Übungsaufgaben: Partielle Differentialgleichungen I
Serie 2

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau , PD Dr. B. Rummler

Wintersemester 2020/21

1) Sei $\Omega \subset \mathbb{E}^3$ ein reguläres Gebiet gemäß Definition 0.5 der Vorlesung mit äußerem Einheitsnormalenfeld $\underline{\nu}$ an $\partial\Omega$ und $\underline{F} \in \mathbb{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{E}^3)$ ein Vektorfeld. Man beweise, dass

$$\int_\Omega \operatorname{rot}(\underline{F})\, d\underline{x} = -\int_{\partial\Omega} \underline{F} \times \underline{\nu}\, dS.$$

2) Sei $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ ein reguläres Gebiet mit äußerem Einheitsnormalenfeld $\underline{\nu}$ an $\partial\Omega$. Seien $f, g \in \mathbb{C}^2(\overline{\Omega})$. Man beweise die Greensche Formel:

$$\int_\Omega (\Delta f(\underline{x}) \cdot g(\underline{x}) - \Delta g(\underline{x}) \cdot f(\underline{x}))\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\nu}}(\underline{x}) g(\underline{x}) - f(\underline{x}) \frac{\partial g}{\partial \underline{\nu}}(\underline{x}) \right) dS(\underline{x}),$$

wobei $\frac{\partial f}{\partial \underline{\nu}}(\underline{x}) = (\underline{\nabla}\, f(\underline{x}))^T \cdot \underline{\nu}(\underline{x})$ die äußere Normalenableitung in $\underline{x} \in \partial\Omega$ bezeichnet.

3) (a) Sei $\underline{E} : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ zweimal stetig differenzierbar. Differentialoperatoren werden auf Vektorfelder stets komponentenweise angewandt wie z.B.:

$$\Delta \underline{E} = \begin{pmatrix} \Delta E_1 \\ \Delta E_2 \\ \Delta E_3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \underline{E} = -\Delta \underline{E} + \operatorname{grad}\operatorname{div} \underline{E}.$$

(b) Seien $\underline{E}, \underline{B} : \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ zweimal stetig differenzierbare Lösungen der ladungsfreien Maxwell-Gleichungen im Vakuum:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{div}_{\underline{x}} \underline{E}(t,x) = \operatorname{div}_{\underline{x}} \underline{B}(t,x) = 0 \\ \dfrac{\partial \underline{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}_{\underline{x}} \underline{B}, \quad \dfrac{\partial \underline{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot}_{\underline{x}} \underline{E} \end{array}\right\} \text{ auf } \mathbb{E} \times \mathbb{E}^3.$$

Beweisen Sie, dass $\underline{E}$ und $\underline{B}$ in $\mathbb{E} \times \mathbb{E}^3$ die Wellengleichungen erfüllen:

$$\underline{E}_{tt} - \Delta \underline{E} = 0, \quad \underline{B}_{tt} - \Delta \underline{B} = 0.$$

BITTE WENDEN!!!

4) Sei $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ ein reguläres Gebiet mit äußerem Normalenfeld $\underline{\nu}$ an $\partial\Omega$. Es sei $u \in \mathbb{C}^2(\overline{\Omega})$ Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \underline{\nu}} = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dann gilt notwendigerweise

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \, dS(\underline{x}) = -\int_{\Omega} f(\underline{x}) \, d\underline{x}.$$

5) Betrachten Sie für eine Konstante $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die eindimensionale *Wellengleichung*

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad \text{für } (t, x) \in \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^1.$$

Man benutze die Koordinatentransformation

$$\begin{cases} \xi & = & x + ct, \\ \eta & = & x - ct, \\ v(\xi, \eta) & := & u(t, x). \end{cases}$$

Studieren Sie das Differentialgleichungsproblem in den neuen Koordinaten (ξ, η) und bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

6) Sei $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in C^2(\Omega) \cap \mathbb{C}^0(\overline{\Omega})$.

(a) Sei u *strikt subharmonisch*, das heißt $-\Delta u < 0$ in Ω. Man beweise, dass u in Ω kein lokales Maximum besitzt.

(b) Sei nun u *subharmonisch* ($-\Delta u \leq 0$ in Ω). Man beweise, dass u sein Maximum auf dem Rand annimmt, d.h.

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Hinweis. Man wende (a) auf die Funktion $v_\varepsilon(\underline{x}) = u(\underline{x}) + \varepsilon ||\underline{x}||^2$ mit beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ an.