Übungsaufgaben: Partielle Differentialgleichungen I
Serie 10

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau , PD Dr. B. Rummler

Wintersemester 2020/21

1) Beweisen Sie, dass ein stetiger linearer (Spur-)Operator $\gamma : \mathbb{W}_1^1(B_1(\underline{0})) \to \mathbb{L}_1(\partial B_1(\underline{0}))$ existiert, so dass

$$\forall\, u \in \mathbb{C}^1(\overline{B_1(\underline{0})}) : \qquad u_{|_{\partial B_1(\underline{0})}} = \gamma(u) \qquad\qquad \text{gilt .}$$

Hinweis. Beweisen Sie die Behauptung

$$\|u_{|_{\partial B_1(\underline{0})}}\|_{\mathbb{L}_1(\partial B_1(\underline{0}))} \leq C\|u\|_{\mathbb{W}_1^1(B_1(\underline{0}))}$$

mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes zunächst für $u \in \mathbb{C}^1(\overline{B_1(\underline{0})})$ und wenden Sie anschließend ein Dichtheitsargument an.

2) (Abgabe-Aufgabe) Gegeben seien ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ und eine Funktion $f \in \mathbb{L}_2(\Omega)$. Eine Funktion $u \in \mathbb{H}_o^2(\Omega) \cong \mathbb{W}_{2,o}^2(\Omega)$ heißt eine schwache Lösung des Problems

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \underline{\nu}} = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$*$}$$

falls für alle Testfunktionen $\psi \in \mathbb{H}_o^2(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Omega \Delta u\, \Delta\psi\, d\underline{x} = \int_\Omega f\psi\, d\underline{x}.$$

Man beweise, dass zu jedem $f \in \mathbb{L}_2(\Omega)$ genau eine schwache Lösung $u \in \mathbb{H}_o^2(\Omega)$ des Problems $(*)$ existiert.
Hinweis. Betrachten Sie auf dem linearen Vektorraum $W_{2,o}^2(\Omega)$ das Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle_{\tilde{\mathbb{H}}_o^2} := \int_\Omega \Delta u\, \Delta v\, d\underline{x}$$

und zeigen Sie, dass dieses eine zu $\|\,.\,\|_{\mathbb{H}_o^2(\Omega)}$ äquivalente Norm induziert.

3) Sei $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ ein beschränktes Gebiet. Wir nennen $u \in \mathbb{H}_o^1(\Omega)$ eine schwache Oberlösung für $-\Delta u \geq 0$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$, falls für alle *nichtnegativen* Testfunktionen $\psi \in \mathbb{H}_o^1(\Omega)$ gilt:

$$u \in \mathbb{H}_o^1(\Omega), \qquad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\psi\, d\underline{x} \geq 0.$$

Man zeige, dass für solche schwachen Oberlösungen stets gilt:

$$u \geq 0 \quad \text{f.ü. in } \Omega.$$

- -

BITTE WENDEN!!!

4) Man beweise, dass die Funktion $\gamma : (0,\infty) \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$

$$\gamma(t, \underline{x}) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{||\underline{x}||^2}{4t}}$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\gamma_t - \Delta\gamma = 0$$

ist.

5) Sei $n = 1$ und $u(t,x) = v\left(\frac{x^2}{t}\right)$ für $t > 0$, $x > 0$.

(a) Man zeige, dass

$$u_t = u_{xx} \qquad \text{für } t > 0, x > 0$$

genau dann, wenn

$$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0 \qquad \text{für } z > 0 \qquad \text{gilt .} \tag{$*$}$$

(b) Man zeige, dass die allgemeine Lösung von $(*)$

$$v(z) = c_1 \int_1^z e^{-s/4} s^{-1/2}\, ds + c_2$$

lautet.

(c) Man leite $v\left(\frac{x^2}{t}\right)$ bezüglich $x > 0$ ab und man wähle eine spezielle Konstante c_1 so, dass man für $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x$ die eindimensionale Fundamentallösung erhält.