Übungsaufgaben: Partielle Differentialgleichungen I
Serie 4

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau , PD Dr. B. Rummler

Wintersemester 2020/21

1) Sei $\Omega \subset \mathbb{E}^2 \simeq \mathbb{C}$ ein Gebiet und es sei $u \in C^2(\Omega)$ eine harmonische Funktion. Gegeben sei auch eine reguläre Kurve $\gamma \subset \Omega$, die ein stetiges Normaleneinheitsvektorfeld $\underline{\nu}(x,y)$, $[x,y]^T \in \gamma$ hat. Schließlich gelte:

$$u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial \underline{\nu}}(x,y) = 0 \quad \text{für alle} \quad [x,y]^T \in \gamma.$$

Zeigen Sie, dass für alle $[x,y]^T \in \Omega$ gilt: $u(x,y) = 0$.

Hinweis. Aufgabe 3.3 und ein Zusammenhangsargument.

2) (a) Sei $u : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$ zweimal stetig differenzierbar und radialsymmetrisch, d.h. es existiert eine Funktion $\hat{u} : [0,\infty) \to \mathbb{E}^1$, so dass

$$\forall\, \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \qquad u(\underline{x}) \;=\; \hat{u}(||\underline{x}||_{\mathbb{E}^n}).$$

Beweisen Sie, dass $\hat{u} \in C^2([0,\infty))$ und dass mit $r = ||\underline{x}||_{\mathbb{E}^n}$ gilt:

$$(\Delta u)(\underline{x}) \;=\; \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \;+\; \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\hat{u}(r).$$

(b) Sei $u : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^1$ zweimal stetig differenzierbar. Man definiere

$$v(r,\varphi) \;=\; u(r\cos\varphi, r\sin\varphi), \quad r \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass

$$(\Delta u)(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \;=\; \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\varphi) \;+\; \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\varphi) \;+\; \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}(r,\varphi).$$

3) Für die Bearbeitung von Aufgabe 4.4 dürfen Sie das folgende Resultat ohne Beweis verwenden.

Satz 4.3 *Sei $1 \leq p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ eine nichtleere konvexe beschränkte offene Menge. Dann existiert eine positive Konstante $\tilde{C}$, die nur von p und Ω abhängt, so dass für alle $u \in \mathbb{C}^1(\overline{\Omega})$ gilt:*

$$\|u - \overline{u}\|_{\mathbb{L}_p(\Omega)} \leq \tilde{C}\|\underline{\nabla} u\|_{\mathbb{L}_p(\Omega)};$$

dabei bezeichnet

$$\overline{u} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(\underline{y})\; d\underline{y}\,.$$

den Mittelwert von u auf Ω.

- -

BITTE WENDEN!!!

4) Sei $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ eine nichtleere konvexe beschränkte reguläre offene Menge mit äußerer Einheitsnormale $\underline{\nu}$. Für $\varphi \in \mathbb{C}^2(\overline{\Omega})$ sei $u \in C^2([0,\infty)\times\overline{\Omega})$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung unter *Neumannrandbedingungen*:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } [0,\infty) \times \overline{\Omega}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \underline{\nu}}(t,\underline{x}) = 0 & \text{für } (t,\underline{x}) \in [0,\infty) \times \partial\Omega, \\ u(0,\underline{x}) = \varphi(\underline{x}) & \text{für } \underline{x} \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $t \geq 0$ gilt:

$$\int_\Omega u(t,\underline{x})\, d\underline{x} = \int_\Omega \varphi(\underline{x})\, d\underline{x}.$$

(b) Wie oben bezeichne

$$\overline{\varphi} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \varphi(\underline{y})\, d\underline{y}$$

den Mittelwert von φ auf Ω. Zeigen Sie, dass es eine nur von Ω abhängige Konstante $C = C(\Omega) > 0$ gibt, so dass für alle $t \geq 0$ gilt:

$$\|u(t,\,.\,) - \overline{\varphi}\|^2_{\mathbb{L}_2(\Omega)} \leq e^{-Ct} \|\varphi(\,.\,) - \overline{\varphi}\|^2_{\mathbb{L}_2(\Omega)}.$$

5) Sei $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ radialsymmetrisch und integrierbar mit $\int_{\mathbb{E}^n} f(\underline{x}) d\underline{x} = 1$. Zeigen Sie, dass für jede harmonische Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\forall\, \underline{x} \in \mathbb{E}^n : \qquad u(\underline{x}) \;=\; \lim_{R\to\infty} \int_{B_R(\underline{x})} u(\underline{y}) f(\underline{x} - \underline{y})\, d\underline{y}.$$

Hinweis. Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen.

6) Sei $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ offen.

(a) Sei $u \in C^2(\Omega)$ eine harmonische Funktion. Zeigen Sie, dass für jedes $\underline{x}_o \in \Omega$ und $0 < R < \operatorname{dist}(\underline{x}_o, \partial\Omega)$ gilt:

$$||\underline{\nabla} u(\underline{x}_o)||_{\mathbb{E}^n} \;\leq\; \frac{n}{R} \max_{\underline{x} \in \partial B_R(\underline{x}_o)} |u(\underline{x}) - u(\underline{x}_o)|.$$

Hinweis. Differenzieren Sie die Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen und verwenden Sie den Satz von Gauß.

(b) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine harmonische Funktion. Zeigen Sie: Ist u zudem in ganz $\mathbb{R}^n$ beschränkt, so ist u konstant.

(c) Verwenden Sie die Argumente aus dem Beweis von Teil (a), um zu zeigen: Jede harmonische Funktion $u \in C^2(\Omega)$ ist beliebig oft differenzierbar.