7 Partielle Differentialgleichungen und Funktionentheorie

7.1 Einführung, Bekanntes, Klassifikation

7.1.1 Ideen, einfache PDGL, Typisierung

Definition 7.1 (Partielle Differentialgleichung)
Eine Gleichung der Gestalt

$$F(\underline{x}, u(\underline{x}), \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^m u}{\partial {x_1}^{j_1} \cdots \partial {x_n}^{j_n}}) = 0 \quad (*)$$

nennt man eine partielle Differentialgleichung(PDGL) m-ter Ordnung.
Gesucht ist hier eine m-mal stetig diffbare Funktion $u : D(u) \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$, welche in $D(u)$ als Lösung der PDGL $(*)$ genügt.

Bemerkung 7.2
In der Definition 7.1 ist die partielle Differentialgleichung in $(*)$ in impliziter Gestalt geschrieben. Die Ordnungen der höchsten Ableitungen genügen hier im Sinne von partiellen Ableitungen standardmäßig der Beziehung: $\sum_{k=1}^{n} j_k = m$.
Die PDGL $(*)$ ist hier also eine Gleichung für eine gesuchte Funktion u in n Variablen $\underline{x}$, in der auch die partiellen Ableitungen bis einschließlich m-ter Ordnung nach diesen Variablen vorkommen.

Notation 7.3 (Zeitabhängige partielle Differentialgleichung)
Wenn man in der Definition 7.1 die Zeitvariable t und die Ortsvariablen $\underline{x}$ von vornherein unterscheiden will, so verwendet man als partielle Differentialgleichung

$$F(t, \underline{x}, u(t, \underline{x}), \frac{\partial u}{\partial t}, \dots, \frac{\partial u}{\partial t^m}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^m u}{\partial {x_1}^{j_1} \cdots \partial {x_n}^{j_n}}) = 0 \quad (**)$$

als Darstellung der impliziten PDGL $(**)$ m-ter Ordnung. Gesucht ist hier eine m-mal stetig diffbare Funktion $u : D(u) \subset \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$, welche in $D(u)$ als Lösung der PDGL $(**)$ genügt.

Bemerkung 7.4 (Lösungstheorie PDGL)
Im Gegensatz zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen gibt es für die partiellen Differentialgleichungen keine allgemein anwendbare Theorie, also zum Beispiel kein Analogon des Satzes von Picard-Lindelöf. Zu einigen speziellen Gleichungen und gewissen Klassen spezieller Gleichungen gibt es jeweils eigene, teils umfangreiche, Untersuchungen.

Bemerkung 7.5 (AB ,RB, Abfallbedingungen PDGL)
Auch bei PDGL sind durch die Differentiation Konstanten „verloren gegangen“. Um u überhaupt (eindeutig) bestimmen zu können, müssen wir Zusatzinformationen geben. Dies sind z.B. Anfangsbedingungen (AB) , Randbedingungen (RB) und Abfallbedingungen (RBA)

Bemerkung 7.6 (Bekannte partielle Differentialgleichung)
In Satz 6.35 haben wir bei der Untersuchung der Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrales 2. Art bereits ein System partieller Differentialgleichung 1. Ordnung betrachtet. Die Integrabilitätsbedingung wird hier befriedigt, wenn das Vektorfeld $\underline{v}(\underline{x}) : D(\underline{v}) \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *einmal stetig diffbar in* $D(\underline{v})$ *ist und dem System partieller DGL:*

$$\frac{\partial}{\partial x_k} v_j(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} v_k(\underline{x}), \ \forall j \neq k \quad (\#)$$

genügt.
Nach Satz 6.52 entspricht die Bestimmung eines Potentiales φ *(hier von* $\underline{v}(\underline{x})$*) der Lösung der partielle Differentialgleichung 2. Ordnung:*

$$(H1)\ \operatorname{div} \underline{v} = \Delta\varphi$$

Ganz analog betrachteten wir auch das System partieller Differentialgleichung 2. Ordnung für $\underline{w}$*:*

$$\begin{aligned}(H2)\ \operatorname{rot} \underline{u} &= \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \underline{w}) \\ &= -\Delta\underline{w}\end{aligned}$$

Mit der Konsequenz: Die Bestimmung der Helmholtz-Zerlegung mit $(\varphi, \underline{w})$ *ist immer über Lsg. von zwei „Poissongleichungen“ (H1) und (H2) möglich.*

Beispiel 7.1 (Cauchy-Riemannsche DGL)
Das folgende System zweier partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung in den Funktionen $u, v : D := D(u) = D(v) \subset \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^1$ bei $\underline{x}^T = [x_1, x_2]^T =: [x, y]^T \in D$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2) &= \frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2) &= -\frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{aligned}\right\}(CRDGL)$$

nennt man das System der Cauchy-Riemannsche (partiellen) DGL. Die Bedeutung von $(CRDGL)$ liegt darin, dass eine komplexwertige Funktion f einer komplexen Variablen $z \in \mathbb{E}^1_{\mathbb{C}}$ (kFkV) genau dann im komplexen Sinne differenzierbar ist, wenn ihre „Entsprechung“ $[u, v]^T$ im $\mathbb{E}^2$ den Cauchy-Riemannsche (partiellen) DGL genügt. Hier nutzt man die „Entsprechung“

$$f(z) := u(z) + i \cdot v(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y) \qquad \text{bei} \qquad z = x + i \cdot y\,.$$

Wie im Abschnitt 1.1.2 über komplexe Zahlen nutzen wir hier Real- und Imaginärteile komplexer Zahlen:

$x = \operatorname{Re} z$ REALTEIL von $z = x + iy$

$y = \operatorname{Im} z$ IMAGINÄRTEIL von $z = x + iy$

$u = \operatorname{Re} f$ REALTEIL von $f = u + iv$

$v = \operatorname{Im} f$ IMAGINÄRTEIL von $f = u + iv$

Betrachten wir die kFkV $f : \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^1$ mit $f(z) := z^2 \,\forall z \in \mathbb{E}^1_{\mathbb{C}}$, so erhalten wir durch einfaches Ausrechnen: $f(z) \cong u(x,y) + i \cdot v(x,y) = (x^2 - y^2) + i \cdot 2xy$

$$\left.\begin{aligned} 2x &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ -2y &= \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{aligned}\right\}(CRz^2)$$

Hier ist die kFkV $f(z) := z^2$ im komplexen Sinne differenzierbar mit $\dfrac{df(z)}{dz} = f'(z) = 2z$.

7.1.2 Explizite lineare PDGL - Erklärung

Lineare partielle Differentialgleichung spielen in vielen Bereichen der Naturwissenschaften eine wesentliche Rolle.

Definition 7.7 ((Explizite) lineare partielle Differentialgleichung)
Vorgegeben sei bei fixem $m \in \mathbb{N}$ ein System stetiger reellwertiger Fktn.

$$\left\{ \{a_{j_1,\dots,j_n}(\underline{x})\}_{\{[j_1,\dots,j_n]^T : \sum_{l=1}^n j_l = k\}} \right\}_{k=1}^{m} \qquad \text{bei } j_l \in \mathbb{N}_o \,\forall\, l = 1 \dots n\,.$$

Dabei sei jede dieser Fktn. des Systems erklärt als: $\{a_{j_1,\dots j_n}\} : D \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$.
Gegeben seien zudem die stetigen skalaren Fktn. b und f mit: $b,\, f : D \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$.
Gesucht ist eine skalare Fkt. $u : D(u) \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$ welche der linearen partiellen Differentialgleichung m-ter Ordnung

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{[j_1,\dots,j_n]^T : \sum_{l=1}^n j_l = k} a_{j_1,\dots,j_n}(\underline{x}) \frac{\partial^k u(\underline{x})}{\partial x_1{}^{j_1} \cdots \partial x_n{}^{j_n}} \right) \right) + b(\underline{x}) u(\underline{x}) = f(\underline{x}) \quad (*Pm)$$

genügt. Hier bedeutet $j_l = 0$ immer keine partielle Ableitung nach der Variablen x_l, speziell in der Interpretation, dass

$$\left(\partial x_l{}^{j_l = 0}\right) = (\partial x_l)^0 = 1 \qquad \forall\, l = 1 \dots, n \qquad \text{ist.}$$

Bei $f \equiv 0$ in $(*Pm)$ erhalten wir die zugeordnete homogene Gleichung: $(*Pm)_h$.

Bemerkung 7.8 (Poissongleichung)
Gemäß obiger Definition 7.18 und mit Bemerkung 7.6 ist die angekündigte „Poissongleichung“ eine (explizite) lineare PDGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Notation 7.9 (Poisson- und Laplacegleichung)
Die lineare partielle Differentialgleichung 2.*-Ordnung*

$$-\triangle u(\underline{x}) = -div(grad(u(\underline{x}))) = f(\underline{x}) \quad (*\triangle 2) \quad ,$$

für eine gesuchte skalare Fkt. $u : D := D(u) \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$ *nennen wir Poissongleichung mit der „rechten Seite“* $f : D \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$.
Bei $f \equiv 0$ *in* $(*\triangle 2)$ *erhalten wir die zugeordnete homogene Gleichung:* $(*\triangle 2)_h$.
$(*\triangle 2)_h$ *nennt man auch die Laplace-Gleichung.*
Eine 2-mal in D *stetig diffbare Lösung der Laplace-Gleichung* $u_h(\underline{x})$*, also eine Fkt., welche der Gleichung*

$$-\triangle u_h(\underline{x}) = -div(grad(u_h(\underline{x}))) = 0 \quad (*\triangle 2)_h \quad ,$$

genügt, nennen wir eine harmonische Funktion. Wir schreiben hier auch: $u_h(\underline{x}) = u_H(\underline{x})$

Beispiel 7.2 (Harmonische Funktionen)
Die im Beispiel 7.1 betrachteten Real- und Imaginärteile sogenannten holomorpher Funktionen (kFkV) genügen den Cauchy-Riemannsche (partiellen) DGL und sind harmonische Funktionen.
Die Funktion $u_H(\underline{x})$ mit $u_H : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^1$ und

$$u_h(\underline{x}) = u_H(\underline{x}) := \sin 3x_1 \sinh 3x_2 \qquad \forall\, \underline{x} \in \mathbb{E}^2$$

ist harmonisch.

Bemerkung 7.10 (Wellen- und Wärmeleitungsgleichung)
Interpretieren wir die Definition 7.18 im Sinne von Notation 7.3 und schreiben den Laplaceoperator in den Ortsvariablen $\underline{x}$, also als

$$\underline{\nabla}_{\underline{x}}^T \cdot \underline{\nabla}_{\underline{x}} = \triangle_{\underline{x}} \qquad \forall\, \underline{x} \in \mathbb{E}^n ,$$

dann können wir die Wellen- und Wärmeleitungsgleichung als lineare PDGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die gesuchten Funktion $u(.,.)$ und rechter Seite $f(.,.)$ bei: $D(u) \subset [0,\infty) \times \mathbb{E}^n,\ D(f) \subset (0,\infty) \times \mathbb{E}^n$ aufschreiben:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \cdot \triangle_{\underline{x}} u(t,\underline{x}) = \Box_{c,\underline{x}} u(t,\underline{x}) = f(t,\underline{x}) \quad (*\Box 2) \quad ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \cdot \triangle_{\underline{x}} u(t,\underline{x}) = f(t,\underline{x}) \quad (*W2) \quad .$$

Hier ist $c = const. \in (0,\infty)$ eine fix vorgegebene Konstante. $\Box_{c,\underline{x}}$ heißt d'Alembert-Operator.

7.2 Lösungsmethoden für lineare partielle Differentialgleichungen

7.2.1 Die lineare partielle DGL 1.Ordnung

Notation 7.11 (Lineare partielle Differentialgleichung 1.Ordnung)
Vorgegeben sei die stetige vektorwertige Fkt. $\underline{a} : D(\underline{a}) \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$; sowie die stetige skalare Fkt. $b : D(b) = D(\underline{a}) \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$.
Gesucht ist eine skalare Fkt. $u : D(u) \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$, welche der linearen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\underline{a}^T(\underline{x}) \cdot (\underline{\nabla} u(\underline{x})) + b(\underline{x}) u(\underline{x}) = 0 \quad (*P1)_h$$

genügt.

Bemerkung 7.12
Die PDGL $(*P1)_h$ ist eine lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung. Wie bei GDGL kommen in $(*P1)_h$ nur die gesuchte Fkt. $u(\underline{x})$ und deren 1. Ableitungen vor. Im Sinne eines Skalarproduktes im $\mathbb{E}^{n+1}$ hat man die Gestalt:

$$\left(\begin{bmatrix} b \\ \underline{a} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{\nabla} \end{bmatrix} \right) u(\underline{x}) = \left(\begin{bmatrix} b(\underline{x}) \\ a_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ a_n(\underline{x}) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} \right) u(\underline{x}) = 0$$

Die Lösung der PDGL $(*P1)_h$ bestimmt man mit Methoden aus der Theorie der GDGL: der Charakteristiken-Methode.

Beispiel 7.3 (Charakteristiken-Methode für Lineare PDGL 1.Ordnung)

(a) Wir nehmen an, dass $\forall\, \underline{x} \in D(\underline{a}) : a_1(\underline{x}) \neq 0$ sei. Wir benutzen $D(\underline{a}) = D(b) =: G$ und arbeiten wie in Abschnitt 6.3.2 bei „säulenförmigen“ Gebieten.
Wir setzen $x_1 := t$ und $\underline{\tilde{x}} = [x_2, \ldots, x_n]^T$ und berechnen nun:

$$\underline{\tilde{\nabla}}_{\underline{\tilde{x}}} = \underline{\tilde{\nabla}} := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{\tilde{\alpha}}(t,\underline{\tilde{x}}) := \frac{1}{a_1} \begin{bmatrix} a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} (t,\underline{\tilde{x}}) \quad \text{und} \quad \tilde{\beta}(t,\underline{\tilde{x}}) := \left(\frac{b}{a_1}\right)(t,\underline{\tilde{x}}) .$$

(b) Mit (a) erhalten wir durch Einsetzen in $(*P1)_h$

$$\frac{\partial\, u(t,\underline{\tilde{x}})}{\partial t} + \underline{\tilde{\alpha}}^T(t,\underline{\tilde{x}})\cdot(\underline{\tilde{\nabla}}u(t,\underline{\tilde{x}})) + \tilde{\beta}(t,\underline{\tilde{x}})u(t,\underline{\tilde{x}}) = 0 \quad (*tP1)_h$$

Formal fordern wir, dass $U(0,\underline{\tilde{x}})\subset G$, um $(*tP1)_h$ mit „Kurvenparameter“ t der Kurven-(Weg-)beschreibung

$$\underline{\tilde{x}} := \underline{\tilde{x}}(t) \quad (*CW1)_h \quad \text{und der Anfangsbedingung:} \quad u(0,\underline{\tilde{x}})) = u_o(\underline{\tilde{x}}) := \tilde{u}_o(\underline{\tilde{x}}(0)) \ (AB\tilde{u})$$

zu komplettieren.

(c) Mit (b) erhalten wir durch Nutzen der „Kurvendarstellung“ im Parameter t $(*CW1)_h$ das folgende lineare System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{d\,\underline{\tilde{x}}}{dt} = \underline{\tilde{x}}'(t) = \underline{\tilde{\alpha}}(t,\underline{\tilde{x}}(t)) \\ \text{mit formaler unbekannter AB } \underline{\tilde{x}}(0) = \underline{\tilde{x}}_o \end{array}\right\} \text{ AWP von } (*C)^S$$

Die Lösung von $(*C)^S$ nennt man Charakteristik der Gleichung $(*tP1)_h$ durch den Punkt $[0,\underline{\tilde{x}}_o^T]^T$.

(d) Die Idee des Verwendens der Charakteristik der Gleichung $(*tP1)_h$. Wir betrachten die Funktion $u(t,\underline{\tilde{x}})$ im Sinne von (b) in der Gestalt $u(t,\underline{\tilde{x}}) = \tilde{u}(t,\underline{\tilde{x}}(t))$. Wir benutzen die Kettenregel in skalarem t entsprechend der Bem. 5.34 und erhalten als „totale Zeitableitung“ :

$$\frac{d}{dt}\tilde{u}(t) = \frac{d}{dt}\tilde{u}(t,\underline{\tilde{x}}(t)) = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{u} + \sum_{j=2}^{n}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{x}_j}\frac{d\tilde{x}_j}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{u} + \left(\underline{\tilde{\nabla}}_{\underline{\tilde{x}}}\tilde{u}\right)^T\cdot\frac{d\underline{\tilde{x}}(t)}{dt} \ .(\#)$$

Ist dabei $\underline{\tilde{x}}(t))$ eine Lsg. von $(*C)^S$ nach (c) so folgt aus (#):

$$\frac{d}{dt}\tilde{u}(t) = \frac{d}{dt}\tilde{u}(t,\underline{\tilde{x}}(t)) = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{u} + \left(\underline{\tilde{\nabla}}_{\underline{\tilde{x}}}\tilde{u}\right)^T\underline{\tilde{\alpha}}(t,\underline{\tilde{x}}) = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{u} + \underline{\tilde{\alpha}}^T(t,\underline{\tilde{x}})\left(\underline{\tilde{\nabla}}_{\underline{\tilde{x}}}\tilde{u}\right) \ (\circ)$$

(e) Wir nutzen nun $(\circ)$ als einfache klassische Ableitung der Fkt. $\tilde{u}(t)$ und können damit $(*tP1)_h$ als lineare GDGL 1.Ordnung schreiben:

$$\tilde{u}'(t) = \frac{d}{dt}\tilde{u}(t) = -\tilde{\beta}(t,\underline{\tilde{x}}(t))\tilde{u}(t,\underline{\tilde{x}}(t)) = -\tilde{\beta}(t)\tilde{u}(t) \qquad (\heartsuit)$$

Das AWP von $(\heartsuit)$ zu $(AB\tilde{u})$ lösen wir mit Satz 3.99 als AWP einer linearen homogenen GDGL 1. Ordnung mit getrennten Variablen bzw. gemäß Abschnitt 3.5.3 und erhalten:

$$\tilde{u}(t,\underline{\tilde{x}}(t)) = \tilde{u}(t) = \tilde{u}_o\exp\{-\int_0^t\tilde{\beta}(s,\underline{\tilde{x}}(s))\,ds\} = \tilde{u}_o(\underline{\tilde{x}}(0))\exp\{-\int_0^t\tilde{\beta}(s,\underline{\tilde{x}}(s))\,ds\} \qquad .(\heartsuit\heartsuit)$$

$(\heartsuit\heartsuit)$ liefert uns die („Kurven“)-Lösung vom Urspungsproblem $(*P1)_h$ auf der Charakteristik $\underline{\tilde{x}}(t)$ durch den Pkt. $\underline{\tilde{x}}(0) = \underline{\tilde{x}}_o$!

(f) Für die Lösung von 7.11 als linearer PDGL 1.Ordnung geben wir als Zusatz-Information (verlorene Konstante) formal

$$\text{die Anfangsbedingung:} \quad u(0,\underline{\tilde{x}})) = u_o(\underline{\tilde{x}}) := \tilde{u}_o(\underline{\tilde{x}}(0)) \ (AB\tilde{u}) \ .$$

Nun können wir die Lösung in einem Punkt $\underline{x} = [t,\underline{\tilde{x}}^T(t)]^T$ wie folgt erhalten: Wir berechnen die Lösung von

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{d\,\underline{\tilde{x}}}{dt} = \underline{\tilde{x}}'(t) = \underline{\tilde{\alpha}}(t,\underline{\tilde{x}}(t)) \\ \text{mit bekannter AB } \underline{\tilde{x}}(x_1) = \underline{\tilde{x}}(t_o) = \underline{\tilde{x}}_o \end{array}\right\} \text{ AWP von } (*Ct_o)^S$$

Danach ermitteln wir auf der („Kurven“)-Lösung von $(*Ct_o)^S$ jeweils $\underset{\sim}{\tilde{x}}(0)$ und lösen wieder $(\heartsuit)$ mit der zugehörigen Anfangsbedingung $(AB\tilde{u})$ nach $(\heartsuit\heartsuit)$.

Bemerkung 7.13 (Lösung lineare partielle DGL 1.Ordnung)
In den Übungen betrachten wir das Beispiel

$$[1, x_2] \cdot (\underline{\nabla} u(\underline{x})) \;+\; (-x_1) \cdot u(\underline{x}) \;=\; 0 \quad \textit{mit} \quad D(u) \;=\; \mathbb{E}^2 \qquad (*P1)_h$$

$$\textit{bei } t := x_1\,,\; \tilde{x} := x_2 \qquad \textit{und } AB \quad u(0, \tilde{x}) \;=\; \tilde{x}^2$$

7.2.2 Die lineare partielle DGL 2.Ordnung- Typisierung

Als Spezialfall der lineare partielle Differentialgleichung nach Definition 7.18 betrachten wir die lineare PDGL 2.Ordnung zunächst ohne explizite Kennzeichnung der Zeitvariablen t:

Notation 7.14 (lineare partielle Differentialgleichung 2.Ordnung)
Vorgegeben sei bei $D \subset \mathbb{E}^n$, $n \geq 2$ das System skalarer stetiger reellwertiger Fktn.

$$\{a_{j,k}(\underline{x})\}_{j,k=1}^{n} \qquad \textit{und die vektorwertige Fkt.} \quad \underline{a}(\underline{x})\;,$$

b und f seien stetige skalare Fktn., wobei (komponentenweise) $\{a_{.}\}, b, f : D \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$ gelte. Gesucht ist eine skalare und zweimal stetig diffb. Fkt. $u : D \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$, $u \in C^2(D)$, welche der linearen partiellen Differentialgleichung 2-ter Ordnung

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{j,k}(\underline{x})\frac{\partial^2 u(\underline{x})}{\partial x_j \partial x_k}\right)\right) \;+\; \underline{a}^T(\underline{x}) \cdot (\underline{\nabla} u(\underline{x})) \;+\; b(\underline{x})u(\underline{x}) \;=\; f(\underline{x}) \quad (*P2)$$

genügt. Wir können hier nach dem Satz von Schwarz 5.39 immer $\forall\, j,k \,=\, 1,\ldots n$ die Symmetrie $a_{j,k}(.) \,=\, a_{k,j}(.)$ voraussetzen. Zudem sei $\underline{\underline{A}}(\underline{x}) := [a_{j,k}(\underline{x})]_{j=1,k=1}^{n,n} \neq \underline{\underline{0}}\; \forall\, \underline{x} \in D$.
Bei $f \,\equiv\, 0$ in $(*P2)$ erhalten wir die zugeordnete homogene Gleichung: $(*P2)_h$.

Bemerkung 7.15 (Quadratische Form)
In der Bemerkung 5.46 haben wir für den Nachweis relativer Extrema der Fkt. $f(\underline{x})$ die Hessematrix mit Hilfe der sogenannte „quadratische Form“ bei $\underline{z} \neq \underline{0}$ untersucht. Die Fkt. $f(\underline{x})$ hat in $\underline{x}^o$ ein relatives Minimum, wenn die mit der Hessematrix $\underline{\underline{H}}(\underline{x}^o)$ berechnete quadratische Form positiv definit ist. Dabei war:

$$\underline{\underline{H}}(\underline{x}^o) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}_{|\underline{x}^o} \qquad \textit{und}$$

$$(\underline{z}^T \cdot \underline{\nabla})^2 f(\underline{x}^o) = \underline{z}^T \cdot \underline{\underline{H}}(\underline{x}^o) \cdot \underline{z} \begin{cases} > 0 & \textit{positiv definit} \\ < 0 & \textit{negativ definit} \end{cases},$$

sowie das obige Vorzeichen konstant für alle $\underline{z} \in \mathbb{E}^n, \underline{z} \neq \underline{0}$.
Wie in Beispiel 5.9 zu Sattelpunkten kann man mit symmetrischen Matrizen $\underline{\underline{A}}(\underline{x})$ erklärte quadratische Formen auch über die Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}(\underline{x})$ klassifizieren.

Notation 7.16 (Typisierung linearer partielle Differentialgleichung 2.Ordnung)
Wir betrachten das System skalarer stetiger reellwertiger Fktn.

$$\{a_{j,k}(\underline{x})\}_{j,k=1}^{n}$$

aus Notation 7.14 mit $a_{j,k} : D \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$ *und setzen nach dem Satz von Schwarz 5.39 immer* $\forall\, j,k = 1,\dots n$ *die Symmetrie* $a_{j,k}(.) = a_{k,j}(.)$ *voraus. Wir erklären die Matrix* $\underline{\underline{A}}(\underline{x})$ *als Funktion von* $\underline{x} \in D$ *durch:*

$$\underline{\underline{A}}(\underline{x}) = \underline{\underline{A}}^T(\underline{x}) = [a_{j,k}(\underline{x})]_{j=1,k=1}^{n,n} = \begin{bmatrix} a_{1,1}(\underline{x}) & a_{1,2}(\underline{x}) & \cdots & a_{1,n}(\underline{x}) \\ a_{2,1}(\underline{x}) & a_{2,2}(\underline{x}) & \cdots & a_{2,n}(\underline{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}(\underline{x}) & a_{n,2}(\underline{x}) & \cdots & a_{n,n}(\underline{x}) \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(n,n,\mathbb{R})\ \forall\, \underline{x} \in D$$

Mit $\underline{\underline{A}}(\underline{x})$ *betrachten wir die quadratische Form:* $q(\underline{z}) := \underline{z}^T \cdot \underline{\underline{A}}(\underline{x}) \cdot \underline{z}\ \forall \underline{z} \in \mathbb{E}^n, \underline{z} \neq \underline{0}$.

i) *Wir nennen die Gleichung* $(*P2)$ *ellipisch, wenn die quadratische Form* $q(.)$ *positiv (oder negativ) definit ist:*

$$q(\underline{z}) = \underline{z}^T \cdot \underline{\underline{A}}(\underline{x}) \cdot \underline{z} \begin{cases} > 0 & \text{positiv definit} \\ < 0 & \text{negativ definit} \end{cases} \forall \underline{z} \in \mathbb{E}^n, \underline{z} \neq \underline{0} \quad \text{und} \quad \forall\, \underline{x} \in D \,\text{gilt.}$$

D.h. auch für alle Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}(\underline{x})$ *gilt entweder:* $\lambda_j(\underline{x}) > 0\ \forall j = 1,\dots,n$
(oder $-\underline{\underline{A}}(\underline{x})$ *positiv definit, d.h.* $\lambda_j(\underline{x}) < 0\ \forall j = 1,\dots,n$*).*

ii) *Wir nennen die Gleichung* $(*P2)$ *hyperbolisch,, wenn die quadratische Form* $q(.)$ *indefinit ist:*

$$\forall\, \underline{x} \in D \,\text{gilt}\, \exists\, \underline{z}_1\,,\ \underline{z}_2 \in \mathbb{E}^n \,\text{mit}\ q(\underline{z}_1) > 0 > q(\underline{z}_2)\ .$$

D.h. auch: alle Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}(\underline{x})$ *sind von Null verschieden* $\lambda_j(\underline{x}) \neq 0\ \forall j = 1,\dots,n$ *und haben nicht alle das gleiche Vorzeichen.*

iii) *Wir nennen die Gleichung* $(*P2)$ *parabolisch, wenn die quadratische Form* $q(.)$ *semidefinit ist.*

$$q(\underline{z}) = \underline{z}^T \cdot \underline{\underline{A}}(\underline{x}) \cdot \underline{z} \begin{cases} \geq 0 & \text{positiv semidefinit} \\ \leq 0 & \text{negativ semidefinit} \end{cases} \forall \underline{z} \in \mathbb{E}^n, \underline{z} \neq \underline{0} \quad \text{und} \quad \forall\, \underline{x} \in D \,\text{gilt.}$$

D.h. auch mindestens ein Eigenwert von $\underline{\underline{A}}(\underline{x})$ *ist Null und alle Nicht-Null-Eigenwerte von* $\underline{\underline{A}}(\underline{x})$ *haben das gleiche Vorzeichen.*

7.2.3 Die lineare (elliptsche) PDGL 2.Ordnung

Wir betrachten mit Notation 7.9 die Poisson- und Laplace-Gleichung in einem beschränkten Gebiet $G \subset \mathbb{E}^n$ bzw. Ganz- oder Halbraum, d.h. $G = \mathbb{E}^n$ oder $G = \mathbb{E}^{n-1} \times (0,\infty)$ bei $n \geq 2$:

$$-\triangle\, u(\underline{x}) = f(\underline{x}) \quad (*\triangle 2) \qquad \text{und} \qquad -\triangle\, u_h(\underline{x}) = 0 \quad (*\triangle 2)_h \quad ,$$

Bemerkung 7.17 (Laplace elliptisch)
„Poisson-Gleichungen“ $(*\triangle 2)$ *und die Laplace-Gleichungen“* $(*\triangle 2)_h$ *sind lineare ellipische PDGL 2. Ordnung, denn nach Notation 7.16 gilt:*

$$q(\underline{z}) = \underline{z}^T \cdot \underline{\underline{A}}(\underline{x}) \cdot \underline{z} = \underline{z}^T \cdot (-\underline{\underline{E}}) \cdot \underline{z} = -\|\underline{z}\|^2_{\mathbb{E}^n} < 0 \quad \forall \underline{z} \in \mathbb{E}^n, \underline{z} \neq \underline{0} \quad \text{und} \quad \forall\, \underline{x} \in G\,.$$

Definition 7.18 (Grundlösung Laplace-Gleichung)
Wir nennen die Funktion $\mathcal{G} : \mathbb{E}^n \backslash \{\underline{0}\} \longrightarrow \mathbb{E}^1$

$$\mathcal{G}(\underline{x}) := \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \ln \|\underline{x}\|_{\mathbb{E}^2} & \qquad n = 2 \\ & \text{bei} \\ \dfrac{1}{(n-2)|\omega_n| \cdot \|\underline{x}\|^{n-2}_{\mathbb{E}^n}} & \qquad n > 2 \end{cases}$$

Grundlösung der Laplace-Gleichung im $\mathbb{E}^n$. Hier bezeichnet $|\omega_n|$ die Oberfläche der Einheitskugel (Kugel mit dem Radius 1) im $\mathbb{E}^n$, speziell ist dabei $|\omega_3| = 4\pi\,, |\omega_4| = 2\pi^2\,, |\omega_5| = \dfrac{8}{3}\pi^2\,, \dots$

Bemerkung 7.19 (Lösungs-Eigenschaft von $\mathcal{G}$)
Durch einfaches Nachrechnen überprüft man, dass die Funktion $\mathcal{G} : \mathbb{E}^n \backslash \{\underline{0}\} \to \mathbb{E}^1$ nach Definition 7.18 $\forall\, \underline{x} \in \mathbb{E}^n \backslash \{\underline{0}\}$ Lösung der Laplace-Gleichung:

$$-\triangle\, \mathcal{G}(\underline{x}) = 0$$

ist, also in jedem Punkt $\underline{x}$ ihres Definitionsbereiches (d.h. mit Ausnahme des singulären Punktes $\underline{x} = \underline{0}$) eine harmonisch Fkt. darstellt.

Notation 7.20 (Randbedingungen und Abfallbedingungen lineare PDGL 2.Ordnung)
Es sei $G \subset \mathbb{E}^n$ Gebiet mit echtem $\partial G \neq \emptyset$ (∂G sei möglichst glatt). Auf ∂G (d.h. $\forall\, \underline{x} \in \partial G$) sei zudem die stetige reellwertiger Fkt. $u_R : \partial G \to \mathbb{E}^1$ vorgegeben, also $u_R \in C(\partial G)$.
Von einer gesuchten Fkt. $u : \overline{G} \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$ als Lsg. von $(*\triangle 2)$ bzw. $(*\triangle 2)_h$, fordern wir bei $u \in C^2(G) \cap C^0(\overline{G})$ bzw. $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ als Zusatzbedingung:

i) *Dirichletsche RB* oder *RB 1.Art* , es gelte für die Lsg. u

$$u(\underline{x}) = u_R(\underline{x}) \quad \forall\, \underline{x} \in \partial G \qquad .$$

ii) *Neumannsche RB* oder *RB 2.Art* , es gelte für die Richtungsableitung der Lsg. u in Normalen-Richtung $\underline{n}(\underline{x})$:

$$\frac{\partial u}{\partial < \underline{n} >}(\underline{x}) = \frac{\partial u}{\partial \underline{n}}(\underline{x}) = u_R(\underline{x}) \quad \forall\, \underline{x} \in \partial G \qquad .$$

iii) *Robinsche RB oder RB 3.Art , für die Lsg. u gelte mit auf ∂G vorgegebenen (stetigen) Funktionen $g, h : \partial G \to \mathbb{E}^1$:*

$$g(\underline{x})u(\underline{x}) + h(\underline{x})\frac{\partial u}{\partial \underline{n}}(\underline{x}) = u_R(\underline{x}) \quad \forall\, \underline{x} \in \partial G \qquad .$$

Nun sei Gebiet $G \subset \mathbb{E}^n$ unbeschränkt. Im Falle $\partial G \neq \emptyset$ sei ∂G möglichst glatt und auf ∂G werde wieder die stetige reellwertiger Fkt. $u_R : \partial G \to \mathbb{E}^1$ vorgegeben mit $u_R \in C(\partial G)$.
Als Zusatzbedingung: Abfallbedingungen fordern wir von einer Lsg. von $(*\triangle 2)$ bzw. $(*\triangle 2)_h$ bei $u \in C^2(G) \cap C^0(\overline{G})$:

iA) *RBA oder Abfallbedingungen 1.Art , d.h.*

$$\lim_{\|\underline{x}\|_{\mathbb{E}^n} \to \infty} u(\underline{x}) = 0 \text{ gilt.}$$

(bei $\partial G \neq \emptyset$ sei $u(\underline{x}) = u_R(\underline{x}) \forall\, \underline{x} \in \partial G$ mit $\lim_{\|\underline{x}\|_{\mathbb{E}^n} \to \infty} u_R(\underline{x}) = 0$ für unbeschränkte Ränder ∂G)

Wie im Abschnitt 3.5.8 zu Randwertprobleme für lineare GDGL 2.Ordnung erklären wir nun die RWP (Randwertprobleme) für die lin. PDGL 2.Ordnung $(*\triangle 2)$ bzw. $(*\triangle 2)_h$:

Notation 7.21 (Randwertprobleme der Poisson- und Laplace-Gleichung)
Die Problemstellung: Gesucht ist eine Funktion u (u_h) mit $u \in C^2(G) \cap C^0(\overline{G})$ (oder $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ bei Randbedingung 2. und 3.Art) , die in dem Gebiet G (d.h. $\forall\, \underline{x} \in \partial G$) der PDGL

$$-\triangle\, u(\underline{x}) = f(\underline{x}) \quad (*\triangle 2) \qquad \text{bzw.} \qquad -\triangle\, u_h(\underline{x}) = 0 \quad (*\triangle 2)_h \quad ,$$

genügt und eine Randbedingung nach Notation 7.20 befriedigt, nennen wir Randwertproblem 1., 2, oder 3. Art (bzw. A-Randwertproblem) der Poisson- und Laplace-Gleichung.

Bemerkung 7.22 (Lösungs-Konstruktion von Randwertproblemen mit $\mathcal{G}$)
Randwertproblem der Poisson-Gleichung lösen wir in beschränkten Gebieten in zwei Schritten: Im ersten Schritt konstruieren wir durch Falten von f mit $\mathcal{G}$ eine Lsg. v der Gleichung $(*\triangle 2)$. Im zweiten Schritt lösen wir dann $(*\triangle 2)_h$ mit „korrigierten" Randbedingungen , wobei wir einfach das Superpositionsprinzip wie im Satz: 2.50 sowie Abschnitte (GDGL) 3.5.3; 3.5.4 und 3.5.6 für das RWP nutzen.

Beispiel 7.4 (Poissonsche RWA Dirichlet)
In beschränktem Gebiet $G \subset \mathbb{E}^n$ bei $n \geq 2$ suchen wir die Lsg. $u \in C^2(G) \cap C^0(\overline{G})$ der Gleichung:

$$-\triangle\, u(\underline{x}) \;=\; f(\underline{x}) \quad \text{in} \quad G \quad (*\triangle 2) \qquad \text{mit Dirichletschen RB} \qquad u(\underline{x}) := u_R(\underline{x})\;\forall\, \underline{x} \in \partial G\;(PB).$$

Wir konstruieren eine Lsg. v von $(*\triangle 2)$ durch das Faltungs-Integral

$$v(\underline{x}) \;=\; (f * \mathcal{G})(\underline{x}) \;:=\; \int_{\overline{G}} \mathcal{G}(\underline{x}-\underline{t}) \cdot f(\underline{t})\, dt_1 \ldots dt_n \;=\; \int_{\overline{G}} \mathcal{G}(\underline{x}-\underline{t}) \cdot f(\underline{t})\, d\overline{G}$$

Nun erklären wir $u(\underline{x}) := v(\underline{x}) + u_h(\underline{x})$. Das Einsetzen vom Summenansatz für u in $(*\triangle 2)$ liefert wegen $-\triangle\, v(\underline{x}) = f(\underline{x})$:

$$-\triangle\,(v(\underline{x}) + u_h(\underline{x})) \;=\; f(\underline{x}) \quad \text{also :} \qquad -\triangle\, u_h(\underline{x}) \;=\; 0 \quad (*\triangle 2)_h\;.$$

Schliesslich können wir aus der bekannten Fkt. v und aus der Funktion u_R die Dirichletschen Randbedingungen für u_h ausrechnen:

$$u_h(\underline{x}) \;=\; [u(\underline{x}) - v(\underline{x})] \;=\; [u_R(\underline{x}) - v(\underline{x})] \;=:\; [u_h]_R(\underline{x}) \forall\, \underline{x} \in \partial G\,.$$

Mit bekannter Lsg. $u_h(\underline{x})$ dieses 1. RWP für $(*\triangle 2)_h$ haben wir dann auch unser Gesamtproblem (PB) gelöst.

Bemerkung 7.23
Für die Lösung des 1.Randwertproblems der Laplace-Gleichung $(*\triangle 2)_h$ nutzt man z.B. Poisson'sche Integralformeln.

Beispiel 7.5 (Poisson'sche Integralformeln)

a) $G = \{\underline{x} \in \mathbb{E}^2 : x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$ Kreis mit Radius R im $\mathbb{E}^2$, Rand $\partial G = \{\underline{x} \in \mathbb{E}^2 : x_1^2 + x_2^2 = R^2\}$.

$$u_R(\underline{x}) := \tilde{u}(\underline{x}) \;=\; \tilde{u}(R\cos\varphi, R\sin\varphi) \;=\; \tilde{u}(\varphi)$$

$$\underline{x} = r \cdot \begin{bmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{bmatrix}$$

$$u(\underline{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\vartheta - \varphi)} \tilde{u}(\varphi)\, d\varphi \quad .$$

b) $G = \{\underline{x} \in \mathbb{E}^2 : \|\underline{x}\|_{\mathbb{E}^3} < R\}$ Kugel mit Radius R im $\mathbb{E}^3$, Rand $\partial G = \{\underline{x} \in \mathbb{E}^3 : \|\underline{x}\|_{\mathbb{E}^3} = R\}$.

$$u_R(\underline{y}) := \tilde{u}(\underline{y}) \;=\; \tilde{u}(R\sin\vartheta_1\cos\varphi_1, R\sin\vartheta_1\sin\varphi_1, R\cos\vartheta_1) \;=\; \tilde{u}(\vartheta_1, \varphi_1)$$

$$\underline{x} = r \cdot \begin{bmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

$$\text{Randpkt. } \underline{y} = R \cdot \begin{bmatrix} \sin\vartheta_1\cos\varphi_1 \\ \sin\vartheta_1\sin\varphi_1 \\ \cos\vartheta_1 \end{bmatrix}$$

$$u(\underline{x}) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\gamma))^{\frac{3}{2}}} \tilde{u}(\vartheta_1, \varphi_1)\, \sin\vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi_1 \quad .$$

Dabei ist γ der Winkel zwischen den Ortsvektoren $\underline{x}$ und $\underline{y}$ (Raumwinkel)

c) $G = \{\underline{x} \in \mathbb{E}^2 : x_2 > 0\}$ obere Halb-Ebene im $\mathbb{E}^2$, Rand $\partial G = \{\underline{x} \in \mathbb{E}^2 : x_2 = 0\}$.

$$u_R(\underline{x}) := \tilde{u}(x_1, 0) = \tilde{u}(x_1) \quad \text{mit:} \lim_{|t|\to\infty} \tilde{u}(t) = 0.$$

$$\underline{x} = \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$u(\underline{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \cdot x_2}{(x_1 - t)^2 + x_2^2} \tilde{u}(t)\, dt \quad .$$

(Herleitung über partielle Fourier-Transformation vgl. Burg, Haf, Wille: Bnd. III S. 320 ff.)

7.2.4 Das Cauchy-Problem der Wellen- und lineare Wärmeleitungsgleichung

Notation 7.24 (Raum-Zeit-Zylinder)
Es sei $G \subset \mathbb{E}^n$ ein Gebiet (offen) im Ortsraum. Dann bezeichnen wir die Menge Ω:
$\Omega := (0, \infty) \times G \subset \mathbb{E}^{n+1}$ als offenen Raum-Zeit-Zylinder. Den Abschluss der Menge Ω im $\mathbb{E}^{n+1}$: d.h. die Menge $\overline{\Omega}$ nennen wir den abgeschlossenen Raum-Zeit-Zylinder.

Wir betrachten nun mit Bemerkung 7.10 die Wellengleichung und die Wärmeleitungsgleichung zunächst im (Orts-)Ganzraum, d.h. $G = \mathbb{E}^n$ bei $n \geq 1$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \cdot \triangle_{\underline{x}}\, u(t, \underline{x}) = \Box_{c,\underline{x}} u(t, \underline{x}) = f(t, \underline{x}) \quad (*\Box 2) \quad ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \cdot \triangle_{\underline{x}}\, u(t, \underline{x}) = f(t, \underline{x}) \quad (*W2) \quad .$$

Bemerkung 7.25 (Wellengleichung hyperbolisch, Wärmeleitungsgleichung parabolisch)
Die „Wellengleichung“ $(*\Box 2)$ und die zugehörige homogene Gleichung $(*\Box 2)_h$ sind lineare hyperbolische PDGL 2. Ordnung, denn nach Notation 7.16 gilt:

$$q(\underline{z}) = \underline{z}^T \cdot \underline{\underline{A}}(\underline{x}) \cdot \underline{z} = \underline{z}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & \underline{0}^T \\ \underline{0} & -c^2 \underline{\underline{E}} \end{bmatrix} \cdot \underline{z} = z_t^2 - c^2 \cdot (z_1^2 + \ldots z_n^2)$$

$$\forall \underline{z} \in \mathbb{E}^{n+1}, \underline{z} \neq \underline{0} \quad \text{und} \quad \forall\, \underline{y} := \begin{bmatrix} t \\ \underline{x} \end{bmatrix} \in (0, \infty) \times G \subset \mathbb{E}^{n+1} \; .$$

Die „Wärmeleitungsgleichung“ $(*W2)$ und die zugehörige homogene Gleichung $(*W2)_h$ sind lineare parabolische PDGL 2. Ordnung, denn nach Notation 7.16 gilt:

$$q(\underline{z}) = \underline{z}^T \cdot \underline{\underline{A}}(\underline{x}) \cdot \underline{z} = \underline{z}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & \underline{0}^T \\ \underline{0} & -c^2 \underline{\underline{E}} \end{bmatrix} \cdot \underline{z} = 0 - c^2 \cdot (z_1^2 + \ldots z_n^2)$$

$$\forall \underline{z} \in \mathbb{E}^{n+1}, \underline{z} \neq \underline{0} \quad \text{und} \quad \forall\, \underline{y} := \begin{bmatrix} t \\ \underline{x} \end{bmatrix} \in (0, \infty) \times G \subset \mathbb{E}^{n+1} \; .$$

Notation 7.26 (Anfangsbedingungen und Cauchyproblem der Wellengleichung)
Es sei $G = \mathbb{E}^n$. Auf G seien die stetigen reellwertiger Fktn. $u_o \in C^1(G)$ und u_1 vorgegeben, d.h: u_o, $u_1 : G \to \mathbb{E}^1$. Zudem sei f eine auf Ω erklärte stetige reellwertiger Fkt:$f : (0, \infty) \times G \to \mathbb{E}^1$. Als Cauchyproblem der Wellengleichung bezeichnen wir die folgende Aufgabenstellung: Gesucht ist eine Fkt. $u : \overline{\Omega} \subset \mathbb{E}^{n+1} \to \mathbb{E}^1$ als Lsg. von

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \cdot \triangle_{\underline{x}}\, u(t, \underline{x}) = \Box_{c,\underline{x}} u(t, \underline{x}) = f(t, \underline{x}) \quad (*\Box 2) \quad ,$$

bzw. $(*\square 2)_h$ *, mit* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$*, welche den Anfangsbedingungen:*

$$u(0, \underline{x}) \;=\; u_o(\underline{x}) \quad \textit{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, \underline{x}) \;=\; u_1(\underline{x}) \;\forall\, \underline{x} \,\in\, G \qquad .$$

genügt.

Beispiel 7.6 (Lösung Cauchy-Problem Wellengleichung räumlich ein-dimensional)
Die Lösung des Anfangswertproblems der eindimensionalen Wellengleichung in $\overline{\Omega} = [0, \infty) \times \mathbb{E}^1$:

$$\square_{c,x} u(t, x) \;=\; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;=\; f(t, x)$$

$$u(0, x) \;=\; u_o(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) \;=\; u_1(x)$$

Erhalten wir durch Nutzen der Lösungsformel:

$$u(t, x) \;=\; \frac{1}{2c}[\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(s, y) dy ds \;+\; c \cdot (u_o(x + ct) + u_o(x - ct)) + \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy\,]$$

Bemerkung 7.27 (Lösung Cauchy-Problem Wellengleichung räumlich n-dimensional)
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ *hat die Lösung des AWP der räumlich* n*-dimensionalen Wellengleichung eine andere Gestalt. Gemeinsam nutzen die Lösungsformeln nur die zeitliche Heavyside-Funktion (vgl. Beispiel 3.1):*

(d) Heavyside-Funktion: $\chi(t) = \begin{cases} 1, & \textit{wenn } t \in [0, \infty) \\ 0, & \textit{wenn } t \in (-\infty, 0), \end{cases}$

Notation 7.28 (Anfangsbedingungen und Cauchyproblem der Wärmeleitungsgleichung)
Es sei $G = \mathbb{E}^n$*. Auf* G *sei die stetige reellwertiger Fkt.* $u_o \in C(G)$ *vorgegeben, d.h:* $u_o : G \to \mathbb{E}^1$*.*
Zudem sei f *eine auf* Ω *erklärte stetige reellwertiger Fkt:* $f : (0, \infty) \times G \to \mathbb{E}^1$*.*
Als Cauchyproblem der Wärmeleitungsgleichung bezeichnen wir die folgende Aufgabenstellung:
Gesucht ist eine Fkt. $u : \overline{\Omega} \subset \mathbb{E}^{n+1} \to \mathbb{E}^1$ *als Lsg. von*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \cdot \triangle_{\underline{x}}\, u(t, \underline{x}) \;=\; f(t, \underline{x}) \quad (*W2) \quad ,$$

bzw. $(*W2)_h$ *, mit* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$*, welche der Anfangsbedingung:*

$$u(0, \underline{x}) \;=\; u_o(\underline{x}) \quad \forall\, \underline{x} \,\in\, G \qquad \textit{genügt.}$$

Beispiel 7.7 (Lösung Cauchy-Problem Wärmeleitungsgleichung räumlich n-dimensional)
Die Lösung des Anfangswertproblems der n-dimensionalen Wellengleichung nach Notation 7.28 in $\overline{\Omega} = [0, \infty) \times \mathbb{E}^n$ wird erklärt durch:

$$u(t, \underline{x}) \;=\; \frac{\chi(t)}{(2c\sqrt{\pi})^n} \int_0^t \int_{\mathbb{E}^n} \frac{exp(-\frac{\|\underline{x} - \underline{y}\|_{\mathbb{E}^n}}{4c^2(t - \tau)})}{(t - \tau)^{\frac{n}{2}}} \cdot f(t, \underline{y})\, dy_1 \cdots dy_n d\tau \quad +$$

$$+ \frac{\chi(t)}{(2c\sqrt{\pi}\sqrt{t})^n} \cdot \int_{\mathbb{E}^n} exp(-\frac{\|\underline{x} - \underline{y}\|_{\mathbb{E}^n}}{4c^2 t}) \cdot u_o(\underline{y})\, dy_1 \cdots dy_n$$

Bemerkung 7.29 (Integralkonvergenz)
Für die Konvergenz (Existenz) der Integrale in dem Beispiel 7.7 muss man Abfallbedingungen an die Funktionen $u_o(\underline{x})$ *und räumlich an* $f(t, \underline{x})$ *stellen.*

7.2.5 Separationsmethoden für lineare PDGL 2.Ordnung

Wir suchen Lösungen u der Poisson- und Laplacegleichung nach Notation 7.9 sowie der Wellen- bzw. Wärmeleitungsgleichung nach Bemerkung 7.10 bei $G \subset \mathbb{E}^n$ als offenes beschränktes Gebiet im Ortsraum mit echtem Rand ∂G, wobei G Symmetriebedingungen genügen soll. (G sei z.B. ein offener Kreis, eine offene Kugel, offener Quader, offener Zylinder u.s.w.)

> **Idee:** Wir arbeiten mit Produktansatz der Form $u(\underline{x}) = u(x_1, x_2, x_3) = U(x_1)V(x_2)W(x_3)$ bzw. $u(t, \underline{x}) = T(t) \cdot U(\underline{x})$.

Bemerkung 7.30 (Produktansatz)
Die mit der obigen Idee eingeführte Methode bezeichnet man als Bernoullischen Produktansatz oder Separationsansatz zur Lösung linearer PDGL 2. Ordnung.
(Man spricht auch von einer Fourier-Methode.)

Bemerkung 7.31 (Werkzeuge-Intervall-Länge π)
Wir erinnern an Beispiel 4.13 und betrachten zuerst das System der „halbper. sin-Fktn.“ als Eigenfunktionen von „$-u''$“ mit Dirchletschen RB (RB 1.Art) $R_1[u] := u(0) = R_2[u] := u(\pi) = 0$,

$$w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx) \quad k \in \mathbb{N}$$
$$\text{also} \quad -(w_k)''(x) = \lambda_k w_k(x) = k^2 w_k(x) \qquad \text{mit } R_1[w_k] = R_2[w_k] = 0$$

sowie das System der „halbper. cos-Fktn.“ als Eigenfunktionen von „$-u''$“ mit Neumannschen RB (RB 2.Art) $R_1[u] := u'(0) = R_2[u] := u'(\pi) = 0$,

$$v_o(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\,,\ v_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(kx), k \in \mathbb{N}_o$$
$$\text{also} \quad \forall k \in \mathbb{N}_o: \ -(v_k)''(x) = \lambda_k v_k(x) = k^2 v_k(x) \qquad \text{mit } R_1[v_k] = R_2[v_k] = 0$$

Bemerkung 7.32 (Werkzeuge-Intervall-Länge $L: 0 < L < \infty$)
Mit Bemerkung 7.31 können wir sofort auch die entsprechenden Systeme auf dem Intervall $[0, L]$ *aufschreiben. Wir betrachten wieder zuerst das System der „halbper. sin-Fktn.“ als Eigenfunktionen von „$-u''$“ mit Dirchletschen RB (RB 1.Art)* $R_1[u] := u(0) = R_2[u] := u(L) = 0$,

$$w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{\pi}{L}kx) \quad k \in \mathbb{N}$$
$$\text{also} \quad -(w_k)''(x) = \lambda_k w_k(x) = k^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 w_k(x) \qquad \text{mit } R_1[w_k] = R_2[w_k] = 0$$

sowie das System der „halbper. cos-Fktn.“ als Eigenfunktionen von „$-u''$“ mit Neumannschen RB (RB 2.Art) $R_1[u] := u'(0) = R_2[u] := u'(L) = 0$,

$$v_o(x) = \sqrt{\frac{1}{L}}\,,\ v_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos(\frac{\pi}{L}kx), k \in \mathbb{N}_o$$
$$\text{also} \quad \forall k \in \mathbb{N}_o: \ -(v_k)''(x) = \lambda_k v_k(x) = k^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 v_k(x) \qquad \text{mit } R_1[v_k] = R_2[v_k] = 0$$

Beispiel 7.8 (Dirchletsche RWA für $(*\triangle 2)$)
Es sei $G := \{\underline{x} \in \mathbb{E}^2 : 0 < x_1, x_2 < \pi\}$ und ∂G der Rand dieses offenen Quadrates. Wir betrachten die homogene Dirchletsche RWA für $(*\triangle 2)$:

$$-\triangle u(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \qquad (*\triangle 2)$$
$$u(\underline{x}) = u_R(\underline{x}) = 0 \quad \forall \underline{x} \in \partial G \qquad .$$

Unsere RB sind also bei $x_1 \in [0,\pi] : 0 = u(x_1,0) = u(x_1,\pi)$ und bei $x_2 \in [0,\pi] : 0 = u(0,x_2) = u(\pi,x_2)$.
Arbeiten nun wie in Beispiel 4.13 und betrachten zuerst das Eigenwertproblem des Laplaceoperators mit homogenen Dirchletschen RB:

Gesucht ist eine Fkt. (Eigenfunktionen) $u(\underline{x})$, $u \in C^2(G) \cap \mathbb{C}^0(\overline{G})$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C} \cong \mathbb{E}^1_{\mathbb{C}}$ als Lösung von:

$$-\triangle u(x_1,x_2) = \lambda u(x_1,x_2) \qquad \text{bei RB: } u_{|\partial G} = 0 \quad (*\triangle 2\lambda)$$

Für die gesuchten Eigenfunktionen u machen wir den Produktansatz: $u(x_1,x_2) = U(x_1)V(x_2)$.
Einsetzen in die PDGL des Problems $(*\triangle 2\lambda)$ liefert:

$$-\triangle u(\underline{x}) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) u(x_1,x_2) = -(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}U(x_1))V(x_2) - (\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}V(x_2))U(x_1) =$$
$$= -(\frac{d^2}{dx_1^2}U(x_1))V(x_2) - U(x_1)(\frac{d^2}{dx_2^2}V(x_2)) = -U''(x_1)V(x_2) - U(x_1)V''(x_2) = \lambda U(x_1)V(x_2)$$

Das heißt explizit (zunächst formal):

$$-\frac{U''(x_1)}{U(x_1)} - \frac{V''(x_2)}{V(x_2)} = \lambda$$

Wir nutzen nun die einfache (Produktansatz-)Argumentation:

$$F(x_1) + H(x_2) = c = const. \quad \Leftrightarrow \quad F(x_1) = const. = c_1, H(x_2) = const. = c_2 \text{ und } c_1 + c_2 = c\,.$$

Das liefert als GDGL:

$$-U''(x_1) = c_1 U(x_1) \text{ und } -V''(x_2) = c_2 V(x_2) \qquad ,$$

jeweils mit den homogenen Dirchletschen RB aus Bemerkung 7.31. Wir nutzen die halbperiodischen Sinusfunktionen aus Bemerkung 7.31 und erhalten das System der Eigenfunktionen als Lösungen von $(*\triangle 2\lambda)$ als $(\heartsuit)$:

$$\{w_{k,l}(\underline{x})\}_{k,l=1}^{\infty} = \{w_k(x_1)w_l(x_2)\}_{k,l=1}^{\infty} = \left\{\frac{2}{\pi}\sin(kx_1)\sin(lx_2)\right\}_{k,l=1}^{\infty} \quad \text{zu Eigenwerten} \quad \left\{\lambda_{k,l} = k^2 + l^2\right\}_{k,l=1}^{\infty}.$$

Offensichtlich bilden diese Eigenfunktionen eine Orthonormalbasis des Raumes $\mathbb{L}_2(G)$ (vgl. Orthonormalbasis des $\mathbb{L}_2(0,2\pi)$ aus Bem. 4.57.), denn es gilt:

$$(w_{k,l}(\underline{x}), w_{m,s}(\underline{x}))_{\mathbb{L}_2(G)} = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} w_{k,l}(\underline{x}) \cdot w_{m,s}(\underline{x}) d\underline{x} = \delta_{k,m} \cdot \delta_{l,s}\,.$$

Wir suchen nun die Lösung $u(x_1,x_2)$ der Dirchletsche RWA für $(*\triangle 2)$ ganz analog zum eindimensionalen Beispiel 4.13, nur hier in der Gestalt einer Doppel-Fourier-Reihe:

$$u(x_1,x_2) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \hat{u}_{k,l} \cdot w_{k,l}(\underline{x})$$

Für die rechte Seite in $(*\triangle 2)$, die Funktion $f(x_1,x_2) = x_1 x_2$ berechnen wir ebenfalls ihre Darstellung als Doppel-Fourier-Reihe:

$$f(x_1,x_2) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \hat{f}_{k,l} \cdot w_{k,l}(\underline{x}) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{2\pi(-1)^{k+l}}{kl} \cdot w_{k,l}(\underline{x})\ ,$$

denn $\int\limits_0^\pi x{\cdot}\sin(kx)\,dx \;=\; \frac{\pi(-1)^{k+1}}{k}$ $\left(\text{ bzw. } \int\limits_0^\pi x\cdot\sin(lx)\,dx \;=\; \frac{\pi(-1)^{l+1}}{l}\right)$ und $(-1)^{k+l} \;=\; (-1)^{k+l+2}$.

$$-\triangle u(\underline{x}) \;=\; -\triangle\left(\sum_{k,l=1}^{\infty}\hat{u}_{k,l}w_{k,l}(\underline{x})\right) \underset{(\heartsuit)}{=} \sum_{k,l=1}^{\infty}\lambda_{k,l}\hat{u}_{k,l}w_{k,l}(\underline{x}) \underset{(*\triangle 2)}{=} \sum_{k,l=1}\hat{f}_{k,l}\cdot w_{k,l}(\underline{x}) = f(\underline{x})$$

Mit $\hat{u}_{k,l} \;=\; \frac{\hat{f}_{k,l}}{\lambda_{k,l}}$ für alle $k,l \,\in\, \mathbb{N}$ erhalten wir die Lösung $u(\underline{x})$ in Reihengestalt als:

$$u(x_1,x_2) = \sum_{k,l=1}^{\infty}\hat{u}_{k,l}\cdot w_{k,l}(\underline{x}) \;=\; \sum_{k,l=1}^{\infty}\frac{2\pi(-1)^{k+l}}{kl(k^2+l^2)}\cdot w_{k,l}(\underline{x})\;.$$

Beispiel 7.9 (Eigenwertproblem Neumannsche RWA für $(*\triangle 2)$**)**
Es sei $G := \{\underline{x}\in\mathbb{E}^3 : 0 < x_1,x_2,x_3 < L\}$ und ∂G der Rand dieses offenen Würfels. Wir betrachten das Eigenwertproblem mit homogenen Neumannschen RB für $(*\triangle 2)$, d.h. wir suchen u als Lösung von:

$$-\triangle u(\underline{x}) = \lambda u(x_1,x_2,x_3) \qquad \text{bei RB: } \frac{\partial u}{\partial \underline{n}}_{|\partial G} = 0 \quad (*\triangle 2\lambda)\,.$$

Der Produktansatz: $u(x_1,x_2,x_3) = U(x_1)V(x_2)W(x_3)$ liefert hier wieder als GDGL:

$$-U''(x_1) = c_1U(x_1)\;\;,\; -V''(x_2) = c_2V(x_2)\;\text{ und }\; -W''(x_3) = c_3W(x_3) \quad ,$$

jeweils mit den homogenen Neumannschen RB nun aus Bemerkung 7.32. Wir nutzen nun die halbperiodischen Cosinusfunktionen aus Bemerkung 7.32 und erhalten das System der Eigenfunktionen als Lösungen von $(*\triangle 2\lambda)$ mit

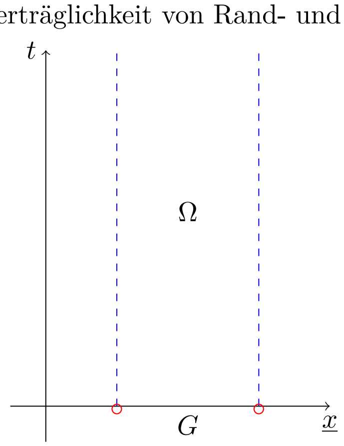
$$\{v_{k,l,m}(\underline{x})\}_{k,l,m=1}^{\infty} = \{v_k(x_1)v_l(x_2)v_m(x_3)\}_{k,l,m=1}^{\infty} \quad \text{zu Eigenwerten } \left\{\lambda_{k,l,m} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2\cdot(k^2+l^2+m^2)\right\}_{k,l,m=1}^{\infty}\,.$$

Beispiel 7.10 (Lösung des Rand-Anfangs-WP der räumlich eindim.Wellengleichung)
Wir suchen die Lösung des Anfangswertproblems der eindimensionalen Wellengleichung in $\overline{\Omega} \;=\; [0,\infty)\;\times\;[0,L]$:

$$(*\Box 2)_h \qquad \Box_{c,x}u(t,x) \;=\; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \;-\; c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;=\; 0 \qquad \text{in } \Omega$$

mit AB: $u(0,x) \;=\; u_o(x)\,,\; \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) \;=\; u_1(x)\,\forall x \,\in\, [0,L]$ und RB: $u_R(t,0) \;=\; u_R(t,L) \;=0\;\forall t \,\in\, [0,\infty)$

(Skizze Verträglichkeit von Rand- und Anfangsbedingungen)



- $\lim\limits_{t\to 0} u_R(t,0) \;=\; \lim\limits_{x\to 0} u_o(x)$ auch $(*W2)$
- $\lim\limits_{t\to 0} u_R(t,L) \;=\; \lim\limits_{x\to L} u_o(x)$ auch $(*W2)$
- $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\partial u_R}{\partial t}(t,0) \;=\; \lim\limits_{x\to 0} u_1(x)$
- $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\partial u_R}{\partial t}(t,L) \;=\; \lim\limits_{x\to L} u_1(x)$

Benutzen den Ansatz: $u(t,x) = T(t)\cdot U(x)$ und erhalten nach Einsetzen aus $(*\Box 2)_h$

$$\Box_{c,x} u(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (\frac{\partial^2}{\partial t^2}T(t))U(x) - c^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x))T(t) =$$
$$= (\frac{d^2}{dt^2}T(t))U(x) - c^2 T(t)(\frac{d^2}{dx^2}U(x)) = T''(t)U(x) - c^2T(t)U''(x) = 0\cdot T(t)U(x)$$

Das heißt explizit (zunächst formal):

$$-\frac{U''(x)}{U(x)} = -\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

Wir nutzen nun die einfache (Produktansatz-)Argumentation:

$$-H(x) = -c^{-2}F(t) = const. \quad \Leftrightarrow \quad -H(x) = c_1 = -c^{-2}F(t).$$

Das liefert als GDGL:

$$(i) \quad -U''(x) = c_1 U(x) \text{ und } \quad (ii) \quad -T''(t) = c^2\cdot c_1 T(t) \quad ,$$

wobei wir für die erste GDGL mit den homogenen Dirchletschen RB aus Bemerkung 7.32 arbeiten können. Wir nutzen die halbperiodischen Sinusfunktionen aus Bemerkung 7.32 und erhalten das System der Eigenfunktionen als Lösungen von (i) :

$$\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{\pi}{L}kx)\right\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{zu Eigenwerten } c_1 \in \left\{\lambda_k = k^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Das Einsetzen der $c_1 = \lambda_k$ in (ii) liefert bei fixem $k \in \mathbb{N}$ die Lösungen:

$$\{T_k(t)\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\hat{T}_{k,c}\cdot\cos(\frac{c\pi}{L}kt) + \hat{T}_{k,s}\cdot\sin(\frac{c\pi}{L}kt)\right\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{bzw. den Lösungsansatz:}$$

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\hat{T}_{k,c}\cdot\cos(\frac{c\pi}{L}kt) + \hat{T}_{k,s}\cdot\sin(\frac{c\pi}{L}kt)\right)\cdot w_k(x).$$

Offensichtlich bilden die örtlichen Eigenfunktionen eine Orthonormalbasis des Raumes $\mathbb{L}_2(0,L)$, womit wir die noch unbekannten Koeffizienten $\hat{T}_{k,c}$ und $\hat{T}_{k,s}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ direkt aus den Anfangsbedingungen berechnen können:

$$\hat{T}_{k,c} = \int_0^L u_o(x)\cdot w_k(x)\,dx \quad ; \quad \hat{T}_{k,s} = \frac{L}{c\pi k}\int_0^L u_1(x)\cdot w_k(x)\,dx\,.$$

Beispiel 7.11 (Lösung des Rand-Anfangs-WP der räumlich eindim.Wärmeleitungsgl.) Wir suchen die Lösung des Anfangswertproblems der eindimensionalen Wellengleichung in $\overline{\Omega} = [0,\infty)\times[0,L]$:

$$(*W2)_h \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{in } \Omega$$

mit AB: $u(0,x) = u_o(x)\,,\ \forall x \in [0,L]$ und RB: $u_R(t,0) = u_R(t,L) = 0\ \forall t \in [0,\infty)$

Benutzen den Ansatz: $u(t,x) = T(t)\cdot U(x)$ und erhalten nach Einsetzen aus $(*W2)_h$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (\frac{\partial}{\partial t}T(t))U(x) - c^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x))T(t) =$$
$$= (\frac{d}{dt}T(t))U(x) - c^2T(t)(\frac{d^2}{dx^2}U(x)) = T'(t)U(x) - c^2T(t)U''(x) = 0\cdot T(t)U(x)$$

Das heißt explizit (zunächst formal):

$$-\frac{U''(x)}{U(x)} = -\frac{1}{c^2}\frac{T'(t)}{T(t)}$$

Wir nutzen nun die einfache (Produktansatz-)Argumentation:

$$-H(x) = -c^{-2}F(t) = const. \quad \Leftrightarrow \quad -H(x) = c_1 = -c^{-2}F(t).$$

Das liefert als GDGL:

$$(i) \quad -U''(x) = c_1 U(x) \text{ und } \quad (ii) \quad -T'(t) = c^2 \cdot c_1 T(t) \quad ,$$

wobei wir für die erste GDGL mit den homogenen Dirchletschen RB aus Bemerkung 7.32 arbeiten können. Wir nutzen die halbperiodischen Sinusfunktionen aus Bemerkung 7.32 und erhalten das System der Eigenfunktionen als Lösungen von (i) :

$$\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{\pi}{L}kx)\right\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{zu Eigenwerten } c_1 \in \left\{\lambda_k = k^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Das Einsetzen der $c_1 = \lambda_k$ in (ii) liefert bei fixem $k \in \mathbb{N}$ die Lösungen:

$$\{T_k(t)\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\hat{T}_k \cdot \exp\left(-(\frac{c\pi k}{L})^2 t\right)\right\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{bzw. den Lösungsansatz:}$$

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}(\hat{T}_k \exp(-\left(\frac{c\pi k}{L}\right)^2 t) \cdot w_k(x)).$$

Offensichtlich bilden die örtlichen Eigenfunktionen eine Orthonormalbasis des Raumes $\mathbb{L}_2(0,L)$, womit wir die noch unbekannten Koeffizienten $\hat{T}_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$ direkt aus der Anfangsbedingung berechnen können:

$$\hat{T}_k = \int_0^L u_o(x) \cdot w_k(x)\,dx \quad ; \quad \text{beachten hier: } \exp(-\left(\frac{c\pi k}{L}\right)^2 \cdot 0) = \exp(0) = 1.$$

Bemerkung 7.33 (Werkzeuge inhom. PDGL)
Untersuchen wir die Beispiele 7.10 und 7.11 bei gegebener rechter Seite f im Sinne von $(*\Box 2)$ und $(*W2)$, so kann die Methode leicht auf diese Fälle angewandt werden:

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\hat{f}_k(t)\cdot w_k(x) \quad \text{bei} \quad \hat{f}_k(t) = \int_0^L f(t,x)\cdot w_k(x)\,dx \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Danach nutzt man die Zeitfunktionen $\{\hat{f}_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ als rechte Seite des AWP lin .inhom. GDGL vom Typ (ii): $\forall k \in \mathbb{N}$ ist mit $\lambda_k = (\frac{\pi k}{L})^2$

$$(ii\Box) \quad T_k''(t) - c^2\cdot\lambda_k T_k(t) = \hat{f}_k(t) \quad \text{mit AB:} \quad T_k(0) = \int_0^L u_o(x)\cdot w_k(x)\,dx\,;\, T_k'(0) = \int_0^L u_1(x)\cdot w_k(x)\,dx$$

bzw.

$$(iiW) \quad T_k'(t) - c^2\cdot\lambda_k T_k(t) = \hat{f}_k(t) \quad \text{mit AB:} \quad T_k(0) = \int_0^L u_o(x)\cdot w_k(x)\,dx$$

Die eindeutige Lösung von $(ii\Box)$ erhält man nach Abschnitt 3.5.4, wobei der lin. VR. - die allgemeine Lösung $V_{(*)_h} = \operatorname{span}\{y_{k,1}(t), y_{k,2}(t)\}$ von $(*)_h$ (vgl. Abschnitt 4.2.4) von dem Fundamentalsystem $\{y_{k,1}(t) := \cos(\frac{c\pi}{L}kt),\, y_{k,2}(t) := \sin(\frac{c\pi}{L}kt)\}$ aufgespannt wird.

Die eindeutige Lösung von (iiW) *erhält man nach Abschnitt 3.5.3, wobei hier* $y_h(t) = \exp(-\int_0^t \left(\frac{c\pi k}{L}\right)^2 dt)$ *ist. Die Lösungen nennen wir alle einfach* $\forall k \in \mathbb{N} : T_k(t)$*.*
Nach dem Superpositionsprinzip (Satz 2.50) ist dann

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot w_k(x)$$

unsere gesuchte Lösung.

Bemerkung 7.34 (Werkzeuge hom. RB PDGL)
Wie im Beispiel 7.4 kann man mit dem Superpositionsprinzip (Satz 2.50) die Randbedingungen wie im Bespiel 7.8 einstellen. Man nutzt hier sogenannte Ecken- und Kanten-Lösungen wie in Serie 4 Aufg. 4. bei Rechteck-Gebieten.
Für die Formulierung der Aufgaben nach 7.33 kann man die RB vermittels

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t,x) &:= u_{R,0+0}(t) + (u_{R,L-0}(t) - u_{R,0+0}(t))(1 - \frac{x}{L}) \quad \textit{bei RB:} \\ u_R(t,0) &= u_{R,0+0}(t) \text{ und } u_R(t,L) = u_{R,L-0}(t) \quad \forall t \in [0,\infty) \end{aligned}$$

einstellen. Die Funktion $v(t,x) := u(t,x) - \tilde{u}(t,x)$ *genügt dann mit modifizierter rechter Seite* $f_1(t,x)$ *der Gleichung* $(*\Box 2)$ *bzw.* $(*W2)$ *mit homogenen RB.*