Übungsaufgaben: Partielle Differentialgleichungen I
Serie 5

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau , PD Dr. B. Rummler

Wintersemester 2020/21

1) Wir betrachten noch einmal das folgende Anfangsrandwertproblem für die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & t > 0,\, x \in (0,\pi), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & t > 0, \\ u(0,x) = \varphi(x) & x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Sei $\varphi \in \mathbb{C}^2([0,\pi])$ und erfülle die Kompatibiltätsbedingungen $\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0$. Zeigen Sie, dass das Anfangsrandwertproblem eine Lösung

$$u \in C^0\left([0,\infty) \times [0,\pi]\right) \cap C^\infty\left((0,\infty) \times [0,\pi]\right)$$

besitzt.
Hinweis: Beachten Sie, dass bei $k \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$v_k(t,x) := \exp(-k^2 t) \cdot \sin(kx),$$

die Differentialgleichung und die Randbedingungen erfüllt. Setzen Sie φ zunächst ungerade und dann 2π-periodisch als C^2-Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fort. Betrachten Sie die Fourierreihe dieser Funktion und finden Sie so eine geeignete Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so dass die Funktion

$$u(t,x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(t,x)$$

die gewünschten Eigenschaften hat.

2) Sei $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ $(n \geq 3)$ offen, $\underline{x}_o \in \partial\Omega$ sei Randpunkt und $u \in C^2(\Omega) \cap \mathbb{C}^0(\overline{\Omega})$ sei subharmonisch, d.h. $-\Delta u \leq 0$ in Ω. Außerdem nehmen wir an, dass

   (i) $u < 0$ in Ω und $u(\underline{x}_o) = 0$, u ist in $\underline{x}_o$ differenzierbar,

   (ii) es existiert eine Kugel $B_R(\underline{y}) \subset \Omega$ mit $\underline{x}_o \in \partial B_R(\underline{y})$.

Zeigen Sie, dass unter den obigen Voraussetzungen gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial \underline{\nu}}(\underline{x}_o) > 0.$$

Hinweis: Man betrachte auf $A := B_R(\underline{y}) \setminus \overline{B_\rho(\underline{y})}$ $(0 < \rho < R)$ die Funktion $v_\varepsilon(\underline{x}) = \varepsilon\left(\frac{1}{|\underline{x}-\underline{y}|^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}}\right)$ mit hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ und wende das schwache Maximumprinzip auf $w = u + v_\varepsilon$ an.

- -

BITTE WENDEN!!!

3) Sei $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ ein beschränktes Gebiet, welches im Streifen $\{\underline{x} \in \mathbb{E}^n : 0 \leq x_1 \leq d\}$ liegt. Für $u \in C^2(\Omega) \cap \mathbb{C}^0(\overline{\Omega})$ gelte $-\Delta u + c(\underline{x}) \cdot u \leq 0$ mit einer Funktion $c(\,.\,) < 0$.

   (a) Zeigen Sie für $c = -1$ unter der Bedingung $d \in (0, \log 2)$ die folgende Abschätzung
$$\sup_{\Omega} u \;\leq\; \frac{1}{2 - e^d} \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

   (b) Können Sie eine ähnliche Abschätzung auch für ein allgemeines $c(\,.\,) < 0$ geben? Begründen Sie!

   Hinweis zu (a): Betrachten Sie die Fälle $\sup_\Omega u \leq 0$ und $\sup_\Omega u > 0$ getrennt. Im zweiten Fall setze man $v = u - \sup_{\partial\Omega} u - (e^d - e^{x_1}) \sup_\Omega u$ und zeige $-\Delta v \leq 0$.

4) Sei $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ beschränkt und offen. Für $T > 0$ bezeichne Q_T den Zylinder $(0, T] \times \Omega$. (Zeit-Raum-Zylinder) Gegeben seien eine positiv definite Matrix $\underline{\underline{A}} = [a_{j,k}]_{j,k=1}^n$ und die Fkt. $u \in C^2(Q_T) \cap \mathbb{C}^0(\overline{Q_T})$ mit
$$\forall\,(t, \underline{x}) \in Q_T : \qquad u_t(t, \underline{x}) - \sum_{j,k=1}^{n} a_{j,k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(t, \underline{x}) \;\geq\; 0. \tag{$*$}$$

   Zeigen Sie, dass u sein Minimum auf dem parabolischen Rand $\partial_p Q_T := (\{0\} \times \Omega) \cup ([0, T] \times \partial\Omega)$ annimmt, d.h.
$$\min_{(t,x) \in \overline{Q_T}} u(t, \underline{x}) \;=\; \min_{(t,\underline{x}) \in \partial_p Q_T} u(t, \underline{x}).$$

   Hinweis: Nehmen Sie zunächst an, dass in $(*)$ die strikte Ungleichung gilt. Betrachten Sie im allgemeinen Fall $u_\varepsilon(t, \underline{x}) = u(t, \underline{x}) - \varepsilon \exp(x_1)$.

5) Betrachten Sie für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ und ein Randdatum $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{E}^1$ eine Lösung $u \in \mathbb{C}^2(\overline{\Omega})$ des Dirichlet-Problems für die Minimalflächengleichung
$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{\underline{\nabla} u}{\sqrt{1 + \|\underline{\nabla} u\|_{\mathbb{E}^n}^2}}\right) = 0 & \text{für } \underline{x} \in \Omega, \\ u = \varphi & \text{für } \underline{x} \in \partial\Omega. \end{cases}$$

   Schreiben Sie den nichtlinearen Operator $L(u) := -\operatorname{div}\left(\dfrac{\underline{\nabla} u}{\sqrt{1 + \|\underline{\nabla} u\|_{\mathbb{E}^n}^2}}\right)$ formal als linearen Operator $L(u)(\underline{x}) = -\sum_{j,k=1}^n a_{j,k}(\underline{x}) u_{x_j x_k}(\underline{x})$ mit Koeffizienten $a_{j,k}(\underline{x})$(die natürlich von der unbekannten Lösung u abhängen.) Finden Sie Elliptizitätskonstanten für $L(u)$, die Sie aus der Vorlesung mit den Bezeichnungen λ bzw. Λ kennen. Zeigen Sie:
$$\forall \underline{x} \in \Omega : \qquad \min_{\partial\Omega} \varphi \leq u(\underline{x}) \leq \max_{\partial\Omega} \varphi.$$