Übungsaufgaben: Partielle Differentialgleichungen I
Serie 3

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau , PD Dr. B. Rummler

Wintersemester 2020/21

1) Sei $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ ein reguläres Gebiet. Sei $u \in C^2([0,\infty) \times \overline{\Omega})$ eine Lösung der Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f \quad \text{in} \quad [0,\infty) \times \Omega, \\ u &= g \quad \text{in} \quad [0,\infty) \times \partial\Omega, \\ u(0) &= \varphi, \qquad u_t(0) = \psi \quad \text{in} \quad \Omega, \end{aligned}$$

wobei $f, g \in C^2([0,\infty) \times \overline{\Omega})$ und $\varphi, \psi \in \mathbb{C}^2(\overline{\Omega})$ die vorgegebenen Anfangsdaten sind. Zeigen Sie, dass für jede Funktion $v \in C^2([0,\infty) \times \overline{\Omega})$, welche der Wellengleichung mit denselben Daten genügt, stets gilt: $v = u$ (Eindeutigkeit der Lösung).

Hinweis. Zeigen Sie, dass $w := u - v$ der homogenen Wellengleichung genügt, multiplizieren Sie diese mit w_t und führen Sie partielle Integration durch.

2) Wir betrachten die wohl bekannteste Gleichung aus der Fluiddynamik, die Navier-Stokes-Gleichung. Genauer handelt es sich zum Einen um die Impulsbilanz eines inkompressiblen Newtonschen Fluids in vereinfachter Form:

$$\varrho \left(\underline{u}_t + \left(\sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \underline{u} \right) - \eta \Delta \underline{u} + \underline{\nabla} p = \underline{0} \tag{1}$$

und zum Anderen um die Kontinuitätsgleichung (Inkompressibilitätsbedingung):

$$\operatorname{div}_{\underline{x}}(\underline{u}) = 0. \tag{2}$$

Dabei sind $\varrho, \eta > 0$ gegebene physikalische Konstanten; Dichte und Viskosität.
Wir nehmen an, dass hinreichend glatte Lösungen $p : [0,\infty) \times \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^1$, $\underline{u} : [0,\infty) \times \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ von (1) und (2) in $[0,\infty) \times \mathbb{E}^3$ existieren.

(a) Zeigen Sie, dass entlang einer Stromlinie $s \mapsto \underline{\gamma}(s)$ mit $\underline{\gamma}'(s) = \underline{u}(\underline{\gamma}(s))$ für die stationären ($\underline{u}_t = \underline{0}$), inkrompressiblen, reibungsfreien ($\eta = 0$) Navier-Stokes-Gleichungen (man spricht dann auch von den Euler-Gleichungen) die Gleichung

$$\frac{\varrho}{2} \, ||\underline{u}(\underline{\gamma}(s))||^2_{\mathbb{E}^3} + p(\underline{\gamma}(s)) = c(\underline{\gamma})$$

gilt. Dieses ist auch als das Bernoulli-Gesetz bekannt.

(b) Studieren Sie geeignete Skalierungen von Zeit, Ort, Druck und Geschwindigkeitsfeld, so dass das so genannte hydrodynamische Ähnlichkeitsgesetz gilt, d.h. dass die mit Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reskalierten Größen $(t, \underline{x}) \mapsto \alpha p(\gamma t, \delta \underline{x})$, $(t, \underline{x}) \mapsto \beta \underline{u}(\gamma t, \delta \underline{x})$, dieselben Differentialgleichungen (1), (2) erfüllen.

- -

BITTE WENDEN!!!

(c) Sei nun $\Omega \subset \mathbb{E}^3$ ein beschränktes glattes Gebiet und $p : [0,\infty) \times \overline{\Omega} \to \mathbb{E}^1$, $\underline{u} : [0,\infty) \times \overline{\Omega} \to \mathbb{E}^3$ seien hinreichend glatte klassische Lösungen des Navier-Stokes-Systems (1), (2) in $[0,\infty) \times \overline{\Omega}$. Weiter werde das Geschwindigkeitsfeld $\underline{u}$ homogenen Dirichletrandbedingungen (Haftrandbedingungen) unterworfen:

$$\underline{u}(t, \underline{x}) = \underline{0} \text{ für } t \geq 0, \underline{x} \in \partial\Omega.$$

Zeigen Sie: Unter diesen starken Annahmen gilt für alle $T > 0$ die Energiebilanz

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} ||\underline{u}(T, \underline{x})||^2_{\mathbb{E}^3} \, d\underline{x} + \frac{\eta}{\varrho} \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{3} ||\underline{\nabla} u_j(t, x)||^2_{\mathbb{E}^3} \, d\underline{x} \, dt = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} ||\underline{u}(0, \underline{x})||^2_{\mathbb{E}^3} \, d\underline{x}.$$

Differenzieren Sie diese Gleichung bzgl. T und verwenden Sie die Poincaré-Friedrichs-Ungleichung, um daraus für die betrachteten klassischen Lösungen herzuleiten, dass mit einer geeigneten Konstanten $c = c(\Omega, \eta, \varrho) > 0$ für $T > 0$ gilt:

$$\int\limits_{\Omega} ||\underline{u}(T, \underline{x})||^2_{\mathbb{E}^3} \, d\underline{x} \leq e^{-cT} \int\limits_{\Omega} ||\underline{u}(0, \underline{x})||^2_{\mathbb{E}^3} \, d\underline{x}.$$

Bemerkung. Die Existenz solcher **klassischen** Lösungen nachzuweisen ist eines der ungelösten Clay-Milleniums-Probleme.

3) Sei $\Omega \subset \mathbb{E}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $u : \Omega \to \mathbb{E}^1$ zweimal stetig differenzierbar und harmonisch. Konstruieren Sie eine holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{E}^1_{\mathbb{C}}$ mit $\mathrm{Re}\,(f) = u$. Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass die Voraussetzung einfachen Zusammenhangs im Allgemeinen notwendig ist.