \mathbb{N}$$

Wir nutzen nun die Stetigkeits- und Konvergenzeigenschaften zur Betrachtung von $|f(z_o)|$. Dazu seien mit beliebig vorgegebenem $\delta > 0$: $\quad \ell, j(\varepsilon_m) > \ell_o(\delta)$ und wir erhalten:

$$\begin{aligned} |f(z_o)| = |f(z_o) - f_{j(\varepsilon_m)}(z^0_{j(\varepsilon_m)})| \leq \\ \leq |f(z_o) - f_\ell(z_o)| + |f_\ell(z_o) - f_\ell(z^0_{j(\varepsilon_m)})| + |f_\ell(z^0_{j(\varepsilon_m)}) - f_{j(\varepsilon_m)}(z^0_{j(\varepsilon_m)})| < \delta, \end{aligned}$$

dieser Ausdruck wird bei $\delta \to 0$ beliebig klein, d.h: $f(z_o) = 0$ und z_o ist eine Nullstelle von f.
Ganz analog zum 1. Schritt des Beweises ist die Nullstelle z_o von f isolierte Nullstelle. Der Satz von Rouché, Satz 9.22, sichert auch hier die Behauptung. Hier nutzen wir: $f_{j(\varepsilon_m)}$ hat die Nullstellenordnung k_o und somit gilt auch $\mathrm{ord}(f, z_o) = k_o$.

□

DEFINITION 10.8 (Schlichte Funktion)**.**
Eine KFKV $f: G \to \mathbb{C}$ nennen wir schlicht, falls f holomorph und injektiv ist (nicht biholomorph (surjektiv)).

SATZ 10.10 (Injektivitätssatz von Hurwitz)**.**
Es seien $G, \tilde{G} \subset \mathbb{C}$ Gebiete, die Folge $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ schlichter Funktionen, $f_j: G \to \tilde{G}$, sei lokal gleichmäßig konvergent gegen $f: G \to \mathbb{C}$.
Für die Grenzfunktion f gilt dann: $f \equiv \mathrm{const}$, oder f ist schlicht bei $f(G) \subset \tilde{G}$.

Beweis.
Die Holomorphie von f folgt unmittelbar aus dem Weierstraßschen Konvergenzsatz, Satz 8.6.
Wenn für die Grenzfunktion $f \equiv \mathrm{const}$ gilt, haben wir natürlich keine Injektivität (auch nicht zu erwarten).
Nehmen wir deshalb $f \not\equiv \mathrm{const}$ an. Wäre f nicht injektiv, so existieren $z_o, z_1 \in G$ mit $z_o \neq z_1$ und $f(z_o) = f(z_1) = w_o$. Wir formulieren den Satz von Rouché, Satz 9.22, als w_o-Stellen-Satz (Satz von Rouché $\to$ w_o-Stellen-Satz):
Wir betrachten $\hat{f}: G \to \mathbb{C}$ mit $\hat{f}(z) = f(z) - w_o$. Die Nullstellen von $\hat{f}$ liegen diskret, also $\exists \varepsilon_o, \varepsilon_1 > 0: \overline{K}(z_o, \varepsilon_o) \cap \overline{K}(z_1, \varepsilon_1) = \emptyset$ mit $\overline{K}(z_o, \varepsilon_o), \overline{K}(z_1, \varepsilon_1) \subset G$ $(\mathrm{ord}(\hat{f}, z_o), \mathrm{ord}(\hat{f}, z_1) > 0)$.
Mit Satz 10.9 (in disjunkten Mengen liegen immer Nullstellen der $\hat{f}_j(z) := f_j(z) - w_o$) erhalten wir unmittelbar einen Widerspruch zur Injektivität der f_j, somit ist die Annahme falsch und f ist injektiv.
Ganz analog zeigt man $f(G) \subset \tilde{G}$, denn wäre ein $w_1 \notin \tilde{G}$ mit $f(z) = w_1$ für ein $z \in G$, so schließen wir daraus, analog zu oben, dass $w_1 \in f_j(G)$ für fast alle $j \in \mathbb{N}$, eventuell $j > j_o$, also ist die Annahme falsch. □

SATZ 10.11 (Biholomorphie schlichter Funktionen)**.**
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $f: G \to \mathbb{C}$ schlicht. Dann haben wir

$$|f'(z)| > 0 \quad \forall z \in G.$$

Zusatz: $\tilde{G} = f(G)$ ist offen und $f^{-1}: \tilde{G} \to G$ ist holomorph mit

$$(f^{-1})'(w) = \left[f'(f^{-1}(w))\right]^{-1} \quad \textit{(Standardableitung der Umkehrfunktion).} \qquad (\#)$$

Beweis. Es ist nur noch $|f'(z)| \neq 0$ zu zeigen. (Vergleiche den Satz von der Gebietstreue, Satz 8.11, sowie Satz zur lokalen Biholomorphie, Satz 4.15.)
f^{-1} ist wohldefiniert und stetig (auch Satz 8.11).
Wir bezeichnen die Nullstellenmenge von f' mit

$$N[f'] = \{z \in G : \; f'(z) = 0\}.$$

$N[f']$ ist diskret (sonst Widerspruch und $f \equiv \text{const}$) und in G relativ abgeschlossen.
Wir wählen nun $z_o \in N[f']$, das heißt $f'(z_o) = 0$ mit $f(z_o) = w_o$. Dann hat

$$\tilde{f}(z) := f(z) - w_o \quad \forall z \in \overline{K}(z_o, r) \subset G$$

in z_o eine zweifache Nullstelle, $\operatorname{ord}(\tilde{f}, z_o) = 2$. Hier ist $N[f'] \cap \overline{K}(z_o, r) = \{z_o\}$.
Wir können r so wählen, dass zu vorgegebenem $z_1 \in K(z_o, r)$ mit $f(z_1) = w_1$ gilt:

$$0 < |w_1 - w_o| < \min_{\zeta \in S(z_o, r)} |\tilde{f}(\zeta)|.$$

Der Satz von Rouché, Satz 9.22, liefert (weil $f'(z_1) \neq 0$):
Der Wert w_1 wird in zwei verschiedenen Punkten $z_1 \neq z_2$ aus $K(z_o, r)$ angenommen. Das ist offensichtlich ein Widerspruch zur Injektivität. □

10.3 Der Riemannsche Abbildungssatz

THEOREM 1.1 (Der Riemannsche Abbildungssatz)**.**
Jedes nichtleere, einfach zusammenhängende Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$, kann biholomorph auf $K(0,1)$ abgebildet werden.

BEMERKUNG 10.12 (Eigenschaft der Abbildung im Riemannsche Abbildungssatz)**.**
Die Abbildung ist nach Theorem 1.1 ist konform, $G \neq \mathbb{C}$ (notwendige Bedingung), weil sonst nach Liouville $|f(\mathbb{C})| < 1$, also $f \equiv \text{const}$ wäre.
Sogar die Randzuordnung $\partial G \leftrightarrow S(0,1)$ kann (mindestens stetig) erzielt werden.

DEFINITION 10.9 (Q-Gebiete)**.**
Es sei $G \subset \mathbb{C}$. Wir nennen G ein Q-Gebiet (Gebiet mit Quadratwurzel-Eigenschaft), falls $0 \in G$ und falls $\forall f : \; G \to \mathbb{C}$, f holomorph mit $f(z) \neq 0 \; \forall z \in G$ eine Quadratwurzelfunktion $g : \; G \to \mathbb{C}$ existiert, das heißt $\forall z \in G : \; f(z) = g^2(z)$.

ANMERKUNG 10.13 ($0 \in G$-Bedingung)**.**
$0 \in G$ lässt sich immer durch simple Translation erreichen:

$$\tilde{z} \in G : \; \psi(z) = z - \tilde{z} \Rightarrow 0 \in \psi(G).$$

SATZ 10.14 (Einfach zusammenhängende Gebiet - Q-Gebiete)**.**
Jedes einfach zusammenhängende Gebiet G mit $0 \in G$ ist ein Q-Gebiet.

Beweis. Sei $f:\ G \to \mathbb{C}$, $\forall z \in G:\ f(z) \neq 0$. $\dfrac{f'}{f}(z)$ ist holomorph in G mit der Stammfunktion $h(z)$ (weil G einfach zusammenhängend, vergleiche Folgerung 10.8).
Sei $z_o \in G$ fest mit $f(z_o) \neq 0$, also existiert $w_o : \exp(w_o) = f(z_o)$.
Wir setzen nun $h(z_o) = w_o$ und berechnen:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\exp(h(z))}{f(z)}\right)}_{=0} = \frac{\exp(h(z))}{f(z)} \underbrace{\left(h'(z) - \frac{f'(z)}{f(z)}\right)}_{=0\text{, weil } h \text{ Stammfunktion}} = 0$$

$$\Rightarrow \exp(h(z)) = (\text{const}) \cdot f(z)$$

$$\exp(h(z_o)) = \exp(w_o) = f(z_o) \Rightarrow \text{const} = 1.$$

Somit setzen wir schließlich $g(z) = \exp(\frac{1}{2}h(z))$. □

BEMERKUNG 10.15 (Konstuktionsidee)**.**
Wählt man $f = z - \hat{z}$ mit $\hat{z} \notin G$, so gelangt man von G mit der biholomorphen Funktion g, $g:\ G \to G_1$, und einer geschickten Möbiustransformation zu $M_{\underline{\underline{A}}}(g(z))$ mit beschränktem $M_{\underline{\underline{A}}}(g(G))$.

LEMMA 10.16 (Abbildung von Q-Gebieten)**.**
Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Q-Gebiet und $h:\ G \to \tilde{G} \subset \mathbb{C}$ biholomorph mit $h(0) = 0$, so ist auch $\tilde{G}$ ein Q-Gebiet.

Beweis. Nach dem Satz von der Gebietstreue, Satz 8.11 , ist $\tilde{G}$ ein Gebiet.
Mit einfacher Verkettung nutzen wir aus, dass G ein Q-Gebiet ist.
Dazu sei $\tilde{f}:\ \tilde{G} \to \mathbb{C}:\ \tilde{f}(\tilde{z}) \neq 0$ und mit der Biholomorphie von h gilt $(\tilde{f} \circ h)(z) = g^2(z)$, da G Q-Gebiet ist. Somit hat die Quadratwurzel von $\tilde{f}$ die Darstellung

$$(\tilde{f} \circ h)(h^{-1}(\tilde{z})) = g^2(h^{-1}(\tilde{z})),$$

das heißt $\forall \tilde{z} \in \tilde{G}:\ \tilde{f}(\tilde{z}) = (g(h^{-1}(\tilde{z})))^2$. □

SATZ 10.17 (Q-Gebiet und $K(0,1)$)**.**
Jedes Q-Gebiet $G \neq \mathbb{C}$ kann biholomorph auf $K(0,1)$ abgebildet werden.

ANMERKUNG 10.18.
Mit Satz 10.14 liefert Satz 10.17 die Aussage des Theorems 1.1 (Riemannsche Abbildungssatz). Der Beweis von Satz 10.17 erfolgt über die Nutzung der nachfolgenden Lemmata.

DEFINITION 10.10 (Menge B_G)**.** *Mit B_G bezeichnen wir die Menge*

$$B_G := \{f:\ G \to K(0,1) \mid f \text{ schlicht, } f(0) = 0\}.$$

LEMMA 10.19. *$B_G \neq \emptyset$.*

Beweis. (Konstruktiv) Prinzip: Verschieben, Wurzel, Kontrahieren.
Speziell wählen wir (vergleiche Idee vor Satz 10.14) $\varphi(z) = z - z_o$ mit $z_o \notin G$, das heißt

$\varphi(z) \neq 0 \ \forall z \in G$ ($G \neq \mathbb{C}$). Wir erklären g_{z_o} analog zu Satz 10.14 und erhalten (ob des eingeschränkten Argument-Bereiches):

$$\exists g_{z_o} = g_\varphi : \ \mathbb{C} \setminus (g_{z_o}(G)) \supset -g_{z_o}(G) \neq \emptyset, \quad -g_{z_o}(G) \text{ Gebiet},$$

das heißt $\exists w_o, r: \ \overline{K}(w_o, r) \subset -g_{z_o}(G)$ (also im Komplement von $g_{z_o}(G)$).
Schließlich setzen wir

$$\psi(w) = \frac{r}{2}\left(\frac{1}{w-w_o} - \frac{1}{g_{z_o}(0) - w_o}\right) \quad \forall w \in g_{z_o}(G) \ (w = g_{z_o}(z)),$$

das heißt $f := \psi \circ g_{z_o} \circ \varphi$ ist Element von $B_G \ \forall z \in G$. □

Lemma 10.20 (Dehnungslemma)**.**
Ist $G \neq K(0,1)$ mit Q-Gebiet $G \subset K(0,1)$, so existiert eine Dehnung $\beta: \ G \to K(0,1)$, dabei nennen wir β Dehnung, wenn β schlicht mit $\beta(0) = 0$ ist, sowie $|\beta(z)| > |z| \ \forall z \in G \setminus \{0\}$ gilt.

Beweis. (Konstruktiv)

1.) Schritt: Wir bauen eine Art Gegenstück zu β, eine sogenannte „strikte Kontraktion“: $\mathfrak{K}: K(0,1) \to K(0,1)$ mit $\mathfrak{K}(0) = 0$ und $|\mathfrak{K}(z)| < |z| \ \forall z \neq 0$.
Wir verwenden $M_\kappa \in \operatorname{Aut}(K(0,1))$ bei $\underline{\underline{A}}_{\vartheta,\kappa} = \underline{\underline{A}}_{\pi,\kappa}$, explizit:

$$M_\kappa(z) = \frac{z-\kappa}{\overline{\kappa}z - 1}, \quad \kappa \in K(0,1).$$

Hier gilt:

$$z = (M_\kappa \circ M_\kappa)(z) \quad \forall z \in K(0,1), \ \kappa \text{ fix.} \tag{$\circ$}$$

Wir setzen $q: \ \mathbb{C} \to \mathbb{C}: \ q(z) := z^2$ (reine Definition) und mit fixem κ:
$\mathfrak{K}_\kappa(z) := (M_{\kappa^2} \circ q \circ M_\kappa)(z)$ (analog) und erhalten sofort:

$$z = 0: \ M_\kappa(0) = \kappa, \ q(z) = \kappa^2, \ M_{\kappa^2}(\kappa^2) = 0,$$

also $\mathfrak{K}_\kappa(0) = 0$.
Wir beachten dabei, dass $M_\kappa, M_{\kappa^2} \in \operatorname{Aut}(K(0,1))$ und das Schwarzsche Lemma, Satz 8.20: $|\mathfrak{K}_\kappa(z)| \leq |z|$.
Wäre hier in $z_o \neq 0$ Gleichheit erfüllt, so wäre $\mathfrak{K}_\kappa$ eine Drehung und $q \in \operatorname{Aut}(K(0,1))$. Dies ist ein Widerspruch (da q nicht injektiv), also ist $\mathfrak{K}_\kappa$ eine strikte Kontraktion.

2.) Schritt: Wir wählen κ und bauen β.
Weil $G \neq K(0,1) \ \exists \kappa \in K(0,1)$ mit $\kappa^2 \notin G$. Weil also $\kappa^2 \notin G: \ M_{\kappa^2}(z) \neq 0 \ \forall z \in G$.
Wir nutzen die „Wurzel“ g (vergleiche Satz 10.14) und beachten, dass

$$(g(0))^2 = M_{\kappa^2}(0) = \kappa^2 = (\pm\kappa)^2.$$

Wir wählen den „Zweig“ von g so, dass $g(0) = \kappa$ (#) und setzen nun

$$\beta = \beta_\kappa: \ \beta_\kappa(z) := (M_\kappa \circ g)(z) \quad \forall z \in G,$$

dann gilt $\forall z \in G$:

$$[\text{Definition: } M_{\kappa^2}(z) = q(g(z)) = g^2(z)]$$
$$z = (\mathfrak{K}_\kappa \circ \beta_\kappa)(z) = (M_{\kappa^2} \circ q \circ \underbrace{M_\kappa \circ M_\kappa}_{\text{Identität } (\mathfrak{I})} \circ g)(z) = (M_{\kappa^2} \circ \underbrace{q \circ g}_{M_{\kappa^2}})(z), \qquad (\#\#)$$

mit (#) gilt

$$\beta_\kappa(0) = (M_\kappa \circ g)(0) = M_\kappa(\kappa) = 0 \quad (\text{weil } g(0) = \kappa \ (\#))$$

und mit (##) ist β_κ injektiv (($\mathfrak{I}$) klappt nur bei Verkettung bijektiver Abbildungen). Schließlich haben wir noch

$$|z| = |(\mathfrak{K}_\kappa \circ \beta_\kappa)(z)| \overset{\text{1. Schritt}}{<} |\beta_\kappa(z)|.$$

nach dem Schritt (i). □

LEMMA 10.21 (Menge B_G - Biholomorphiebedingung)**.**
Sei $G \neq \mathbb{C}$ ein Q-Gebiet und $z_o \in G$, $z_o \neq 0$. Gilt für

$$h \in B_G : |h(z_o)| = \sup\{|f(z_o)| : f \in B_G\},$$

dann ist $h:\ G \to K(0,1)$ biholomorph.

Beweis. Es ist $h \in B_G$, also ist h injektiv. Das Biholomorphiekriterium (Satz 10.11) liefert: $h:\ G \to h(G) \subset K(0,1)$ ist biholomorph. Nach Lemma 10.16 ist $h(G)$ ein Q-Gebiet.
Es bleibt nur noch zu zeigen:

$$\tilde{G} = h(G) = K(0,1). \qquad (\sim)$$

Wäre ($\sim$) falsch, dann existierte nach Lemma 10.20 eine Dehnung β, β schlicht.
Wir setzen $\tilde{h} := \beta \circ h$ (mit $\tilde{h} \in B_G$). Wegen Lemma 10.20 haben wir:

$$|\tilde{h}(z_o)| = |\beta(h(z_o))| > |h(z_o)|,$$

dies ist offensichtlich ein Widerspruch zur Auswahl von h, also folgt die Behauptung. □

Mit diesen Vorbereitungen können wir nun den Riemanschen Abbildungssatz in Form von Satz 10.17, beziehungsweise des Theorems 1.1, beweisen:

Beweis. [Satz 10.17]
Es seien $G \neq \mathbb{C}$ ein Q-Gebiet (jedes einfach zusammenhängende Gebiet ist ein Q-Gebiet), $z_o \in G \setminus \{0\}$ beliebig, aber fest und $B_G \neq \emptyset$.
Wir setzen

$$\lambda := \sup\{|f(z_o)| :\ f \in B_G\},$$

das heißt $\exists \{f_j\}_{j=1}^\infty \subset B_G$ (als Supremumfolge) mit

$$\lim_{j\to\infty} |f_j(z_o)| = \lambda.$$

Die Folge $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ ist als Folge gleichmäßig beschränkt, weil $f_j(G) \subset K(0,1)\ \forall j \in \mathbb{N}$.
Nach dem Satz von Montel, Folgerung 8.9, existiert eine Teilfolge $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ mit $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \to h$ (lokal gleichmäßig in G).
Die Grenzfunktion h ist holomorph mit $h(0) = 0$ und $h \not\equiv$ const (nach Konstruktion).
Nach dem Hurwitzschen Injektivitätssatz, Satz 10.10 ist h schlicht, $h \in B_G$ sowie $h(G) \subset K(0,1)$. Mit dieser Konstruktion liefert Lemma 10.21 die Behauptung:

$$h(G) = K(0,1).$$

$\square$

11 Ergänzungen

Windungs-, beziehungsweise Umlaufzahl

Idee:

Cauchysche Integralformel:

$$\int_{\gamma=S(z_o,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} 2\pi i f(z) & \text{,falls } z \in K(z_o,r) \\ 0 & \text{,falls } z \notin K(z_o,r) \end{cases}$$

bei $z \in K(z_o,r)$:

$$\int_{\underbrace{\gamma \cup \gamma \cup \ldots \cup \gamma}_{N\text{mal}}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = (2\pi i f(z)) \cdot N, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Analog die Umkehrung der Orientierung:

$$\int_{\gamma^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = (-1) \cdot 2\pi i f(z).$$

DEFINITION 11.1. *Sei $\gamma\colon\ [a,b] \to \mathbb{C}$ geschlossen (mehrfache Umschlingung von Punkten erlaubt) und $z_o \notin \gamma([a,b])$. Wir setzen*

$$\operatorname{ind}(\gamma, z_o) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z_o} d\zeta$$

als Windungszahl (Umlaufzahl), beziehungsweise Index von γ bezüglich z_o.

BEMERKUNG 11.1. $\operatorname{ind}(\gamma, z_o) \in \mathbb{Z},\ \gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{z_o\}$.

Beweis. O.B.d.A. sei g stetig differenzierbar. Wir Erklären die Hilfsfunktion

$$g(t) := \exp\left(-\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_o} ds\right)(\gamma(t) - z_o).$$

$g\colon\ [a,b] \to \mathbb{C}$ ($g = \text{const}$), denn:

$$g'(t) = \exp\left(-\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_o} ds\right)(-\gamma'(t) + \gamma'(t)) = 0$$
$$\Rightarrow (\gamma(a) - z_o) = g(a) = g(b) = (\gamma(b) - z_o)$$

(Differentiation Parameterintegral). Vergleiche Definition 11.1:

$$1 = \exp(-2\pi i \operatorname{ind}(\gamma, z_o)).$$

Hieraus folgt die Behauptung (einfach oben mit Faktor $-\int_a^a \ldots = 0$, $e^0 = 1$). □