Übungsaufgaben: Partielle Differentialgleichungen I
Serie 7

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau , PD Dr. B. Rummler

Wintersemester 2020/21

1) Betrachten Sie als spezielle Möbiustransformation die reelle Inversion im Sinne von $\underline{\Phi} : D(\underline{\Phi}) := \mathbb{E}^n \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{E}^n \setminus \{\underline{0}\}$, definiert durch

$$\underline{\Phi}(\underline{x}) = \frac{1}{||\underline{x}||^2_{\mathbb{E}^n}} \underline{x} \quad \underline{x} \in \mathbb{E}^n \setminus \{\underline{0}\}.$$

(a) Zeigen Sie: $\underline{\Phi}$ ist konform. (vgl. zur Definition die Aufgabe 6.3 und die einfache Winkelbeziehung:

$$\frac{\underline{\Phi}(\underline{x})^T \underline{\Phi}(\underline{y})}{||\underline{\Phi}(\underline{x})||_{\mathbb{E}^n} ||\underline{\Phi}(\underline{y})||_{\mathbb{E}^n}} = \frac{\underline{x}^T \underline{y}}{||\underline{x}||_{\mathbb{E}^n} ||\underline{y}||_{\mathbb{E}^n}} \qquad \forall \underline{x}, \underline{y} \in D(\underline{\Phi}) \;.)$$

(b) Sei $R > 0$. Beweisen Sie, dass $\underline{\Phi}$ die Sphäre $\{\underline{x} \in \mathbb{E}^n \setminus \{\underline{0}\} : ||\underline{x} - R \cdot \underline{e}_n||_{\mathbb{E}^n} = R\}$ auf die Hyperebene $H_R = \mathbb{R}^{n-1} \times \left\{\frac{1}{2R}\right\} \subset \mathbb{E}^n$ abbildet. Schließen Sie hieraus, dass $\underline{\Phi}$ die Kugel $B_{1/2}(\frac{1}{2} \cdot \underline{e}_n)$ konform auf den Halbraum $\{\underline{x} \in \mathbb{E}^n : x_n > 1\}$ abbildet.

(c) Zeigen Sie, dass für $u \in C^2(D(\underline{\Phi}))$ und $\underline{x} \in D(\underline{\Phi})$ gilt: (vgl.auch Aufgabe 6.3)

$$(\Delta u \circ \underline{\Phi})(\underline{x}) = ||\underline{x}||^{n+2}_{\mathbb{E}^n} \Delta \left(||\underline{x}||^{2-n}_{\mathbb{E}^n} (u \circ \underline{\Phi})(\underline{x}) \right).$$

2) Sei $\Omega \subset \mathbb{E}^n$, $n \geq 3$, eine offene, beschränkte Menge. Die Voraussetzungen von Satz 3.2. aus der Vorlesung seien wie folgt abschwächt: Die Funktion f sei reellwertig und bei $p > \frac{n}{2}$ gelte im Repräsenten-Sinne von Äquivalenzklassen: $f \in \mathbb{L}_p(\Omega)$. Zeigen Sie, dass für das Newton-Potential

$$V(\underline{x}) := \frac{1}{(n-2)n\breve{e}_n} \int\limits_{\Omega} \frac{f(\underline{y})}{||\underline{x} - \underline{y}||^{n-2}_{\mathbb{E}^n}} \, d\underline{y} \qquad \text{gilt:}$$

(a) Das Newton-Potential $V : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$ ist wohldefiniert und genügt mit einer Konstanten $C_1 = C_1(\Omega, p) > 0$ einer Abschätzung:

$$|V(\underline{x})| \leq \frac{C_1}{1 + \|\underline{x}\|^{n-2}_{\mathbb{E}^n}} \|f\|_{\mathbb{L}_p(\Omega)}.$$

(b) Unter der Voraussetzung $n > p > \frac{n}{2}$ gilt für jedes $\alpha \in \left(0, 2 - \frac{n}{p}\right)$ mit $C_2 > 0$:

$$\forall \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \mathbb{E}^n, \underline{x}_1 \neq \underline{x}_2 : \qquad |V(\underline{x}_1) - V(\underline{x}_2)| \leq C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)} \|\underline{x}_1 - \underline{x}_2\|^{\alpha}_{\mathbb{E}^n}.$$

Dabei ist $C_2(\Omega, p, \alpha)$ eine geeignete Konstante und die Funktion V stetig.

Hinweis. Bei der Bearbeitung von (a) wählen Sie $R > 0$ so, dass $\Omega \subset B_R(\underline{0})$ und

- -

BITTE WENDEN !!!

unterscheiden Sie die Fälle $\|\underline{x}\|_{\mathbb{E}^n} \leq 2R$ bzw. $\|\underline{x}\|_{\mathbb{E}^n} > 2R$. Verwenden Sie Dreiecks- und Hölderungleichungen. Bei der Bearbeitung von (b) gehen Sie mit einer ähnlichen Fallunterscheidung vor. Spalten Sie von der Differenz der singulären Terme unter dem Integral eine geeignte Potenz $\alpha \in (0,1)$ ab.

3) (Abgabe-Aufgabe) Sei $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ offen. Man beweise, dass eine Funktion $u \in C^0(\Omega)$ genau dann subharmonisch im Sinne der Definition 4.1 der Vorlesung ist, wenn u lokal die Mittelwertungleichung erfüllt; das heißt, dass für jedes $\underline{x} \in \Omega$ ein $r_0 = r_0(\underline{x}) \in (0, \operatorname{dist}(\underline{x}, \partial\Omega)]$ existiert, so dass gilt:

$$u(\underline{x}) \leq \frac{1}{n\breve{e}_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\underline{x})} u(\underline{y})\, dS(\underline{y}) \quad \text{für alle} \quad 0 < r < r_0.$$

4) Sei $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\varphi \in \mathbb{C}^0(\partial\Omega)$. Es existiere eine Lösung $\tilde{u} \in C^2(\Omega) \cap \mathbb{C}^0(\overline{\Omega})$ des Dirichletproblems $\Delta\tilde{u} = 0$ in Ω, $\tilde{u} = \varphi$ auf $\partial\Omega$. Es sei u die in Satz 4.8 der Vorlesung konstruierte Perronsche Lösung zum Randdatum φ. Zeigen Sie, dass $u = \tilde{u}$ in Ω.