Übungsaufgaben: Partielle Differentialgleichungen I
Serie 12

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau , PD Dr. B. Rummler

Wintersemester 2020/21

1) Betrachten Sie die Funktion $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}) \cong C^\infty(\mathbb{E}^1)$,

$$\psi(t) := \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{falls } t > 0, \\ 0 & \text{falls } t \le 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $t > 0$ die Abschätzung gilt:

$$\left| \left(\frac{d}{dt} \right)^k \psi(t) \right| \le k! \left(\frac{2}{t} \right)^k e^{-1/(4t^2)}.$$

Hinweis. Betrachten Sie $z \mapsto \psi(z)$ für $\mathrm{Re}(z) > 0$ als holomorphe Funktion. Für $t > 0$ betrachten Sie den Weg $[0, 2\pi] \ni s \mapsto \gamma(s) := t + (t/2)e^{is}$. Verwenden Sie die Cauchysche Integralformel. Zeigen Sie, dass

$$\forall x \in [-1, 1] : \qquad \frac{3 + 4x + 2x^2}{(\frac{5}{4} + x)^2} \ge 1.$$

2) Betrachten Sie wie in Aufgabe 12.1 die Funktion $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}) \cong C^\infty(\mathbb{E}^1)$,

$$\psi(t) := \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{falls } t > 0, \\ 0 & \text{falls } t \le 0, \end{cases}$$

sowie für $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{E}^1$

$$u(t, x) := \begin{cases} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^k \psi(t) \frac{x^{2k}}{(2k)!} & \text{falls } t > 0, \\ 0 & \text{falls } t \le 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) $u \in C^0([0, \infty) \times \mathbb{R}) \cap C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$. Es gilt sogar $C^\infty((-\infty, \infty) \times \mathbb{R})$!

(b) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ in $(0, \infty) \times \mathbb{R}$, $u(0, x) \equiv 0$.

3) Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Anfangsdatum $u_0 \in \mathbb{R}$ das maximale Existenzintervall (T^-, T^+) für das Anfangswertproblem

$$\frac{du}{dt} + u = |u|^2 u \quad \text{für} \quad t \in (T^-, T^+), \qquad u(0) = u_0.$$

- -

BITTE WENDEN!!!

4) Sei $-\infty < t_0 < t_1 \leq \infty$, $\psi : [t_0, t_1) \to \mathbb{E}^1$ sei stetig. Es gebe Konstanten $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$, so dass

$$\forall t \in [t_0, t_1) : \qquad \psi(t) \leq a + b \int_{t_0}^{t} \psi(\tau)\, d\tau.$$

Dann folgt:

$$\forall t \in [t_0, t_1) : \qquad \psi(t) \leq a \cdot e^{b(t-t_0)}.$$

Hinweis. Zeigen Sie mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\forall t \in [t_0, t_1) : \qquad \psi(t) < (a + \varepsilon) \cdot e^{b(t-t_0)}.$$

5) (Abgabe-Aufgabe) Sei $T > 0$, $f \in C^1(\mathbb{E}^1)$, $\varphi \in \mathbb{C}_b^0(\mathbb{R}^n)$. Weiter seien $u, v \in \mathbb{C}_b^0([0,T] \times \mathbb{R}^n) \cap C^{1,2}((0,T] \times \mathbb{R}^n)$ Lösungen des Cauchyproblems, wie in Satz 9.2 der Vorlesung konstruiert:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \circ u & \text{in } \mathbb{R}^n_T, \\ u(0,\, .\,) = \varphi & \text{in } \mathbb{R}^n; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = f \circ v & \text{in } \mathbb{R}^n_T, \\ v(0,\, .\,) = \varphi & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Gronwallschen Lemmas Eindeutigkeit, d.h.

$$u = v \ \text{ in } \ \overline{\mathbb{R}^n_T}.$$

6) Sei $m > 1$ eine feste reelle Zahl. Man bestimme Lösungen $u \geq 0$ für die nichtlineare Gleichung

$$m \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta(u^m) = 0, \qquad \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n,$$

mit Hilfe des Separations- und Selbstähnlichkeitsansatzes

$$u(t,x) = h(t) f(\xi), \qquad \xi = \frac{\|x\|^2}{t^\sigma},$$

wobei die positive Zahl σ geeignet zu bestimmen ist. Man mache den Ansatz $h(t) = t^{-n\sigma/2}$, leite die gewöhnliche Differentialgleichung für f her und löse diese so, dass man bekommt:

$$\begin{cases} u_m(t,x) = t^{-\frac{n}{\kappa}} \left\{ 1 - \gamma_m \left(\frac{\|x\|^2}{t^{2/\kappa}} \right) \right\}_+^{\frac{1}{m-1}}, & t > 0, \\ \gamma_m = \frac{m-1}{2\kappa}, \quad \kappa = n(m-1) + 2. \end{cases}$$

In welchem Sinne existiert $\Delta(u_m^m)$?

Man beweise, dass u_m für $m \to 1 + 0$ lokal gleichmäßig in $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ gegen ein Vielfaches der Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung strebt.