

Funktionentheorie

Vorlesungsskriptum* von Bernd Rummler SoSe 2021

22. Juni 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
2	Die Riemannsche Zahlenkugel und \mathbb{C}_o als kompaktifizierte Gaußsche Zahlenebene	3
2.1	Der Topologische Raum	3
2.2	Stetige Abbildungen von topologischen Räumen, kompakte topologischen Räume und Mengen	5
2.3	Die Gaußsche Zahlenebene, chordale Entfernung (chordale Metrik), stereographische Projektion	6
3	Komplexwertige Funktionen komplexer Variablen	10
3.1	Auffassung und Definition	10
3.2	Differentiationsregeln, Differentiationsoperatoren	14
4	Biholomorphe und konforme Abbildungen	16
4.1	Möbiustransformationen	16
4.2	Konforme Abbildungen, holomorphe invertierbare KFKV und Biholomorphie .	19
5	Potenzreihen und elementare Funktionen	24
5.1	Standardwerkzeuge und formale Potenzreihen	24
5.2	Elementare Funktionen (Auswahl)	27
6	Integration von komplexwertigen Funktionen komplexer Variablen	29
6.1	Integration in \mathbb{C} im Sinne von Kurvenintegralen 2. Art, Komplexe Wegintegrale	29
6.2	Goursat-Lemma, Cauchyscher Integralsatz für sternförmige Gebiete	33
7	Cauchysche Integralformel, Potenzreihen und Differenzierbarkeitseigenschaften holomorpher Funktionen	37
7.1	Cauchysche Integralformel und deren erste Verallgemeinerungen	37

*Herzlichen Dank Herrn Robert Lampel für das Erstellen der ersten LaTeX-Version meines Skriptes

7.2	Lokale Darstellung holomorpher Funktionen durch Potenzreihen	42
8	Grundeigenschaften holomorpher Funktionen	45
8.1	Satz von Liouville, Identitätssatz	45
8.2	Gebietstreue, Maximumprinzip	48
8.3	Das Schwarzsche Lemma und Automorphismen von $K(0, 1)$	51
9	Isolierte singuläre Stellen holomorpher Funktionen und die Laurententwicklung	53
9.1	Erklärung und Konvergenz der Laurententwicklung	53
9.2	Weitere Kriterien zur Charakterisierung isolierter singulärer Stellen	57
9.3	Der Residuensatz	62
9.4	(Unmittelbare) Anwendungen des Residuensatzes	64
10	Der Riemannsche Abbildungssatz	67
10.1	Homotopie, Zusammenhang, einfache Fortsetzungsstrategien	67
10.2	Hurwitzsche Sätze, schlichte Funktionen	71
10.3	Der Riemannsche Abbildungssatz	73
11	Ergänzungen	78