Übungsaufgaben: Partielle Differentialgleichungen I
Serie 9

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau , PD Dr. B. Rummler

Wintersemester 2020/21

1) (Abgabe-Aufgabe) Gegeben sei ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{E}^n$. Sei u eine auf $\overline{\Omega}$ stetige Funktion; wir bezeichnen mit:
$$\Phi_p(u) = \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |u|^p \, d\underline{x} \right)^{\frac{1}{p}}.$$
Man beweise, dass:
   (a) $[1, \infty) \ni p \mapsto \Phi_p(u)$ ist (i.A. nicht strikt) monoton wachsend.
   (b) $\lim\limits_{p\to\infty} \Phi_p(u) = \sup\limits_\Omega |u|$.

2) Gegeben seien ein reguläres C^2-glattes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ und eine Funktion $u \in \mathbb{C}^2(\overline{\Omega})$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Man beweise die folgende Ungleichung:
$$\text{Für beliebiges } \varepsilon > 0 \text{ gilt:} \qquad \int_\Omega \|\underline{\nabla} u\|^2_{\mathbb{E}^n} \, d\underline{x} \le \varepsilon \int_\Omega (\Delta u)^2 \, d\underline{x} + \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega u^2 \, d\underline{x}.$$
Gilt diese Ungleichung auch für $u \in \mathbb{W}^2_{2,0}(\Omega)$?

Hinweis. Nutzen Sie die Idee des Beweises der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung in 0.11 .

3) Man beweise, dass eine Funktion u in einem beschränkten Gebiet Ω schwach differenzierbar ist genau dann, wenn sie in einer Umgebung eines jeden Punktes schwach differenzierbar ist. *Hinweis.* Benutzen Sie eine geeignete Zerlegung der Eins.

4) Sei $-\infty < a < b < \infty$. Zeigen Sie , dass für alle $u \in \mathbb{C}^1([a, b])$ gilt:
$$\text{Hölderkonstante von } u \text{ zum Hölderindex } \frac{1}{2}: \qquad [u]_{C^{0,1/2}([a,b])} \le \|u'\|_{\mathbb{L}_2(a,b)},$$
wobei $[u]_{C^{0,1/2}([a,b])} := \sup\limits_{\substack{x,y \\ x\neq y}} \dfrac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{1/2}}$. Schließen Sie hieraus, dass $\mathbb{W}^1_2(a, b)$ stetig in den Hölderraum $\mathbb{C}^{0,1/2}([a, b])$ eingebettet ist, wobei die Norm auf $C^{0,1/2}([a, b])$ (als lin. VR) erklärt werde durch:
$$\|u\|_{\mathbb{C}^{0,1/2}([a,b])} := \|u\|_{\mathbb{C}^0([a,b])} + [u]_{C^{0,1/2}([a,b])}.$$
Hinweis. Zeigen Sie die Ungleichung zunächst für klassisch differenzierbare Funktionen, und arbeiten Sie dann mit Hilfe eines Dichtheitsarguments.

5) Zeigen Sie, dass für alle $u \in \mathbb{W}^1_{1,0}(\mathbb{R}^2)$ gilt:
$$\|u\|_{\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^2)} \le \| \, \|\underline{\nabla} u\|_{\mathbb{E}^n} \, \|_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R}^2)}$$
Hinweis. Arbeiten Sie zunächst mit glatten Funktionen, und wenden Sie zweimal den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung an.