# Übungsaufgaben: Partielle Differentialgleichungen I
## Serie 11

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau , PD Dr. B. Rummler

Wintersemester 2020/21

1) (Abgabe-Aufgabe) $u$ sei eine glatte Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{E}^n.$$

(a) Man beweise, dass für $\lambda \in \mathbb{R}$

$$u_\lambda(t, \underline{x}) := u(\lambda^2 t, \lambda \underline{x})$$

ebenfalls eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung ist.

(b) Mit (a) beweise man, dass

$$v(t, \underline{x}) := \underline{x} \cdot \underline{\nabla} u(t, \underline{x}) + 2t \frac{\partial u(t, \underline{x})}{\partial t}$$

eine weitere Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung ist.

2) $\varphi : [0, \pi] \to \mathbb{E}^1$ sei eine stetige Funktion mit $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Zeigen Sie die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $u$ für das Anfangs-Randwertproblem der homogenen Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \text{auf } (0,\infty) \times (0,\pi), \\ u(0,x) = \varphi(x), & x \in [0,\pi], \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t \in (0,\infty)\,, \end{cases}$$

mit $u \in \mathbb{C}_b^0([0,\infty) \times [0,\pi]) \cap C^\infty((0,\infty) \times [0,\pi])$ im Sinne räumlicher Einschränkung. *Hinweis.* Man setze das Anfangsdatum $\varphi$ ungerade und $2\pi$-periodisch als stetige Funktion nach $\mathbb{R}$ fort und benutze den Existenz- und Eindeutigkeitssatz auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}$. Man zeige, dass für diese Lösung gilt: $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$.

3) Sei $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ ein beschränktes reguläres Gebiet, $\Omega_T = (0,T] \times \Omega$ ein entsprechender Raum-Zeit-Zylinder und $u \in \mathbb{C}^{1,2}(\overline{\Omega_T})$ eine Lösung des Anfangs-Randwertproblems:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega_T, \\ u|_{[0,T] \times \partial\Omega} = 0\,, \\ u(0,\,.\,) = \varphi \in \mathbb{C}^2(\overline{\Omega}). \end{cases} \tag{1}$$

Es sei auch $u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \in \mathbb{C}^{1,2}(\overline{\Omega_T})$ und $\varphi(\underline{x}) \not\equiv 0$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Bitte wenden!!!

Betrachten Sie *das zweite Moment der Temperatur* des Körpers $\Omega$ zur Zeit $t$:

$$\mathcal{E}(t) = \|u(t,\,.\,)\|^2_{\mathbb{L}_2(\Omega)}.$$

Beweisen Sie, dass für jedes $0 \leq t_1 < t < t_2 \leq T$ gilt: $\mathcal{E}(t) > 0$ und

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(t_1)^{\frac{t_2-t}{t_2-t_1}}\,\mathcal{E}(t_2)^{\frac{t-t_1}{t_2-t_1}}. \tag{2}$$

*Hinweis.* Man studiere $\mathcal{E}'(t)$ und $\mathcal{E}''(t)$ und zeige

$$\mathcal{E}''(t) = 4\int_\Omega (u_t)^2\,d\underline{x}.$$

Benutzen Sie die Höldersche Ungleichung, um zu zeigen:

$$(\mathcal{E}'(t))^2 \leq \mathcal{E}(t)\mathcal{E}''(t).$$

Für $t > 0$ nahe 0 hat man $\mathcal{E}(t) > 0$; für diese Zeiten existiert $t \mapsto \log\mathcal{E}(t)$; man zeige die Konvexität dieser Funktion und folgere daraus (2) für diese Zeiten. Nehmen Sie nun an, dass eine minimale Zeit $t_2 > 0$ existiert mit $\mathcal{E}(t_2) = 0$ und leiten Sie daraus mittels (2) einen Widerspruch her.

Überlegen Sie sich, dass man so für das Anfangsrandwertproblem (1) in der beschriebenen Funktionenklasse zumindest Eindeutigkeit rückwärts in der Zeit hat. Ansonsten ist das Rückwärtslösen der Wärmeleitungsgleichung schlecht gestellt und meist auch unmöglich.

4) Sei $\varphi : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$ eine beschränkte stetige Funktion. Sei $u : [0,\infty) \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$ eine beschränkte Lösung des Cauchyproblems

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n =: \mathbb{R}^n_\infty, \\ \quad u(0,\,.\,) = \varphi & \text{in } \mathbb{E}^n, \end{cases}$$

wobei $u \in \mathbb{C}^0_b([0,\infty)\times\mathbb{R}^n) \cap C^{1,2}((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$. Man zeige ohne die Verwendung von Satz 7.8 der Vorlesung:

$$\sup_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^n} u = \sup_{\mathbb{R}^n}\varphi, \qquad \inf_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^n} u = \inf_{\mathbb{R}^n}\varphi.$$

*Hinweis.* Man wähle $M > 0$, so dass $|u| \leq M$. Für beliebiges, aber festes $R > 0$ arbeite man auf $[0,\infty) \times B_R(\underline{0})$ mit der Vergleichsfunktion

$$v(t,\underline{x}) := \frac{4Mn}{R^2}\left(t + \frac{||\underline{x}||^2}{2n}\right) + \sup_{\mathbb{R}^n}\varphi.$$