Übungsaufgaben: Partielle Differentialgleichungen I
Serie 6

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau , PD Dr. B. Rummler

Wintersemester 2020/21

1) Sei $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ eine offene Menge und $u \in C^2(\Omega)$ eine harmonische Funktion. Man beweise, dass $||\underline{\nabla} u||^2_{\mathbb{E}^n}$ auf Ω subharmonisch ist.

2) (Abgabe-Aufgabe) Seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{E}^n$ offen und sei $\underline{\Phi} : \Omega' \to \Omega$ ein C^2-Diffeomorphismus, d.h. $\underline{\Phi}$ ist bijektiv mit $\underline{\Phi} \in C^2(\Omega', \Omega)$ und $\underline{\Phi}^{-1} \in C^2(\Omega, \Omega')$. Man definiere den **Maßtensor** $\underline{\underline{G}} = [g_{j,k}]_{j,k=1,\dots,n}$ durch

$$\underline{\underline{G}}(\underline{\xi}) = \left[\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial \underline{\xi}}(\underline{\xi})\right]^T \cdot \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial \underline{\xi}}(\underline{\xi}), \quad \underline{\xi} \in \Omega'.$$

(a) Seien $u, v \in C^1(\Omega)$ und $\underline{\xi} \in \Omega'$. Zeigen Sie, dass

$$\forall \underline{\xi} \in \Omega' : \qquad \left[\underline{\nabla} u(\underline{\Phi}(\underline{\xi}))\right]^T \cdot \underline{\nabla} v(\underline{\Phi}(\underline{\xi})) = \sum_{k,\ell=1}^n g^{k\ell}(\underline{\xi}) \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \xi_k}(\underline{\xi}) \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial \xi_\ell}(\underline{\xi}),$$

wobei $\widetilde{u}(\underline{\xi}) = u(\underline{\Phi}(\underline{\xi}))$ und $\widetilde{v}(\underline{\xi}) = v(\underline{\Phi}(\underline{\xi}))$ und $\left(g^{k\ell}(\underline{\xi})\right)_{k,\ell=1,\dots,n} = \underline{\underline{G}}^{-1}(\underline{\xi})$.

(b) Man setze $g(\underline{\xi}) := \det(\underline{\underline{G}}(\underline{\xi}))$. Zeigen Sie $|\det \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial \underline{\xi}}(\underline{\xi})| = \sqrt{g}$ in Ω'. Beweisen Sie hiermit, dass für $u \in C^2(\Omega)$ und $v \in C^1_0(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega v\, \Delta u\, d\underline{x} = \sum_{k,\ell=1}^n \int_{\Omega'} \widetilde{v} \frac{\partial}{\partial \xi_\ell}\left(\sqrt{g}\, g^{k\ell} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \xi_k}\right) d\underline{\xi}.$$

Schließen Sie hieraus, dass

$$\forall \xi \in \Omega' : \qquad \Delta u(\underline{\Phi}(\underline{\xi})) = \frac{1}{\sqrt{g(\underline{\xi})}} \sum_{k,\ell=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_\ell}\left(\sqrt{g(\underline{\xi})}\, g^{k\ell}(\underline{\xi}) \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \xi_k}(\underline{\xi})\right).$$

3) Sei $\Omega' \subset \mathbb{E}^n$ ein Gebiet. Eine Abbildung $\underline{\Phi} \in C^1(\Omega', \mathbb{E}^n)$ heißt **konform** oder auch winkeltreu, falls für jedes $\underline{\xi} \in \Omega'$ gilt: $\|\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial \underline{\xi}}(\underline{\xi})\|_S > 0$ und $\underline{\underline{U}}(\underline{\xi}) := \frac{1}{\|\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial \underline{\xi}}(\underline{\xi})\|_S} \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial \underline{\xi}}(\underline{\xi})$ eine orthogonale Matrix ist, wobei

$$\|\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial \underline{\xi}}(\underline{\xi})\|_S = \sup_{||\underline{z}||_{\mathbb{E}^n}=1} ||\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial \underline{\xi}} \cdot \underline{z}||_{\mathbb{E}^n}$$

bezeichnet. Sei $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ ein weiteres Gebiet und sei $\underline{\Phi} : \Omega' \to \Omega$ ein konformer C^2-Diffeomorphismus. Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabe 6.2, dass für jedes $u \in C^2(\Omega)$ gilt:

$$\|\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial \underline{\xi}}(\underline{\xi})\|^n_S (\Delta u) \circ \underline{\Phi}(\underline{\xi}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\|\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial \underline{\xi}}(\underline{\xi})\|^{n-2}_S \frac{\partial}{\partial \xi_j}(u \circ \underline{\Phi})\right) \quad \text{in} \quad \Omega'.$$

- -

Bitte wenden !!!

4) Sei $B_1(\underline{0}) \subset \mathbb{E}^n$, $\varphi \in \mathbb{C}^0(\partial B_1(\underline{0}))$, und eine Funktion $f \in \mathbb{C}^2(\overline{B_1(\underline{0})})$ derart, dass f eine Fortsetzung in den $C_0^2(\mathbb{R}^n)$ besitzt. Man zeige: Für das Dirichletproblem

$$-\Delta u = f \quad \text{ in } B_1(\underline{0}), \qquad u = \varphi \quad \text{ auf } \partial B_1(\underline{0})$$

existiert eine Lösung $u \in C^2(B_1(\underline{0})) \cap \mathbb{C}^0(\overline{B_1(\underline{0})})$.

5) (a) Sei u eine nichtnegative, in $\overline{B_R(\underline{0})} \subset \mathbb{E}^n$ harmonische Funktion. Man beweise:

$$\frac{R^{n-2}(R - ||\underline{x}||_{\mathbb{E}^n})}{(R + ||\underline{x}||_{\mathbb{E}^n})^{n-1}} u(\underline{0}) \leq u(\underline{x}) \leq \frac{R^{n-2}(R + ||\underline{x}||_{\mathbb{E}^n})}{(R - ||\underline{x}||_{\mathbb{E}^n})^{n-1}} u(\underline{0}).$$

Hinweis. Verwenden Sie zunächst die Poissonsche Integralformel für den Fall $R = 1$ und anschließend ein Skalierungsargument.

(b) Sei nun $u : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$ harmonisch und beschränkt. Wie folgt aus (a) der Satz von Liouville? Überlegen Sie sich, dass es sogar reicht, Beschränktheit von u nur von unten oder von oben zu fordern.

6) Sei $\Omega^+ \subset \mathbb{E}^n_+ := \{\underline{x} \in \mathbb{E}^n : x_n > 0\}$ ein Gebiet. Mit T bezeichnen wir das relative Innere der Menge $\partial\Omega^+ \cap \{\underline{x} \in \mathbb{E}^n : x_n = 0\}$, welche als nichtleer angenommen wird. Wir nehmen außerdem an: u ist stetig in $\Omega^+ \cup T$, harmonisch in Ω^+ und $u = 0$ auf T. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\widetilde{u}(\underline{x}) := \begin{cases} u(\underline{x}) & \text{für} \quad \underline{x} \in \Omega^+ \cup T, \\ -u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n) & \text{für} \quad \underline{x} \in \Omega^-, \end{cases}$$

harmonisch in $\Omega^+ \cup T \cup \Omega^-$ ist, wobei

$$\Omega^- := \{\underline{x} \in \mathbb{E}^n : [x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n]^T \in \Omega^+\}.$$