Übungsaufgaben: Partielle Differentialgleichungen I
Serie 8

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau , PD Dr. B. Rummler

Wintersemester 2020/21

1) Betrachten Sie den Annulus $A(\sigma,\varrho,x_0) := \{\underline{x} \in \mathbb{E}^n : \sigma < \|\underline{x}-\underline{x}_0\|_{\mathbb{E}^n} < \varrho\}$ mit $0<\sigma<\varrho$, $n \geq 3$. Zeigen Sie, dass die Greensche Funktion $G = G_{-\Delta,A(\sigma,1,0)}$ zu $-\Delta$ in $A(\sigma,1,0)$ mit $0<\sigma<1$ durch

$$G(\underline{x},\underline{y}) := \frac{1}{(n-2)n\breve{e}_n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\sigma^{k(n-2)}}{\|\underline{y}-\sigma^{2k}\underline{x}\|_{\mathbb{E}^n}^{n-2}} - \frac{\sigma^{k(n-2)}}{\left\|\,\|\underline{x}\|_{\mathbb{E}^n}\underline{y} - \frac{\sigma^{2k}}{\|\underline{x}\|_{\mathbb{E}^n}}\underline{x}\right\|_{\mathbb{E}^n}^{n-2}}\right).$$

gegeben ist. Diskutieren Sie insbesondere zunächst die Konvergenzeigenschaften dieser Reihendarstellung.

2) Sei $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ ein reguläres Gebiet mit C^2-glattem Rand. Zeigen Sie, dass Ω in jedem $\underline{x}_o \in \partial\Omega$ einer äußeren Kugelbedingung genügt, d.h. für jedes $\underline{x}_o \in \partial\Omega$ existiert eine Kugel $B_R(\underline{x}_1)$ mit $\{\underline{x}_o\} = \overline{B_R(\underline{x}_1)} \cap \overline{\Omega}$.

   Hinweis. Mittels einer geeigneten Drehung um den Punkt $\underline{x}_o$ überführe man das Gebiet Ω in ein Gebiet Ω', wobei $\underline{x}_o$ unverändert bleibt, so dass sich der Rand von Ω' in einer Umgebung von $\underline{x}_o$ der Form $V = U \times (a,b)$ als Graph einer C^2-Funktion f mit horizontaler Tangentialhyperebene darstellen lässt.

   D.h.: $V \cap \partial\Omega' = \{\begin{bmatrix}\underline{x}'\\ x_n\end{bmatrix} \in \mathbb{E}^n : \underline{x}' = [x_1 \ \ldots, x_{n-1}]^T \in U, x_n = f(\underline{x}')\}$,

   $V \cap \Omega' = \{\begin{bmatrix}\underline{x}'\\ x_n\end{bmatrix} \in \mathbb{E}^n : \underline{x}' \in U, a < x_n < f(\underline{x}')\}$, $\underline{\nabla}\, f(\underline{x}'_o) = 0$.

3) Seien $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ zwei Multiindizes und u eine lokal integrierbare Funktion auf einem Gebiet Ω. Außerdem möge die schwache Ableitung $D^{\underline{\beta}}u$ existieren.
   Man beweise: Existiert eine der zwei schwachen Ableitungen $D^{\underline{\alpha}+\underline{\beta}}\,u$ oder $D^{\underline{\alpha}}\left(D^{\underline{\beta}}\,u\right)$, dann existieren beide und sind fast überall gleich in Ω.

4) Bestimmen Sie alle $\beta \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion

$$u(\underline{x}) \ = \ \|\underline{x}\|_{\mathbb{E}^n}^{\beta}, \quad \underline{x} \in (B_1(\underline{0}) \setminus \{\underline{0}\}) \subset \mathbb{E}^n$$

   zu $\mathbb{W}_1^1(B_1(\underline{0}))$ gehört.