Übungsaufgaben: Partielle Differentialgleichungen I
Serie 1

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau , PD Dr. B. Rummler

Wintersemester 2020/21

1) Gegeben seien die Vektoren $\underline{a}\,,\underline{b} \in \mathbb{E}^3$. Man berechne die Oberfläche des von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Leiten Sie Ihre Formel aus elementaren Tatsachen der linearen Algebra her

2) Seien $\underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n \in \mathbb{E}^n$ und $\underline{z} := \underline{x}_2 \times \ldots \times \underline{x}_n$. Man zeige:

$$||\underline{z}||^2 = \det\left([\underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n]^T \cdot [\underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n]\right).$$

Hinweis. Überlegen Sie sich eine allgemeinere Identität für Skalarprodukte von Kreuzprodukten und verwenden Sie zu deren Herleitung die allgemeinen Eigenschaften von Skalarprodukt, Kreuzprodukt und Determinante.

3) Ein Torus T mit Radien $0 < r < R$ werde durch

$$\underline{\Phi} : G = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{E}^3,$$

$$\underline{\Phi}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)(R + r\cos(\beta)) \\ \sin(\alpha)(R + r\cos(\beta)) \\ r\sin(\beta) \end{bmatrix}$$

parametrisiert. Man berechne die Oberfläche (d.h., das zweidimensionale Volumen) des Torus.

4) (a) Sei $R > 0$ und $f \in \mathbb{C}^0(\overline{B_R(\underline{0})})$. Man beweise die folgende Formel:

$$\int_{B_R(\underline{0})} f(\underline{x})\,d\underline{x} = \int_0^R \int_{\partial B_R(\underline{0}) = \omega_{(n),R}} f(\underline{x})\,dS(\underline{x})dr = \int_0^R r^{n-1} \int_{\partial B_1(\underline{0})} f(r\underline{x})\,dS(\underline{x})dr$$

Hinweis. Parametrisieren Sie obere und untere Halbsphären als Graphen.

(b) Sei $\breve{e}_n := \mathrm{vol}_n(B_1(\underline{0})) := \int_{B_1(\underline{0})} dx$ das Volumen der Einheitskugel und $\mathbb{S}_R^{n-1} = \partial B_R(\underline{0}) = \omega_{(n),R} \subset \mathbb{E}^n$ die Sphäre von Radius R in $\mathbb{E}^n$. Man beweise, dass

$$\mathrm{vol}_{n-1}(\mathbb{S}_R^{n-1}) = \mathrm{vol}_{n-1}(\omega_{(n),R}) := \int_{\partial B_R(\underline{0})} dS(x) = n\breve{e}_n R^{n-1}.$$

(c) Formulieren Sie die Formel aus Aufgabenteil (a) für radialsymmetrische Funktionen.

- -

BITTE WENDEN!!!

5) Zeigen Sie unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes, dass

$$\int_{B_1(\underline{0})} \log(||\underline{x}||)\, d\underline{x} = -\frac{\breve{e}_n}{n}.$$

Hinweis. Man zeige zunächst für $\underline{F}(\underline{x}) := \underline{x} \log(||\underline{x}||)$ ($\underline{x} \in \mathbb{E}^n \setminus \{\underline{0}\}$), dass

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{B_1(\underline{0}) \setminus B_\varepsilon(\underline{0})} \operatorname{div}(\underline{F})\, d\underline{x} = 0.$$

6) Seien $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zwei positiv semidefinite symmetrische Matrizen. Zeigen Sie:

$$\operatorname{Spur}(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) \;=\; \operatorname{Spur}(\underline{\underline{A}} \circ \underline{\underline{B}}) \geq 0.$$

Dabei bezeichnet $\operatorname{Spur}(\underline{\underline{C}}) = \sum_{j=1}^{n} c_{j,j}$ die Spur der Matrix $\underline{\underline{C}} = [c_{j,k}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$.