

Teil

Einführung

Klassische Herkunft partieller Differentialgleichungen:

- Naturwissenschaften:
 - Physik:** Mechanik, Elektrodynamik/statik, Quantenphysik, Relativitätstheorie, ...
 - Chemie:** Reaktionsdynamik,
 - Biologie:** Biochemie-Stoffwechsel, Populationsdynamik, Nervensysteme, ...
- Medizin: Modellierung und Simulation von Krankheitsverläufen.
- Ingenieurwissenschaften (z.B. Materialwissenschaften).
- Mathematik selbst: Differentialgeometrie.
- In neuerer Zeit auch: Wirtschaftstheorie, Finanzmathematik.

Intensive innermathematische Beziehungen bestehen zwischen Differentialgeometrie und Partiellen Differentialgleichungen. Diese Differentialgleichungen sind sämtlich nichtlinear, meist von „kritischem Wachstum“, und erfordern somit schon ein gewisses Grundwissen und eine Grundvertrautheit mit diesem Gebiet. Entsprechend kann der Fokus erst in weiterführenden Veranstaltungen auf geometrische Anwendungen gerichtet werden; hier können wir nur die Minimalflächengleichung kurz streifen.

In dieser Veranstaltung stehen physikalisch-naturwissenschaftlich motivierte Modelle im Vordergrund. Entsprechende Kenntnisse werden aber nicht vorausgesetzt; der Modellierungshintergrund wird in Abschnitt 1 allgemein verständlich erläutert. Viele der dort angesprochenen Modelle ordnen sich direkt in einen ganz alltäglichen Erfahrungshintergrund ein: Ausbreitung von Schall und Wärme, einfache Grundprinzipien der Elektrizitätslehre (z.B. Faradayscher Käfig), Gleichgewichte elastischer Flächen (z.B. Trampolin, Musikinstrumente), Minimalflächen (Seifenhäute), Eigen- (Resonanz-) Schwingungen und Vieles mehr.

0 Der Gaußsche Integralsatz

Ein Hilfsmittel, das schon bei der Herleitung und dann ständig bei der theoretischen Behandlung von Partiellen Differentialgleichungen eine fundamentale Rolle spielt, ist der Gaußsche Integralsatz.

Da dieser mitunter wenig vertraut ist, auch als schwierig empfunden wird, und um schließlich grundlegende Notationen zu fixieren, soll dieser zunächst rekapituliert werden.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ geeignete, beschränkte offene Menge;

Ziel: partielle Integration für geeignete Funktionen $f, g : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, mit

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g \, dx = ?$$

Die aus dem Eindimensionalen vertraute Auswertung an Randpunkten wird hier durch Integrale über $\partial\Omega$ zu ersetzen sein. Dazu ist der Rand $\partial\Omega$ (eine „glatte Hyperfläche“) zunächst der analytischen Beschreibung zugänglich zu machen.

0.1 Definition. Sei $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine (Jordan-messbare) beschränkte offene Menge (der *Parameterbereich*), so dass ∂G eine Nullmenge ist. Die Abbildung

$$\Phi : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sei (gleichmäßig! auf \bar{G}) Lipschitz-stetig, in G stetig differenzierbar und injektiv. Weiterhin sei

$$\Phi(G) \cap \Phi(\partial G) = \emptyset.$$

Schließlich gelte die Nichtdegeneriertheitsbedingung

$$\forall t \in G : \quad \text{Rang}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t)\right) = n - 1. \quad (0.1)$$

Dann heißt $\bar{F} = \Phi(\bar{G})$ abgeschlossene **Hyperfläche**, $F = \Phi(G)$ (relativ in \bar{F}) offene Hyperfläche.

Bemerkung: G ist nicht als zusammenhängend vorausgesetzt, längs ∂G bzw. $\Phi(\partial G)$ können zusammen auch verschiedene Teilstücke verklebt werden.

Somit fallen auch „stückweise“ glatte Hyperflächen unter Definition 0.1. Man denke an \bar{G} , das aus sechs disjunkten Quadraten besteht, die mittels eines geeigneten Φ zu einem Würfel zusammengesetzt werden.

Auch $\Phi(\bar{G})$ muss *nicht* zusammenhängend sein.

0.2 Definition. Seien $x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$, dann definieren wir das **Kreuzprodukt** $z = x_2 \times \dots \times x_n \in \mathbb{R}^n$ durch

$$\begin{aligned} z_i &= (-1)^{i+1} \det(x_2, \dots, x_n) && i\text{-te Zeile streichen} \\ &= \det(e_i, x_2, \dots, x_n) && i = 1 \dots n. \end{aligned}$$

Bemerkung: Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz

$$x \cdot (x_2 \times \dots \times x_n) := \langle x, x_2 \times \dots \times x_n \rangle = \det(x, x_2, \dots, x_n).$$

Hierdurch ist das Kreuzprodukt eindeutig charakterisiert. Insbesondere ist $x_2 \times \dots \times x_n \perp \text{span}(x_2, \dots, x_n)$.

Es gilt: x_2, \dots, x_n linear abhängig $\Leftrightarrow z = 0$. Für $S \in SO(n)$ gilt: $Sx_2 \times \dots \times Sx_n = S(x_2 \times \dots \times x_n)$. Man kann zeigen, dass $|z|$ die Bedeutung des $(n-1)$ -dimensionalen Volumen des von x_2, \dots, x_n aufgespannten Parallelepiped hat. z, x_2, \dots, x_n bilden ein Rechtssystem, sofern x_2, \dots, x_n linear unabhängig. Das Kreuzprodukt ist multilinear und alternierend, aber *nicht* assoziativ. ($n = 3$, z.B. Jacobi-Identität). Außerdem gilt (Übung, liegt nicht auf der Hand):

$$|z|^2 = \det((x_2, \dots, x_n)^T \circ (x_2, \dots, x_n)).$$

0.3 Definition (Tangentialhyperebene, Einheitsnormalenfeld). Sei $\Phi : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$ wie in Definition 0.1, $F = \Phi(G)$ eine Hyperfläche. Die **Tangentialhyperebene** an $x = \Phi(t) \in F$ ($t \in G$) wird durch $\frac{\partial \Phi}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial t_{n-1}}(t)$ aufgespannt:

$$x + T_x \Phi(G) := x + \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \frac{\partial \Phi}{\partial t_i}(t) \mid \alpha_i \in \mathbb{R}; i = 1, \dots, n-1 \right\}$$

Ein **Einheitsnormalenvektorfeld** $\nu : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ an F in $x = \Phi(t)$ wird gegeben durch

$$\nu(x) = \frac{1}{\left| \frac{\partial \Phi}{\partial t_1}(t) \times \dots \times \frac{\partial \Phi}{\partial t_{n-1}}(t) \right|} \frac{\partial \Phi}{\partial t_1}(t) \times \dots \times \frac{\partial \Phi}{\partial t_{n-1}}(t).$$

Bemerkungen: Die Nichtdegeneriertheitsbedingung (0.1) stellt die lineare Unabhängigkeit der Tangentialvektoren und damit $\frac{\partial \Phi}{\partial t_1}(t) \times \dots \times \frac{\partial \Phi}{\partial t_{n-1}}(t) \neq 0$ sicher.

Hinsichtlich Umparametrisierungen gilt: Ist $\Psi : \overline{D} \rightarrow \overline{G}$ bijektiv, Lipschitzstetig, $\Psi : D \rightarrow G$ ein Diffeomorphismus, so erhält man mit $\Phi \circ \Psi$ eine andere Parametrisierung derselben Hyperfläche. Die mit Hilfe von $\Phi \circ \Psi$ bestimmten Tangentialvektoren werden sich i.A. ändern, aber es gilt:

Der Tangentialraum $x + T_x(\Phi \circ \Psi)(D) = x + T_x(\Phi(G))$ ist invariant; das definierte Einheitsnormalenfeld ist evtl. bis auf Vorzeichen invariant. Man erhält dasselbe Vorzeichen, wenn Ψ **orientierungserhaltend** ist, d.h. wenn für alle $s \in D$ gilt: $\det\left(\frac{\partial \Psi}{\partial s}(s)\right) > 0$.

Spezialfall eines Graphen:

$$\Phi(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}))^T.$$

Tangentialvektoren:

$$e_i + (0, 0, \dots, 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i})^T, \quad i = 1 \dots n-1.$$

Einheitsnormalenfeld:

$$\nu(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})|^2}} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_{n-1}), \dots, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1}), 1 \right)^T.$$

Beranden Hyperflächen beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, so erhält man „in der Regel“ mit dem „äußeren“ Einheitsnormalenvektorfeld eine natürliche „Orientierung“ für die Hyperfläche $\partial\Omega$. Diese Orientierung wird sich als grundlegend für die Flussintegrale im Gaußschen Satz herausstellen.

0.4 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge, $x_0 \in \partial\Omega$. Nahe x_0 sei $\partial\Omega$ eine Hyperfläche, d.h. es gebe $\Phi : G \rightarrow \partial\Omega$ gemäß Definition 0.1, $G \ni t_0 \mapsto x_0 = \Phi(t_0)$. Wir nennen einen Vektor $\nu(x_0)$ **äußeren Einheitsnormalenvektor** an $\partial\Omega$ in x_0 , falls gilt:

- $|\nu(x_0)| = 1$;
- $\nu(x_0) \perp T_{x_0} \partial\Omega$, d.h. $\forall j = 1, \dots, n-1: \nu(x_0) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t_j}(t_0) = \langle \nu(x_0), \frac{\partial \Phi}{\partial t_j}(t_0) \rangle = 0$;

- $\exists \delta > 0$:

$$\begin{aligned} - \quad s \in (0, \delta) & \quad \Rightarrow x_0 + s\nu(x_0) \notin \Omega, \\ - \quad s \in (-\delta, 0) & \quad \Rightarrow x_0 + s\nu(x_0) \in \Omega. \end{aligned}$$

0.5 Definition. Wir nennen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein **reguläres Gebiet**, falls gilt:

- (1) Ω ist ein beschränktes Gebiet;
- (2) $\partial\Omega$ ist eine abgeschlossene Hyperfläche, d.h. es existiert $\Phi : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gemäß Definition 0.1, so dass $\Phi(\overline{G}) = \partial\Omega$;
- (3) es existiert ein stetiges (globales) äußeres Einheitsnormalenvektorfeld $\nu : \Phi(G) \rightarrow \mathbb{R}^n$ im Sinne von Definition 0.4.

Bemerkung. Auf $\Phi(\partial G)$ muss ν nicht existieren; hierbei handelt es sich aber auch um eine „ $(n-1)$ -dimensionale“ Nullmenge.

Existenz eines äußeren Einheitsnormalenvektors bedeutet, dass $\partial\Omega$ dort glatt ist und Ω auf einer Seite von $\partial\Omega$ liegt. Bis evtl. auf Vorzeichen stimmt der äußere Einheitsnormalenvektor mit dem $\nu(x_0)$ aus Definition 0.3 überein. Wir werden in der Regel nur reguläre Gebiete, d.h. insbesondere Gebiete mit einem globalen stetigen äußeren Einheitsnormalenvektorfeld betrachten.

Zur Integration auf Hyperflächen:

0.6 Definition. Sei $\Phi(G)$ mit $\Phi : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche wie in 0.1, weiter sei $f : \Phi(\overline{G}) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann definiert man das **Oberflächenintegral** von f auf $\Phi(G)$ durch

$$\begin{aligned} \int_{\Phi(G)} f(x) dS(x) &:= \int_G f(\Phi(t)) \sqrt{\det\left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t)\right)^T \circ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t)\right)\right)} dt \\ &= \int_G f(\Phi(t)) \left| \frac{\partial\Phi}{\partial t_1}(t) \times \dots \times \frac{\partial\Phi}{\partial t_{n-1}}(t) \right| dt, \end{aligned}$$

wobei $\det\left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t)\right)^T \circ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t)\right)\right)$ die Gramsche Determinante ist.

Bemerkung: Die Wohldefiniertheit gegenüber Umparametrisierungen $\Psi : \overline{D} \rightarrow \overline{G}$ zeigt man mit Hilfe der Transformationsformel. Hierfür ist die erste Definition geeigneter.

Im Spezialfall von Graphen $\Phi(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}))$ erhält man mit der Abkürzung $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ insbesondere:

$$\int_{\Phi(G)} f(x) dS(x) = \int_G f(x', \varphi(x')) \sqrt{1 + |\nabla\varphi(x')|^2} dx'.$$

0.7 Satz (Gaußscher Integralsatz). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein reguläres Gebiet mit äußerer Einheitsnormale ν . Sei $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein (in einer offenen Umgebung von $\overline{\Omega}$) stetig differenzierbares Vektorfeld. (Schreibweise: $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$.) Dann gilt

$$\int_{\partial\Omega} \langle f(x), \nu(x) \rangle dS(x) := \int_{\Phi(G)} \langle f(x), \nu(x) \rangle dS(x) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(f(x)) dx.$$

0.8 Folgerung. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ reguläres Gebiet, ν äußere Einheitsnormale an $\partial\Omega$:

(a) Sind $f, g \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, so gilt für $i = 1, \dots, n$:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(x) dx = \int_{\partial\Omega} f(x)g(x)\nu_i(x)dS(x) - \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)f(x) dx.$$

(b) Sind $f, g \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, so gilt die Greensche Formel:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta f(x)g(x) dx &= \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial \nu}(x)g(x) - \frac{\partial g}{\partial \nu}(x)f(x) \right) dS(x) \\ &\quad + \int_{\Omega} f(x)\Delta g(x) dx. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x) := \langle \nabla f(x), \nu(x) \rangle \quad (x \in \Phi(G))$$

die äußere Normalableitung von f in x .

Verschwinden die Integranden in einer Umgebung von $\partial\Omega$, so kann man die Beweise der vorhergehenden Regeln mittels des Satzes von Fubini in Quadern direkt auf eindimensionale partielle Integration zurückführen. Außerdem entfallen die Randintegrale und damit die Glattheitsanforderungen an $\partial\Omega$. Um diese Regeln geeignet formulieren zu können, sei kurz erinnert:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen; für $f \in C^0(\Omega)$ heißt

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}$$

Träger von f ,

$$\begin{aligned} C_0^0(\Omega) &= \{f \in C^0(\Omega) : \text{supp}(f) \text{ kompakt, } \text{supp}(f) \subset \Omega\} \\ &= \{\text{stetige Funktionen mit kompaktem Träger in } \Omega\}. \end{aligned}$$

Man schreibt auch: $f \in C_0^0(\Omega) \Leftrightarrow f \in C^0(\Omega)$ und $\text{supp}(f) \subset\subset \Omega$. Für $f \in C_0^0(\Omega)$ hat man durch triviale Fortsetzung auch $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$. Entsprechend definiert man die $C_0^k(\Omega)$ und $C_0^\infty(\Omega)$ -Räume.

0.9 Satz (Trivialvariante des Gaußschen Satzes). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(a) Für $f \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\int_{\Omega} \text{div}(f(x)) dx = 0.$$

(b) Für $f \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}), g \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ gilt:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}g(x) dx = - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i} dx.$$

etc.,etc. ...

0.10 Beispiel (Faradayscher Käfig). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein reguläres Gebiet, $u \in C^2(\overline{\Omega})$ erfülle:

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= 0 & (x \in \Omega), \\ u(x) &= 0 & (x \in \partial\Omega). \end{aligned}$$

Dann gilt: $u(x) \equiv 0$ in Ω .

Beweis. Gemäß den Voraussetzungen und dem Gaußschen Satz erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{\Omega} \Delta u(x) \underbrace{u(x)}_{\text{Energietrick!}} dx = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) u(x) dx \\ &= - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right) \underbrace{u(x)}_{=0} \nu_i(x) dS(x) + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \underbrace{|\nabla u(x)|^2}_{\geq 0, \text{ stetig}} dx. \end{aligned}$$

Für diese Umformungen ist wesentlich, dass man die euklidische Norm $|\cdot|$ verwendet. Es folgt $\forall x \in \Omega: \nabla u(x) = 0$. Da Ω ein Gebiet ist, ist u in Ω und damit in $\overline{\Omega}$ konstant. Da $u|_{\partial\Omega} = 0$, ist somit $u(x) \equiv 0$ in $\overline{\Omega}$. \square

Bemerkungen. Mathematisch ist der vorhergehende Satz eine Eindeigkeitsaussage für das Dirichletproblem $-\Delta u = f$ in Ω , $u = g$ auf $\partial\Omega$ in $C^2(\overline{\Omega})$. Hätte man nämlich zwei solcher Lösungen u_1 und u_2 in $C^2(\overline{\Omega})$, so würde für die Differenz $u := u_1 - u_2$ folgen: $-\Delta u = 0$ in Ω , $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Der vorhergehende Satz ergibt $u = 0$, d.h. $u_1 = u_2$.

Physikalisch kann man den Satz als das Prinzip vom Faradayschen Käfig interpretieren. Das elektrische Potential u in Ω wird, sofern in $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ keine Ladungen vorhanden sind, durch $-\Delta u = 0$ in Ω beschrieben. Mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$ modelliert man, dass der Rand von Ω aus Leitern besteht, die – bei mehreren Komponenten von $\partial\Omega$ – leitend miteinander verbunden werden. Der Satz besagt dann, dass nach Ω von außen kein Feld eindringen kann. Elektrische Felder kann man abschirmen; diese Erfahrungen hat jeder schon einmal mit Mobiltelefonen, Radios etc. in Stahlbetongebäuden gemacht. Die elektrische Feldstärke E ergibt sich aus dem elektrischen Potential durch $E = -\nabla u$ und ist ein Maß für die wirkenden elektrischen Kräfte.

Es folgt eine weitere grundlegende Anwendung des Gaußschen Satzes, in der für eine Funktion $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Nullrandbedingungen $f|_{\partial\Omega} = 0$ aus der Kenntnis der Ableitung in Ω eine Abschätzung für f selbst folgt:

0.11 Satz (Poincaré-Friedrichs-Ungleichung). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein reguläres Gebiet, $1 \leq p < \infty$. Dann existiert eine Konstante $C = C(n, p, \text{diam}(\Omega))$ derart, dass für alle stetig differenzierbaren Funktionen $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f|_{\partial\Omega} = 0$ gilt:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)} := C \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall $p > 1$; o.B.d.A. $f(x) \not\equiv 0, 0 \in \Omega$:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p(\Omega)}^p &= \int_{\Omega} \underbrace{|f(x)|^p}_{\text{für } p>1 \text{ st.diff'bar}} dx = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} x_i\right) |f(x)|^p dx \\
&\stackrel{0.8}{=} -\frac{1}{n} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n x_i p |f(x)|^{p-2} f(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx \\
&\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \frac{p}{n} \int_{\Omega} \underbrace{|x|}_{\leq \text{diam}(\Omega)} |f(x)|^{p-1} |\nabla f| dx \\
&\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \frac{p}{n} \cdot \underbrace{\text{diam}(\Omega)}_{=:C} \|f\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Kürzen von $\|f\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \neq 0$ zeigt die Behauptung. □

Für spätere Zwecke formulieren wir noch einen gegenüber (0.5) verschärften Glattheitsbegriff für Gebiete:

0.12 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein reguläres Gebiet, $m \in \mathbb{N}$. Wir sagen, dass $\partial\Omega \in C^m$ ist, falls zu jedem $x_0 \in \partial\Omega$ eine offene Umgebung U von x_0 , eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ und ein C^m -Diffeomorphismus $\Phi : U \rightarrow V$ existieren mit:

$$\begin{aligned}
\Phi(U \cap \Omega) &= V \cap \{x \in \mathbb{R}^n, x_n > 0\}, \\
\Phi(U \cap \partial\Omega) &= V \cap \{x \in \mathbb{R}^n, x_n = 0\}, \\
\Phi(U \setminus \bar{\Omega}) &= V \cap \{x \in \mathbb{R}^n, x_n < 0\}.
\end{aligned}$$

1 Modelle

Man beachte, dass die unbekannte Funktion oft - unabhängig von ihrer physikalischen Bedeutung - mit u bezeichnet wird.

1.1 Massenerhaltung, Kontinuitätsgleichung

Die Dichte eines i.A. kompressiblen Gases oder einer Flüssigkeit werde durch u beschrieben; der Einfachheit halber:

$$u : \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Zeit}} \times \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{Ort}} \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig differenzierbar. $u(t, x)$ - Dichte zur Zeit t am Punkt x . Wir betrachten ein beliebiges, aber im Folgenden festes „Testvolumen“ $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, dabei sei Ω im Sinne des vorhergehenden Abschnitts ein reguläres Gebiet. Masse, die zur Zeit t in Ω enthalten ist:

$$\int_{\Omega} u(t, x) dx.$$

Die Änderungsrate hiervon soll auf zwei verschiedene Weisen bestimmt werden.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u(t, x) dx \stackrel{\text{parameterabh. R-Integral}}{=} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) dx. \quad (1.1)$$

Zum Anderen ist der Teilchenstrom (Masse pro Zeit), der in Ω eintritt:

$$\int_{\partial\Omega} u(t, x) \langle v(t, x), \underbrace{-\nu(x)}_{\text{innere Normale}} \rangle dS(x). \quad (1.2)$$

Dabei müssen wir annehmen, dass die Strömungsgeschwindigkeit $v(t, x)$ der Teilchen, die sich zur Zeit t im Punkt x befinden (Euler-Koordinaten), durch eine stetig differenzierbare Abbildung

$$v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

beschrieben wird. Das Gesetz von der **Massenerhaltung** ergibt:

Änderung der Masse in Ω = Massenfluss durch $\partial\Omega$

$$\text{Term (1.1)} = \text{Term (1.2)}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) dx = - \int_{\partial\Omega} \underbrace{\langle u(t, x)v(t, x), \nu(x) \rangle}_{\text{Massenflussvektor}} dS(x) \stackrel{\text{Gauß}}{=} - \int_{\Omega} \text{div}(uv) dx$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \text{div}(uv) \right) dx = 0.$$

Da diese Identität für beliebiges reguläres $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ gilt und da der Integrand als stetig vorausgesetzt wurde, folgt daraus (!!!):

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 : \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \text{div}(uv) = 0. \quad (1.3)$$

Dieses nennt man eine **Kontinuitätsgleichung**. Man vgl. auch 1.6. Diese Gleichung ist „nicht geschlossen“: 4 Unbekannte, 1 Gleichung! Eine Möglichkeit, dieses System abzuschließen, ist die Kenntnis eines „konstitutiven Gesetzes“:

$$v = f(u)$$

mit einer

- geeigneten Funktion: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ (lokal);
- geeigneten Abbildung: $f : C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \rightarrow C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ (nichtlokal).

In realistischen Situationen wird Letzteres der Fall sein und die Abbildung f ist gegeben als Lösungsabbildung z.B. des Navier-Stokes- oder Euler-Systems. Wir betrachten im Folgenden einige *Modellfälle*, in denen man die erstere Situation annimmt.

1.2 Die einfachste partielle Differentialgleichung erster Ordnung

Wir gehen von der Kontinuitätsgleichung (1.3) aus und nehmen an, dass ein fester Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ existiert, so dass

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 : \quad v(t, x) = b.$$

Dann wird aus (1.3):

$$u_t(t, x) + \langle b, \nabla u(t, x) \rangle = 0,$$

alle Teilchen bewegen sich mit derselben konstanten Geschwindigkeit. Diese Gleichung kann man in \mathbb{R}^n schreiben, man kann inhomogene Terme hinzufügen (Teilcheninjektion/Absaugung, theoretisches Interesse); außerdem ist von den gewöhnlichen Differentialgleichungen her bekannt, dass Probleme erst durch Hinzunahme z.B. von Anfangsbedingungen „wohlgestellt“ werden. Formulieren wir also unser einfachstes *Anfangswertproblem*:

Gegeben seien $b \in \mathbb{R}^n$, „hinreichend glatte“ Funktionen

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

und

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Gesucht ist $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ als Lösung von:

$$\begin{cases} u_t + \langle b, \nabla u \rangle = f & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, \cdot) = \varphi & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1.4)$$

1.3 Die reibungsfreie Burgers-Gleichung

Einfachste nichtlineare Modellgleichung, bei der man „Schockbildung“ studieren kann. Wir basieren wieder auf der Kontinuitätsgleichung (1.3).

Idee: Eindimensionales Gas, Bewegung nur nach rechts.

Annahme für konstitutives Gesetz: $v = a \cdot u$ bzw. (O.B.d.A, Skalierung!!!) $v = \frac{1}{2}u$, Teilchen entfliehen einander in Regionen geringer Dichte.

Beachte $(\frac{1}{2}u^2)_x = uu_x$; mit dieser Annahme wird (1.3) bei Vorgabe eines geeigneten Anfangsdatums $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = \varphi(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.5)$$

1.4 Gleichung der eingespannten schwingenden Saite, Wellengleichung

Wir betrachten die Schwingung einer elastischen Saite in der Ebene, die an ihren Endpunkten fest „eingespannt“ wird. Der Querschnitt sei so dünn (≈ 0), dass man sie idealerweise mit Hilfe eines Graphen zur Zeit $t \in \mathbb{R}$

$$u : \mathbb{R} \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R},$$

mit zweimal stetig differenzierbarem u beschreiben kann. Das Einspannen modellieren wir so, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0.$$

Außerdem nehmen wir eine Vorspannung $\sigma_0 > 0$ an.

Spannung = Kraft (eigentl. Kraft pro Querschnitt, hier idealisiert).

Vorgabe einer äußeren vertikalen Spannungsdichte (Spannung pro Länge):

$$f : \mathbb{R} \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{stetig.}$$

„Vertikal“ bedeutet die zur „horizontalen“ Ruherichtung $u \equiv 0$ orthogonale Richtung.

Einige physikalische Annahmen (so dass wir ein vereinfachtes lineares Modell erhalten werden):

Die Auslenkungen seien so klein und das Material derart, dass

- (i) die Spannung am rechten Saitenende für alle Zeiten durch σ_0 gegeben ist,
- (ii) $|u| \ll 1$ sowie $|u_x| \ll 1$ und somit für $\Theta > 1$: $|u|^\Theta \ll |u|$, $|u_x|^\Theta \ll |u_x|$,
- (iii) keine horizontale Bewegung stattfindet,
- (iv) Biege­widerstand nicht berücksichtigt wird.

Außerdem nehmen wir an, dass:

- (v) die Dichte ρ konstant ist und nicht etwa $\rho(t, x)$ oder sogar $\rho(t, x, u)$ (keine nichtlinearen Effekte).

Man beschreibt die Kräfteverhältnisse innerhalb der Saite durch eine innere stetig differenzierbare Spannungsfunktion $\sigma(t, x)$. Die Annahme (iv) führt dazu, dass die Richtung des Spannungsvektors tangential an u ist:

Der Spannungsvektor zur Zeit t im Punkte x ist dann gegeben durch

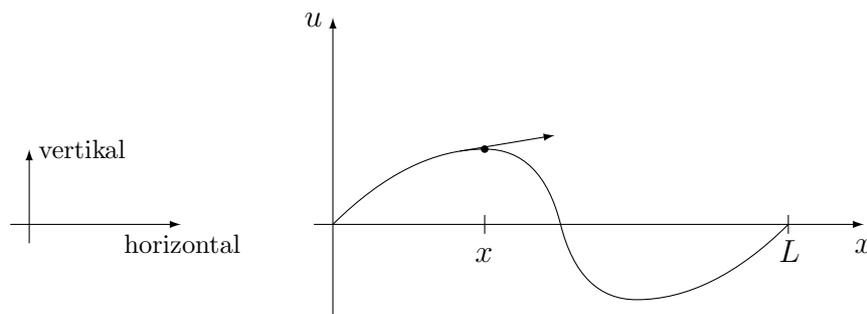


Abbildung 1: Schwingende Saite, lokal wirkender Spannungsvektor.

$$\sigma(t, x) \frac{1}{\sqrt{1 + (u_x)^2}} \left(1, \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right).$$

Auf Grund des Prinzips der Kräftepaare erkennt man: Dieser Spannungsvektor wirkt in x auf das linke Stück $(0, x)$, der dazu negative Spannungsvektor auf das rechte Stück (x, L) .

Wir greifen ein beliebiges Probeintervall $(x_1, x_2) \subset (0, L)$ zur Zeit t und das entsprechende Saitenstück heraus und stellen die Kräftebilanz auf:

- (a) in vertikaler Richtung:

- Kräftedifferenz:

$$\begin{aligned} & \sigma(t, x_2) \frac{u_x(t, x_2)}{\sqrt{1 + u_x^2(t, x_2)}} - \sigma(t, x_1) \frac{u_x(t, x_1)}{\sqrt{1 + u_x^2(t, x_1)}} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sigma(t, x) u_x(t, x)}{\sqrt{1 + u_x^2(t, x)}} \right) dx, \end{aligned}$$

- dazu kommt die äußere Kraft (vertikal zur Ruherichtung!) $\int_{x_1}^{x_2} f(t, x) dx$,
- diese zusammen ergeben nach dem Newtonschen Grundgesetz die Vertikalbeschleunigung

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sigma(t, x) u_x(t, x)}{\sqrt{1 + u_x^2(t, x)}} \right) + f(t, x) \right) dx.$$

Nachdem das Testintervall beliebig gewählt werden kann und der Integrand gemäß unserer Annahmen stetig ist, folgt für $(t, x) \in \mathbb{R} \times (0, L)$:

$$\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sigma(t, x) u_x(t, x)}{\sqrt{1 + u_x^2(t, x)}} \right) + f(t, x) \quad (1.6)$$

(b) in horizontaler Richtung:

Auch hier betrachten wir wieder ein beliebiges Testintervall $(x_1, x_2) \subset (0, L)$ zur Zeit t . Aufgrund von Bedingung (iii) sind die Kräfte am Intervallende im Gleichgewicht, man hat keine horizontale Beschleunigung.

$$\frac{\sigma(t, x_1)}{\sqrt{1 + u_x^2(t, x_1)}} = \frac{\sigma(t, x_2)}{\sqrt{1 + u_x^2(t, x_2)}}.$$

Wir verwenden nun, dass x_1, x_2 beliebig gewählt werden können und dass gemäß Annahme (ii) $\frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2(t, x)}} \approx 1 - u_x^2/2 \approx 1$, u_x^2 ist gegenüber linearen Termen zu vernachlässigen:

$$\forall(t, x) : \quad \frac{\sigma(t, x)}{\sqrt{1 + u_x^2(t, x)}} = \frac{\sigma(t, L)}{\sqrt{1 + u_x^2(t, L)}} \approx \sigma(t, L) = \sigma_0.$$

Im letzten Schritt wurde Annahme (i) verwendet.

Setzen wir das letzte Ergebnis in (1.6) ein, so erhalten wir das lineare Modell der schwingenden Saite:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + f(t, x)/\varrho \text{ für } (t, x) \in \mathbb{R} \times (0, L) \quad (1.7)$$

mit $a^2 = \sigma_0/\varrho$, $a > 0$. Auf Grund von Annahme (v) handelt es sich hierbei um eine Konstante, die wir später als Ausbreitungsgeschwindigkeit werden interpretieren können. ($\dim\left(\frac{\sigma_0}{\varrho}\right) = \frac{gm}{s^2} \frac{m}{g} = \frac{m^2}{s^2}$.)

Wir setzen der Einfachheit halber $a = \varrho = 1$, exakt lässt sich das auch durch Entdimensionalisieren bzw. Skalieren erreichen. Wir vervollständigen die Differentialgleichung (1.7) durch Angabe von Rand- und Anfangsbedingungen und erhalten so das folgende *Anfangsrandwertproblem* für die Gleichung der schwingenden Saite (eindimensionale Wellengleichung):

Gegeben seien geeignete $\varphi, \psi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$. Gesucht ist $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, L])$, so dass gilt:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = f(t, x) & \text{in } (t, x) \in \mathbb{R} \times [0, L], \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 & t \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x) & x \in [0, L]. \end{cases} \quad (1.8)$$

1.5 Höherdimensionale Wellengleichung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein hinreichend glattes Gebiet bzw. $\Omega = \mathbb{R}^n$. Verfolgt man z.B. in [DB, Chapter 0.4] für $n = 2$ die Herleitung dann für die schwingende Membran, so erkennt man, dass u_{xx} aus (1.8) durch Δu zu ersetzen ist. Wie stets beziehen sich die Operatoren $\nabla, \Delta \dots$ auf die Raumveränderlichen.

$$\Delta u(t, x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(t, x).$$

Man betrachtet folgendes Anfangsrandwertproblem (ARWP):

Gegeben seien geeignete $\varphi, \psi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, gesucht ist $u \in C^2(\mathbb{R} \times \overline{\Omega})$ als Lösung von:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - \Delta u(t, x) = f(t, x) & \text{in } (t, x) \in \mathbb{R} \times \overline{\Omega}, \\ u(t, x) = 0 & (t, x) \in \mathbb{R} \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = \varphi(x), u_t(0, x) = \psi(x) & x \in \overline{\Omega}. \end{cases} \quad (1.9)$$

$n = 2$: schwingende Membran; u vertikale Auslenkung aus horizontaler Ruhelage, f vertikale Kraftdichte.

$n = 3$: schwingendes ideales Gas; u Schalldruck, $f = \operatorname{div}(F) =$ Quelledichte des äußeren Kraftfeldes.

1.6 Wärmeleitungsgleichung

Ein wärmeleitender Körper werde durch $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ dargestellt, seine Temperatur durch:

$[0, \infty) \times \overline{\Omega} \ni (t, x) \mapsto u(t, x) \in \mathbb{R}$; gesucht als zweimal stetig differenzierbare Funktion.

Wir machen folgende vereinfachende physikalische Annahmen, aus denen sich ein lineares Modell ergeben wird:

Konstante Dichte ρ (Masse/Volumen)

Ficksches (Fouriersches) Gesetz : Wärmeenergiestromdichte $J = -\kappa \nabla u$ (1.10)

$$[J] = [\text{Energie}/(\text{Zeit} \cdot \text{Fläche})] = \frac{W}{m^2}$$

$\kappa =$ Wärmeleitungskoeffizient (Materialkonstante)

$$[\kappa] = [\text{Energie}/(\text{Zeit} \cdot \text{Fläche} \cdot (\text{Temperatur}/\text{Länge}))] = \frac{W}{K \cdot m}$$

konstante spezifische Wärme $C = \frac{\text{Energieunterschied}}{\text{Temperaturunterschied} \cdot \text{Masse}}$, $[C] = \frac{W_s}{K \cdot kg}$

$f : [0, \infty) \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, äußere Energiezufuhrdichte.

$$[f] = [\text{Energie}/(\text{Zeit} * \text{Volumen})] = \frac{W}{m^2}$$

Wir leiten zunächst ganz analog zu 1.1 eine mathematische Erhaltungsgleichung her. Grundlage ist der physikalische Energieerhaltungssatz.

Sei $D \subset \Omega$ ein reguläres Testvolumen. Wärmeenergie zur Zeit t in D wird, evtl. bis auf Festlegung der Energie- und Temperaturnullpunkte, gegeben durch:

$$C_\varrho \int_D u(t, x) dx.$$

Änderungsrate der Wärmeenergie ist:

- zum Einem: $\frac{\partial}{\partial t} C_\varrho \int_D u(t, x) dx = C_\varrho \int_D \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} dx$;
- zum Anderen:

$$\int_D f(t, x) dx + \int_{\partial D} \langle J(t, x), -\nu(x) \rangle dS(x) \\ \stackrel{\text{Satz von Gauss in } D}{=} \int_D (f(t, x) - \text{div}(J(t, x))) dx.$$

Der Energieerhaltungssatz liefert:

$$C_\varrho \int_D \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} dx = \int_D (f(t, x) - \text{div}(J(t, x))) dx.$$

Wir nehmen f als stetig, u , J als stetig differenzierbar an. Da $D \subset \Omega$ beliebig gewählt werden kann, erhalten wir für alle $(t, x) \in [0, \infty) \times \bar{\Omega}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{C_\varrho} \text{div} J = \frac{1}{C_\varrho} f. \quad (1.11)$$

Man vgl. auch (1.3). Wir setzen für den Energieflussvektor das Ficksche Gesetz (1.10) ein und erhalten:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\kappa}{C_\varrho} \Delta u = \frac{1}{C_\varrho} f.$$

Man kann wieder skalieren und der Einfachheit halber $C_\varrho = \kappa = 1$ erreichen. Zur Formulierung eines abgeschlossenen Problems sind noch Anfangs- und Randwerte vorzugeben:

- vorgegebene Wärmeenergieflussdichte g auf $\partial\Omega$ nach Ω :
 $g = \langle J, -\nu \rangle = -\kappa \langle \nabla u, -\nu \rangle = \kappa \frac{\partial u}{\partial \nu}$.
 Speziell: isolierender Rand: $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ auf $\partial\Omega$.
Neumann-Randbedingung
- bzw. vorgegebene Temperatur h auf $\partial\Omega$ mit $u = h$ auf $\partial\Omega$.
Dirichlet-Randbedingung

Formulieren wir also das Anfangsrandwertproblem:

Gegeben seien geeignete Funktionen $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [0, \infty) \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [0, \infty) \times \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $h : [0, \infty) \times \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, gesucht ist $u \in C^2([0, \infty) \times \bar{\Omega})$ als Lösung des **Neumannproblems**:

$$\begin{cases} u_t(t, x) - \Delta u(t, x) = f(t, x) & \text{für } (t, x) \in [0, \infty) \times \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(t, x) = g(t, x) & t \geq 0, x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = \varphi(x) & x \in \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (1.12)$$

bzw. des **Dirichletproblems**:

$$\begin{cases} u_t(t, x) - \Delta u(t, x) = f(t, x) & \text{für } (t, x) \in [0, \infty) \times \bar{\Omega}, \\ u(t, x) = h(t, x) & t \geq 0, x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = \varphi(x) & x \in \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (1.13)$$

1.7 Reaktions-Diffusions-Gleichungen

Findet innerhalb eines wärmeleitenden Körpers gleichzeitig eine chemische Reaktion statt, so ist der a-priori bekannte Quellterm f durch eine von u abhängige Nichtlinearität $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto f(u)$ zu ersetzen. Die Differentialgleichung in (1.12) ist also zu ersetzen durch:

$$u_t - \Delta u = f(u), \quad t \geq 0, x \in \bar{\Omega}. \quad (1.14)$$

Typische (phänomenologisch motivierte) Nichtlinearitäten sind:

$$f(u) = \lambda|u|^{p-1}u \quad (p > 1), \quad f(u) = \lambda(1+u)^p \quad (p > 1), \quad f(u) = \lambda \exp(u), \dots, \quad (1.15)$$

wobei λ ein Kontrollparameter sei. Dabei sucht man typischerweise positive Lösungen (oberhalb des Nullpunktes bzw. auch oberhalb einer konstanten Gleichgewichtskonstellation).

Die Anfangs- und Randbedingungen kann man wie in (1.12) bzw. (1.13) formulieren. Ebenso wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen besteht hinsichtlich Existenz einer Lösung für alle $t \geq 0$ ein grundlegender Unterschied zwischen linearen und nichtlinearen Differentialgleichungen; bei letzteren muss man bei „superlinearen“ Nichtlinearitäten i.A. mit „blow-up“ in endlicher Zeit rechnen.

1.8 Poisson-Gleichung, stationäre Zustände

Hängen die Lösungen in 1.4, 1.5, 1.6 nicht von der Zeit ab, oder konvergiert z.B. die Lösung in 1.6 gegen einen stationären Zustand, so gelangt man zum Dirichlet- bzw. Neumann-Problem für die Poisson-Gleichung:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein reguläres Gebiet, es seien geeignete Funktionen $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ und

$h : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Gesucht ist $u \in C^2(\overline{\Omega})$ als Lösung des **Dirichletproblems**:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = h & \text{auf } \partial\Omega; \end{cases} \quad (1.16)$$

bzw. des **Neumannproblems**:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.17)$$

Interpretation von (1.16):

- $n = 1, 2$: Stationäre Auslenkung einer eingespannten Saite/Membran unter „vertikaler“ zeitunabhängiger Last.
- $n = 3$: Stationäre Temperaturverteilung in einem Körper bei zeitunabhängiger Wärmequelle und bekannter Temperaturverteilung auf dem Rand.
- $n = 3$: Elektrostatik: f =Ladungsdichte, z.B. $h = 0$ bedeutet dann, dass Ω von Leiter = Äquipotentialfläche umgeben wird; u ist entsprechendes elektrisches Potential.

Interpretation von (1.17):

- $n = 3$: Temperaturverteilung bei vorgegebenem Wärmefluss g durch $\partial\Omega$. Neumannrandbedingungen sind auch bei Modellen in der räumlich inhomogenen Populationsdynamik adäquat: z.B. Ω =Insel, $\partial\Omega$ =Ufer, u Population, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ auf $\partial\Omega$: Population kann nicht schwimmen.

Die Reaktions-Diffusionsgleichung (1.14) wird im stationären Fall zu:

$$-\Delta u = f(u) \quad (1.18)$$

mit Nichtlinearitäten wie in (1.15). Eigenschaften dieser Lösungen sind grundlegend für das Verhalten auch der zeitabhängigen Gleichung (1.14) (z.B. Stabilität).

Gleichungen (1.16)-(1.18) sind Prototypen „elliptischer“ Probleme; diese ergeben sich aus zeitabhängigen Problemen auch noch durch einen weiteren Zugang.

1.9 Separationsansatz, Helmholtzgleichung

Gehen wir z.B. von der Wellengleichung (1.9):

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad t \in \mathbb{R}, x \in \Omega \quad (1.19)$$

aus, und versuchen(!), die Lösung u in der separierten Form einer stehenden Welle zu finden:

$$\text{Ansatz: } u(t, x) = v(t)w(x). \quad (1.20)$$

In dieser Form löst u (1.19) genau dann, wenn

$$v''(t)w(x) - v(t)\Delta w(x) = 0$$

Ist u eine nichttriviale Lösung, so wird v für fast alle t und w für fast alle x ungleich 0 sein. Für derartige t, x hat man also (1.19) $\Leftrightarrow \frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{\Delta w(x)}{w(x)}$.

Da man t und x unabhängig von einander variieren kann, ist diese Identität also gleichwertig zur Existenz einer Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass

$$\forall t, \forall x : \quad \frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{\Delta w(x)}{w(x)} = -\lambda,$$

bzw.

$$-\Delta w(x) = \lambda w(x) \tag{1.21}$$

und

$$-v''(t) = \lambda v(t). \tag{1.22}$$

Man nimmt zu (1.21) noch die Randwertvorgabe aus (1.9) hinzu und erhält das Eigenwertproblem für den Laplace-Operator unter Dirichletrandbedingungen, die sogenannte **Helmholtzgleichung**:

$$\begin{cases} -\Delta w(x) = \lambda w(x), & w \neq 0, & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.23}$$

Bei beschränktem Ω werden wir unten in § 18 sehen, dass (1.23) genau für eine Folge $\lambda_k > 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$ nichttriviale Lösungen w_k besitzt. Für diese λ_k bilden $\cos(\sqrt{\lambda_k}t)$, $\sin(\sqrt{\lambda_k}t)$ ein Fundamentalsystem von (1.22).

Mit Lösungen der Form $u_k(t, x) = (a_k \cos(\sqrt{\lambda_k}t) + b_k \sin(\sqrt{\lambda_k}t))w_k(x)$ erreicht man Anfangsdaten

$$u_k(0, x) = a_k w_k(x), u_{k,t}(0, x) = b_k \sqrt{\lambda_k} w_k(x),$$

aber *nicht* allgemeine φ, ψ !

Ausweg wird sein: Reihenentwicklungen nach Orthonormalsystemen $(w_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ von Eigenfunktionen von (1.23).

Ganz analog gelangt man mit dem Separationsansatz (1.20) von dem Anfangsrandwertproblem (1.13) für die Wärmeleitungsgleichung mit $f = 0$ und homogenen Dirichletrandbedingungen $h = 0$ zur Helmholtzgleichung (1.23), wobei man anstelle von (1.22)

$$v'(t) = -\lambda_k v(t) \tag{1.24}$$

zu lösen hat. Die mit diesem Ansatz gewonnenen Lösungen sind also von der Form

$$u_k(t, x) = a_k \exp(-\lambda_k t) w_k(x).$$

Hinsichtlich allgemeiner Anfangsdaten gilt obige Bemerkung entsprechend. Man beachte, dass Reihenentwicklungen mittels Eigenfunktionen i.A. auf lineare Gleichungen beschränkt sind und z.B. bei Reaktions-Diffusionsgleichungen wie bei (1.14) keine Rolle spielen.

1.10 Die Minimalflächengleichung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein reguläres Gebiet. Zu vorgegebenem stetigen $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sucht man ein $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, dessen Graph unter der Randhöhenvorgabe $u|_{\partial\Omega} = g$ das „Flächenfunktional“

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2} dx \quad (1.25)$$

minimiert. Genauer müsste es „ n -dimensionales Volumenfunktional“ heißen.

Wir nehmen an, wir hätten ein hinreichend glattes derartiges minimales $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ gefunden. Für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $t \in \mathbb{R}$ erfüllt $u + t\varphi$ die Randbedingung $(u + t\varphi)|_{\partial\Omega} = g$. Gemäß unserer Annahme besitzt also die differenzierbare Funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathcal{F}(u + t\varphi)$ im Punkte $t = 0$ ein Minimum. Notwendigerweise gilt dann:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \mathcal{F}(u + t\varphi)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u(x) + t\nabla\varphi(x)|^2} dx|_{t=0} \\ &\text{auf Grund der gemachten Glattheitsannahmen zeigen Sätze über} \\ &\text{parameterabhängige Riemann-Integrale:} \\ &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2 + 2t\nabla u(x) \cdot \nabla\varphi(x) + t^2|\nabla\varphi(x)|^2} dx|_{t=0} \\ &= \int_{\Omega} \frac{2\nabla u(x) \cdot \nabla\varphi(x) + 2t|\nabla\varphi(x)|^2}{2\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2 + 2t\nabla u(x) \cdot \nabla\varphi(x) + t^2|\nabla\varphi(x)|^2}} dx|_{t=0} \\ &= \int_{\Omega} \frac{\nabla u(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}} \cdot \nabla\varphi(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{u_{x_i}(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}} \cdot \varphi_{x_i}(x) dx \\ &\text{Satz von Gauß, beachte } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \\ &= - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_{x_i}(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}} \right) \cdot \varphi(x) dx \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}} \right) \cdot \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Da $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig gewählt werden kann und man $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}} \right)$ als stetig annehmen kann, muss der letztere Term also identisch verschwinden. Aus der Minimaleigenschaft von u für das Funktional (1.25) unter der Randbedingung $u|_{\partial\Omega} = g$ erhalten wir als *notwendige* Bedingung, dass u eine Lösung des **Dirichletproblems für die Minimalflächengleichung** ist:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}} \right) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.26)$$

Man nennt dieses Randwertproblem auch die zum Funktional (1.25) gehörige Euler-Lagrange-Gleichung, die man durch Berechnung der „Ableitung“ des Flächenfunktionals erhält. Umgekehrt kann man Lösungen von (1.26) als Nullstellen der Ableitung bzw. als „kritische Punkte“ des Flächenfunktionals selbst interpretieren.

Was werden wir erreichen können?

Nur in den seltensten und allerspeziellsten Fällen wird man explizite Lösungen bestimmen können, auch wenn man Reihenentwicklungen mit in Betracht zieht.

Zunächst einmal werden wir viel erreicht haben, wenn es uns gelingt, die gemäß Hadamard formulierte **Wohlgestelltheit** von Problemen zu zeigen:

- Existenz,
- Eindeutigkeit,
- stetige Abhängigkeit von den Daten.

Man beachte jedoch, dass insbesondere bei stationären nichtlinearen Problemen mitunter Nichteindeutigkeit sinnvolle und hochinteressante Phänomene widerspiegelt. Die Eindeutigkeitsforderung betrifft insbesondere zeitabhängige Probleme. Für einige Gleichungen gelingt es uns, auch weitergehende qualitative (z.B. Vorzeichen) und quantitative (z.B. Abklingverhalten für $t \rightarrow \infty$) Eigenschaften von Lösungen nachzuweisen.

Teil I

Elliptische Differentialgleichungen

Prototyp für in diesen Bereich fallende Randwertprobleme (stationäre Probleme): Gegeben: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hinreichend glattes reguläres Gebiet, hinreichend glatte Daten $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Gesucht ist $u \in C^2(\bar{\Omega})$ als Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.16)$$

Explizite Lösungen sind nur in ganz wenigen Fällen zu berechnen. Explizite Lösungsformeln mittels Integralkernen sind schon oft recht aufwändig, und lassen sich nur in speziellen Gebieten wie z.B. der Kugel herleiten. Dennoch sind sie wichtig, weil sie den Ausgangspunkt für eine allgemeine Existenz- und Abschätzungstheorie darstellen.

Eine allgemeine Lösungstheorie erfordert Einiges an technischer Arbeit, ein Indiz dafür ist z.B. die Beobachtung: $f \in C^0(\bar{\Omega}), \varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ führt i.A. *nicht* zu einer $C^2(\bar{\Omega})$ -Lösung (Petrini, 1908). U.a. sind also zunächst geeignete Lösungsklassen / Datenklassen zu formulieren.

Methodisch steht aber hinter den meisten Lösungsstrategien: Man nimmt zunächst an, es gebe eine Lösung u und leitet Eigenschaften von u her, insbesondere a-priori-Schranken für u . Allein aus der Kenntnis der Daten Ω, f, φ findet man eine Schranke C , so dass mit einer geeigneten Norm $\| \cdot \|$ für jede möglicherweise existierende Lösung u gilt:

$$\| u \| \leq C.$$

Aus dem Vorliegen solcher Schranken kann man häufig die Existenz von Lösungen folgern! (*Kontinuitätsmethode, Methode der a-priori-Schranken*). Um diesen Zugang zu betonen, aber auch, um schnell und „leicht“ einige attraktive Resultate zu erhalten, beginnen wir nicht mit der Lösungstheorie, sondern mit:

2 Maximumprinzipien

Hierbei handelt es sich um *das* Charakteristikum *elliptischer Gleichungen zweiter Ordnung*; Vergleichbares findet man nur noch bei parabolischen Gleichungen zweiter Ordnung (Wärmeleitungsgleichung). Bei allen anderen Typen bestenfalls extrem abgeschwächte Varianten.

Beginnen wir mit harmonischen Funktionen. Man erinnere sich an die Funktionentheorie und den Zusammenhang zwischen holomorphen und harmonischen Funktionen.

Im Folgenden sei stets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **harmonisch**, wenn $u \in C^2(\Omega)$ und $\forall x \in \Omega : -\Delta u(x) = 0$. Außerdem bezeichnet $e_n = \int_{|y|<1} dy$ stets das Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel.

2.1 Satz (Mittelwertegenschaft harmonischer Funktionen). Sei $u \in C^2(\Omega)$. Dann ist u harmonisch genau dann, wenn für alle $x \in \Omega$ und für alle $r > 0$ mit $r < \text{dist}(x, \partial\Omega)$ gilt:

$$u(x) = \frac{1}{ne_n r^{n-1}} \int_{|\eta|=r} u(x + \eta) dS(\eta) \quad (2.1)$$

bzw. für alle $x \in \Omega$ und für alle $r > 0$ mit $r < \text{dist}(x, \partial\Omega)$:

$$u(x) = \frac{1}{e_n r^n} \int_{|y|<r} u(x + y) dy. \quad (2.2)$$

Bemerkung. Die Rückrichtung lässt sich noch wesentlich verschärfen, u.a. reicht es dafür, Stetigkeit von u vorauszusetzen. Dazu vgl. unten Satz 3.10. Auch ist dafür die lokale Gültigkeit der Mittelwertegenschaft ausreichend, vgl. dazu Hilfssatz 2.3.

Beweis. Wir zeigen zunächst eine nützliche Identität, die allgemein für $u \in C^2(\Omega)$, $x \in \Omega$, $r \in (0, \text{dist}(x, \partial\Omega))$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \int_{|\eta|=1} u(x + r\eta) dS(\eta) &\stackrel{\text{par.-abh. Integral}}{=} \int_{|\eta|=1} \frac{\partial}{\partial r} u(x + r\eta) dS(\eta) \\ &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_{|\eta|=1} \langle (\nabla u)(x + r\eta), \eta \rangle dS(\eta) \\ &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \frac{1}{r} \int_{|\eta|=1} \langle \nabla_\eta (u(x + r\eta)), \eta \rangle dS(\eta) \\ &\stackrel{\text{Gauß-Satz}}{=} \frac{1}{r} \int_{|\eta|<1} \Delta_\eta (u(x + r\eta)) d\eta \\ &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} r \int_{|\eta|<1} \Delta u(x + r\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Nimmt man noch das Transformationsverhalten von Oberflächenintegralen gegenüber Homothetien hinzu:

$$\frac{1}{ne_n r^{n-1}} \int_{|\eta|=r} u(x + \eta) dS(\eta) = \frac{1}{ne_n} \int_{|\eta|=1} u(x + r\eta) dS(\eta),$$

so folgt:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{ne_n r^{n-1}} \int_{|\eta|=r} u(x + \eta) dS(\eta) \right) = \frac{r}{ne_n} \int_{|\eta|<1} \Delta u(x + r\eta) d\eta. \quad (2.3)$$

„ \Rightarrow “: Damit zeigen wir zunächst: $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch \Rightarrow (2.1). Formel (2.3) ergibt:

$$(0, \text{dist}(x, \partial\Omega)) \ni r \mapsto \frac{1}{ne_n r^{n-1}} \int_{|\eta|=r} u(x + \eta) dS(\eta)$$

ist konstant. Da u stetig ist, gilt für $|\eta| = r \searrow 0$: $u(x + \eta) = u(x) + o(1)$:

$$\begin{aligned} \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{ne_n r^{n-1}} \int_{|\eta|=r} u(x + \eta) dS(\eta) &= \lim_{r \searrow 0} \frac{u(x)}{ne_n r^{n-1}} \int_{|\eta|=r} dS(\eta) + \lim_{r \searrow 0} \frac{\int_{|\eta|=r} o(1) dS(\eta)}{ne_n r^{n-1}} \\ &= u(x) + \lim_{r \searrow 0} o(1) = u(x). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Insgesamt erhalten wir also (2.1). Um den Beweis von „ \Rightarrow “ abzuschließen, zeigen wir noch: Sei $u \in C^0(\Omega)$, $x \in \Omega$ fest, $r_0 \in (0, \text{dist}(x, \partial\Omega)]$. Dann gilt:

$$\forall r \in (0, r_0) \text{ gilt (2.1)} \Leftrightarrow \forall r \in (0, r_0) \text{ gilt (2.2)} .$$

„ \Rightarrow “ hiervon“: Sei $r \in (0, r_0)$, dann gilt für alle $\varrho \in (0, r]$:

$$ne_n \varrho^{n-1} u(x) = \int_{|\eta|=\varrho} u(x+\eta) dS(\eta).$$

Integration nach $\varrho \in (0, r]$ liefert:

$$e_n r^n u(x) = \int_0^r \int_{|\eta|=\varrho} u(x+\eta) dS(\eta) d\varrho = \int_{|y|<r} u(x+y) dy$$

und damit (2.2).

„ \Leftarrow “ hiervon“: Für $r \in (0, r_0)$ gilt gemäß (2.2):

$$e_n r^n u(x) = \int_{|y|<r} u(x+y) dy = \int_0^r \int_{|\eta|=\varrho} u(x+\eta) dS(\eta) d\varrho.$$

Differenzieren dieser Identität nach r ergibt:

$$ne_n r^{n-1} u(x) = \int_{|\eta|=r} u(x+\eta) dS(\eta)$$

und damit (2.1). Damit ist „ \Rightarrow “ von Satz 2.1 vollständig bewiesen. Bevor wir zum Beweis der Rückrichtung kommen, soll die Formulierung von (2.1),(2.2) besonders mit Blick auf spätere Anwendungen im obigen Sinne abgeschwächt werden. (Vgl. unten Satz 3.12 und auch das Schwarzsche Spiegelungsprinzip (Übungen).)

2.2 Definition. Sei $u \in C^0(\Omega)$. Wir sagen, dass u der **schwachen Mittelwert-eigenschaft** genügt, falls zu jedem $x \in \Omega$ ein $r_0 \in (0, \text{dist}(x, \partial\Omega)]$ existiert, so dass $\forall r \in (0, r_0)$ (2.1) bzw. (2.2) gilt.

Die Richtung „ \Leftarrow “ in Satz 2.1 folgt dann direkt aus

2.3 Hilfssatz. Sei $u \in C^2(\Omega)$ und genüge der schwachen Mittelwerteigenschaft. Dann ist u harmonisch.

Beweis. Man beachte, dass die Existenz von $\Delta u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ per Voraussetzung gesichert ist. Annahme: $\exists x_0 \in \Omega : \Delta u(x_0) \neq 0$. Ohne Einschränkung können wir $\Delta u(x_0) > 0$ annehmen, sonst gehen wir zu $-u$ über. Es gibt dann ein $\rho \in (0, \text{dist}(x_0, \partial\Omega)]$ derart, dass $\Delta u|_{B_\rho(x_0)} > 0$. Formel (2.3) zeigt dann für $r \in (0, \rho)$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{ne_n r^{n-1}} \int_{|\eta|=r} u(x+\eta) dS(\eta) \right) > 0$$

und zusammen mit (2.4)

$$u(x) < \frac{1}{ne_n r^{n-1}} \int_{|\eta|=r} u(x+\eta) dS(\eta),$$

so dass (2.1) auch in der abgeschwächten Formulierung verletzt ist. \square

□

2.4 Bemerkung. Die vorhergehenden Überlegungen zeigen für $u \in C^2(\Omega)$:

- $\forall x \in \Omega : -\Delta u(x) \geq 0 \Rightarrow$ (2.1), (2.2) gelten mit $u(x) \geq$ Mittelwerte;
- $\forall x \in \Omega : -\Delta u(x) \leq 0 \Rightarrow$ (2.1), (2.2) gelten mit $u(x) \leq$ Mittelwerte.

Man nennt diese Funktionen deshalb:

- $\forall x \in \Omega : -\Delta u(x) \geq 0$ **superharmonisch**,
- $\forall x \in \Omega : -\Delta u(x) \leq 0$ **subharmonisch**.

2.5 Satz (Starkes Maximumprinzip für harmonische Funktionen). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $u \in C^2(\Omega)$ sei harmonisch, dann gilt: Nimmt u in einem $x_0 \in \Omega$ ein globales Minimum oder Maximum an, so ist u konstant.*

Beweis. Wir zeigen die Behauptung unter der abgeschwächten Voraussetzung: $u \in C^0(\Omega)$ erfüllt schwache Mittelwerteigenschaft gemäß Definition 2.2. Sei $x_0 \in \Omega$ ein Punkt so, dass für alle $x \in \Omega$ gilt:

$$u(x) \leq u(x_0).$$

(Bei \geq gehe zu $-u$ über.) Wir verwenden in diesem Fall von der Mittelwertgleichung (2.2) ausschließlich die Ungleichung „ \leq “.

Wir wählen $r_0 \leq \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$ gemäß Definition 2.2. Für alle $r \in (0, r_0)$ gilt insbesondere:

$$\begin{aligned} u(x_0) &\leq \frac{1}{e_n r^n} \int_{|y| < r} u(x_0 + y) dy \\ \Rightarrow 0 &\leq \frac{1}{e_n r^n} \int_{|y| < r} \underbrace{(u(x_0 + y) - u(x_0))}_{\leq 0 \text{ gem. Vor.}} dy. \end{aligned}$$

Da u stetig, folgt $u|_{B_{r_0}(x_0)} \equiv u(x_0)$, u ist konstant nahe x_0 .

Sei $\Omega' = \{x \in \Omega : u(x) = u(x_0)\}$. Die Wiederholung des soeben gebrachten Arguments zeigt: Ω' offen (in Ω). Ferner ist $\Omega' \neq \emptyset$ und wegen der Stetigkeit von u abgeschlossen in Ω . Da Ω zusammenhängend ist, folgt $\Omega' = \Omega$ und somit $u|_{\Omega} \equiv u(x_0)$. □

2.6 Bemerkung. (a) Dieser Beweis zeigt auch für $u \in C^2(\Omega)$ (Ω Gebiet!):

- u subharmonisch, in x_0 Maximum $\Rightarrow u$ konstant;
- u superharmonisch, in x_0 Minimum $\Rightarrow u$ konstant.

(b) Mit dem „Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit“ ($\Leftarrow u$ analytisch, vgl. unten Satz 3.4) kann man zeigen: Ist Ω ein Gebiet, $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch und besitzt u ein *lokales* Extremum, so ist u konstant.

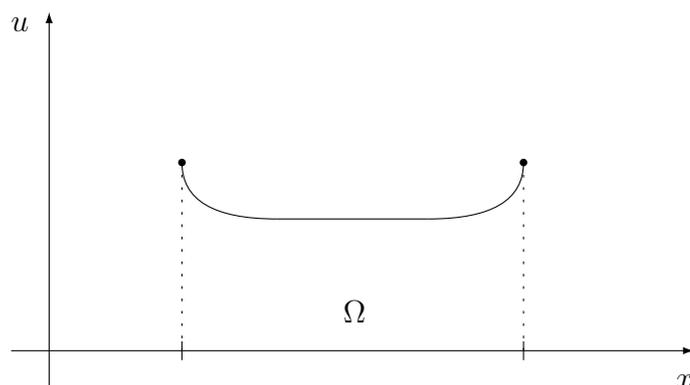


Abbildung 2: Nichtkonstante subharmonische Funktionen können in Ω keine globalen, wohl aber lokale Maxima besitzen.

- (c) Nichtkonstante *subharmonische* Funktionen können hingegen lokale Maxima besitzen (allerdings keine „strikten“). Man vgl. Bild 2.

Indem man das starke Maximum-/Minimumprinzip auf Wegzusammenhangskomponenten einer allgemeinen offenen und beschränkten Menge anwendet, folgt:

2.7 Satz (Schwach Maximumprinzip für harmonische Funktionen). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen; $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.*

Ist $\forall x \in \Omega : -\Delta u(x) \leq 0$, so folgt: $\forall x \in \Omega : u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u$.

Ist $\forall x \in \Omega : -\Delta u(x) \geq 0$, so folgt: $\forall x \in \Omega : u(x) \geq \min_{\partial\Omega} u$.

Ist u in Ω harmonisch, so gilt: $\forall x \in \Omega : \min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u$.

Damit erhalten wir sofort ein Eindeutigkeitsresultat für das Dirichletproblem für die Poissongleichung (vgl. Beispiel 0.10 und die Voraussetzungen dort).

2.8 Folgerung. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $f \in C^0(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Seien $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ Lösungen von:*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega; \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta v = f & \text{in } \Omega, \\ v = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dann gilt für alle $x \in \overline{\Omega} : u(x) = v(x)$

Wie bereits angedeutet, werden Existenzbeweise für das Dirichletproblem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = \varphi \text{ auf } \partial\Omega; \quad (2.5)$$

geführt, indem man „a-priori-Abschätzungen“ in geeigneten Normen herleitet. Diese zeigen bezüglich dieser Normen dann auch die stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Daten, da (2.5) ein lineares Problem ist.

Wir zeigen mit dem folgenden Satz, wie man mittels des Maximumprinzips einen ersten Schritt in diese Richtung gehen kann:

2.9 Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, $f \in C^0(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Sei $R > 0$ so, dass $\Omega \subset B_R(0)$. Dann gilt für jede Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ des Dirichletproblems (2.5) für die Poissongleichung:

$$\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq \|\varphi\|_{C^0(\partial\Omega)} + \frac{R^2}{2n} \|f\|_{C^0(\overline{\Omega})}.$$

Beweis. Idee: Vergleiche mit geeigneter Barrierenfunktion, die auf $\partial\Omega$ oberhalb φ liegt und stärker als mit f nach oben gedrückt wird. Wir gehen von der folgenden Beobachtung aus:

$$-\Delta(R^2 - |x|^2) = 2n.$$

Setzen wir

$$v(x) = \frac{1}{2n} \|f\|_{C^0(\overline{\Omega})} (R^2 - |x|^2) + \|\varphi\|_{C^0(\partial\Omega)},$$

so gilt $\forall x \in \Omega \subset B_R(0)$:

$$-\Delta v = \|f\|_{C^0(\overline{\Omega})} \geq -\Delta u.$$

sowie für $x \in \partial\Omega \subset \overline{B_R(0)}$

$$v(x) \geq \|\varphi\|_{C^0(\partial\Omega)} \geq \varphi(x) = u(x).$$

Wir erhalten:

$$-\Delta(u - v) \leq 0 \text{ in } \Omega, \quad u - v \leq 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Entsprechend leitet man her:

$$-\Delta(u + v) \geq 0 \text{ in } \Omega, \quad u + v \geq 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Das schwache Maximumprinzip Satz 2.7 zeigt:

$$\begin{aligned} \forall x \in \overline{\Omega} \quad u(x) - v(x) &\leq 0, \quad u(x) + v(x) \geq 0; \\ \Rightarrow |u(x)| &\leq v(x) \leq \frac{R^2}{2n} \|f\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \|\varphi\|_{C^0(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

□

Bevor wir Maximumprinzipien auf allgemeine elliptische Gleichungen ausdehnen, nehmen wir noch einmal die Mittelwerteseigenschaft harmonischer Funktionen auf und verschärfen das Maximumprinzip auf quantitative Weise:

2.10 Satz (Harnacksche Ungleichung). Sei $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch und positiv: $\forall x \in \Omega : u(x) \geq 0$. Sei $\Omega' \subset\subset \Omega$ ein Gebiet, dann existiert eine Konstante $C = C(n, \Omega', \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)) > 0$, die nur von n , Ω' und $\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ abhängt, so dass gilt:

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst $x_0 \in \Omega$, $R > 0$ so, dass $\overline{B_{4R}(x_0)} \subset \Omega$ gilt. Seien $x_1, x_2 \in \overline{B_R(x_0)}$ beliebig. Die Mittelwerteigenschaft aus Satz 2.1 ergibt zusammen mit $u \geq 0$ und der Monotonie des Integrals:

$$\begin{aligned} u(x_1) &= \frac{1}{e_n R^n} \int_{B_R(x_1)} u(y) dy \leq \frac{1}{e_n R^n} \int_{B_{2R}(x_0)} u(y) dy, \\ u(x_2) &= \frac{1}{e_n (3R)^n} \int_{B_{3R}(x_2)} u(y) dy \geq \frac{1}{3^n e_n R^n} \int_{B_{2R}(x_0)} u(y) dy. \end{aligned}$$

Es folgt $u(x_1) \leq 3^n u(x_2)$ und, da x_1, x_2 beliebig:

$$\sup_{\overline{B_R(x_0)}} u \leq 3^n \inf_{\overline{B_R(x_0)}} u. \quad (*)$$

Sei nun $\Omega' \subset\subset \Omega$ ein Teilgebiet. Wir wählen $R \in (0, \frac{1}{4} \text{dist}(\Omega', \partial\Omega))$ sowie auf Grund der Kompaktheit von $\overline{\Omega'}$ eine Anzahl N von Kugeln $B_R(\eta_j)$ mit $\overline{B_{4R}(\eta_j)} \subset \Omega$, die Ω' überdecken: $\Omega' \subset \bigcup_{j=1}^N B_R(\eta_j)$. Seien $x_1, x_2 \in \Omega'$ beliebig. Man kann diese zunächst mit einem Weg in Ω' verbinden. Falls dieser Weg Kugeln mehrfach durchläuft, ersetzt man ihn durch einen Weg in der Vereinigung der R -Kugeln so, dass dieser aus maximal N Teilwegen besteht, die jeweils ganz in einer Kugel verlaufen. Obiges Argument ist also höchstens N -mal zu wiederholen, und aus (*) erhalten wir:

$$u(x_1) \leq 3^{Nn} u(x_2), \quad \sup_{\Omega'} u \leq 3^{Nn} \inf_{\Omega'} u.$$

□

Das Maximumprinzip eignet sich ausgezeichnet, mit moderatem Aufwand einen Ausblick auf allgemeine elliptische Differentialoperatoren 2. Ordnung zu geben.

$$Lu(x) := - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i}(x) + c(x) u(x), \quad x \in \Omega. \quad (2.6)$$

Im Modell etwa einer eingespannten Membran kommen den Koeffizienten dabei folgende Bedeutungen zu:

a_{ij} : x -abhängig: inhomogenes Material; nicht Vielfaches von δ_{ij} : anisotropes Material;

b_i : Driftterm (siehe 1.1);

c : linearer Rückstellterm ($c \geq 0$) (elastische Bettung).

Wir stellen die für das Folgende wesentlichen Voraussetzungen an Ω und den Differentialoperator L zusammen:

2.11 Voraussetzungen. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, die Koeffizienten von L seien beschränkt, d.h.

$$\exists M : \forall x \in \Omega : \quad \forall i, j = 1, \dots, n : \quad |a_{ij}(x)| \leq M, |b_i(x)| \leq M, |c(x)| \leq M.$$

Die Matrix der führenden Koeffizienten a_{ij} ist symmetrisch:

$$\forall x \in \Omega : \quad \forall i, j = 1, \dots, n : \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x).$$

Der Differentialoperator L sei **gleichmäßig elliptisch**, d.h. es gibt positive Konstanten $0 < \lambda \leq \Lambda$, die **Elliptizitätsmoduln**, so dass für alle $x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda |\xi|^2. \quad (2.7)$$

Die Elliptizitätsbedingung (2.7) besagt, dass für alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ der symmetrischen Koeffizientenmatrix $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ stets gilt:

$$\lambda \leq \lambda_j(x) \leq \Lambda.$$

Mittelwertigenschaften kann man natürlich nicht mehr erwarten! Maximumprinzipien behalten aber ihre Gültigkeit. Wegen des wesentlich geringeren technischen Aufwands beschränken wir uns auf die schwachen Versionen.

2.12 Satz (Schwaches Maximum-/Minimumprinzip). *Für den Differentialoperator aus (2.6) gelte Voraussetzung 2.11. Weiter sei $c \equiv 0$. Für $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ gelte:*

$$\forall x \in \Omega : \quad Lu(x) \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad Lu(x) \leq 0, \quad \text{bzw.} \quad Lu(x) = 0.$$

Dann gilt für alle $x \in \bar{\Omega}$:

$$u(x) \geq \min_{\partial\Omega} u,$$

bzw.

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u,$$

bzw.

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u.$$

Bemerkung. Hat man $u, u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ mit $u|_{\partial\Omega} = u_1|_{\partial\Omega} = u_2|_{\partial\Omega}$, $Lu_1 \geq 0$ in Ω , $Lu = 0$ in Ω , $Lu_2 \leq 0$ in Ω , so zeigt der Satz: $u_2 \leq u \leq u_1$ in Ω . Aus diesem Grund heißt u_1 **Oberlösung** und u_2 **Untерlösung** zu $Lu = 0$.

Beweis. Wir betrachten hier den Fall $Lu \geq 0$. „ $Lu \leq 0$ “ erhält man, indem man $-u$ betrachtet und „ $Lu = 0$ “ durch Kombination der beiden Fälle. Wir nehmen zunächst zusätzlich an:

$$\forall x \in \Omega : \quad Lu(x) > 0 \quad (*)$$

und zeigen, dass in diesem Fall sogar ein starkes Minimumprinzip gilt.

Annahme: u hat in x_0 ein lokales Minimum. Dann gilt dort (notwendiges Kriterium):

$$\nabla u(x_0) = 0; \quad B := (u_{x_i x_j}(x_0))_{i,j=1,\dots,n} = \text{Hess}(u(x_0)) \text{ positiv semidefinit.}$$

Es bezeichne $B^{\frac{1}{2}}$ die positiv semidefinite Wurzel von B und $A = (a_{ij}(x_0))_{i,j=1,\dots,n}$ die führende Koeffizientenmatrix:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0)u_{x_i x_j}(x_0) &= \text{Spur}(AB^T) = \text{Spur}(AB) \\ &= \text{Spur}((AB^{\frac{1}{2}})B^{\frac{1}{2}}) = \text{Spur}(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}) \geq 0. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt:

$$0 < Lu(x_0) = - \underbrace{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0)u_{x_i x_j}(x_0)}_{\geq 0} + \sum_{i=1}^n b_i(x_0) \underbrace{u_{x_i}(x_0)}_{=0} \leq 0;$$

ein Widerspruch!

Falls (*) gilt, hat u also kein lokales Minimum, insbesondere:

$$\forall x \in \Omega : \quad u(x) \geq \min_{\partial\Omega} u.$$

Sei nun u wie im Satz. Gesucht ist ein v , so dass $(u + \varepsilon v)$ für beliebig kleines $\varepsilon > 0$ die Bedingung (*) erfüllt. Wir benötigen also $Lv > 0$. Für $\gamma > 0$ betrachten wir:

$$L \exp(\gamma x_1) = (-a_{11}\gamma^2 + b_1\gamma) \exp(\gamma x_1) \underbrace{\leq}_{a_{11} \geq \lambda} (-\lambda\gamma + M)\gamma \exp(\gamma x_1) < 0,$$

sofern man $\gamma > M/\lambda$ wählt. Wir setzen $v = -\exp(\gamma x_1)$,

$$u_\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon \exp(\gamma x_1)$$

und erhalten für $x \in \Omega$:

$$Lu_\varepsilon(x) = Lu(x) - \varepsilon L \exp(\gamma x_1) > 0,$$

u_ε erfüllt also (*). Es folgt demnach:

$$\forall x \in \Omega : \quad u_\varepsilon(x) \geq \min_{x \in \partial\Omega} u_\varepsilon \Rightarrow u(x) \geq u_\varepsilon(x) \geq \min_{x \in \partial\Omega} u - \varepsilon \max_{x \in \partial\Omega} \exp(\gamma x_1).$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ erhalten wir:

$$\forall x \in \Omega : \quad u(x) \geq \min_{x \in \partial\Omega} u.$$

□

Wir gehen noch kurz auf den Fall $c(x) \not\equiv 0$ ein. Im Allgemeinen wird man hier kein Maximum-/Minimumprinzip erwarten können, denn es existieren Eigenwerte μ und nichttriviale Lösungen $u \not\equiv 0$ des Eigenwertproblems

$$-\Delta u = \mu u \text{ in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

(Hier ohne Beweis, dazu vgl. man § 18.) „Testet“ man die Differentialgleichung mit u und integriert partiell, so erhält man aber $\mu > 0$. Für $L = -\Delta - \mu$ etwa wird Satz 2.12 nicht gelten können.

Für $c \geq 0$ hat man jedoch:

2.13 Satz. Für den Differentialoperator L aus (2.6) gelte Voraussetzung 2.11. Weiter sei $\forall x \in \Omega : c(x) \geq 0$. Für $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ gelte:

$$\forall x \in \Omega : \quad Lu(x) \geq 0$$

bzw.

$$Lu(x) \leq 0$$

bzw.

$$Lu(x) = 0.$$

Dann folgt für alle $x \in \Omega$:

$$u(x) \geq \min_{\partial\Omega}(-u^-) = \min_{\partial\Omega}(\min\{u, 0\})$$

bzw.

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega}(u^+)$$

bzw.

$$\min_{\partial\Omega}(-u^-) \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega}(u^+);$$

wobei $u^- := \max\{-u, 0\}$.

Man stelle sich für $c \geq 0$ den Term cu als Rückstellkraft vor. Oberlösungen könnten wie in Abbildung 3 aussehen.

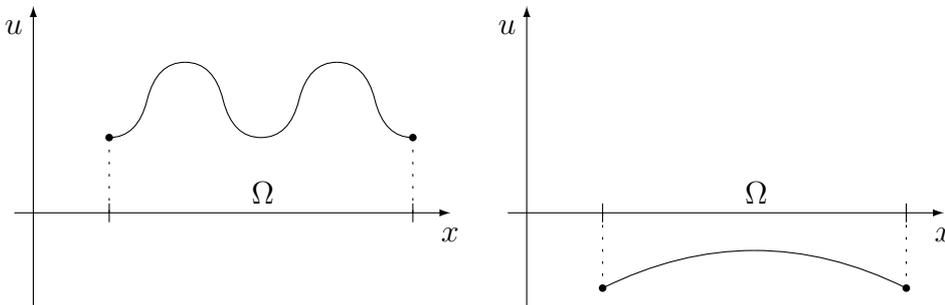


Abbildung 3: Mögliche Oberlösungen bei $c(x) \geq 0$.

Beweis. Wir betrachten wieder den Fall $Lu(x) \geq 0$. Der folgende Trick ist fundamental für Gleichungen *zweiter* Ordnung. Auf Niveaumengen erhält man wieder ein Dirichletproblem. Sei

$$\Omega^- = \{x \in \Omega : u(x) < 0\}.$$

Ist $\Omega^- = \emptyset$, so ist $u \geq 0$ in Ω und nichts mehr zu zeigen. Ist $\Omega^- \neq \emptyset$, so bezeichne $L_0 = L - c = -\sum a_{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum b_i\partial_{x_i}$; in Ω^- hat man folgendes Dirichletproblem:

$$\begin{aligned} L_0 u(x) &\geq -c(x)u(x) \geq 0 & x \in \Omega^-, \\ u(x) &= 0 & x \in \partial\Omega^- \cap \Omega, \\ u(x) &= u|_{\partial\Omega}(x) & x \in \partial\Omega^- \cap \partial\Omega. \end{aligned}$$

Satz 2.12 liefert in Ω^- : $u \geq \min_{\partial\Omega^-}(u) \geq \min\{0, \min_{\partial\Omega}(u)\} = \min_{\partial\Omega}(-u^-)$,
in $\Omega \setminus \Omega^-$ gilt trivialerweise: $u \geq 0 \geq \min_{\partial\Omega}(-u^-)$.
Somit erhalten wir: $\forall x \in \Omega : u(x) \geq \min_{\partial\Omega}(-u^-)$. □

Es folgt unmittelbar ein *Eindeutigkeitsatz* für das *Dirichletproblem* zu L :

2.14 Folgerung. *Für den Differentialoperator L aus (2.6) gelte Voraussetzung 2.11, weiter sei $\forall x \in \Omega : c(x) \geq 0$. Für $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ gelte:*

$$\forall x \in \Omega : Lu(x) = Lv(x); \quad \forall x \in \partial\Omega : u(x) = v(x).$$

Dann folgt $u = v$ in $\bar{\Omega}$.

Man beachte, welcher geringen Aufwand dieses Eindeutigkeitsresultat erfordert; das ist ganz anders hinsichtlich der Existenz klassischer Lösungen des Dirichletproblems für L . Diese Einfachheit ist neben der Gültigkeit von Maximumprinzipien in der Linearität von L begründet.

Man könnte an die Maximumprinzipien 2.12, 2.13 erste a-priori-Abschätzungen im Sinne von Satz 2.9 anschließen; eine geeignete Barrierenfunktion ist dann mit Hilfe von $x \mapsto \exp(\gamma x_1)$ zu konstruieren. (Vgl. [GT, Theorem 3.7 /Corollary 3.8].)

3 Greensche Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ reguläres, glattes Gebiet. Wir werden mit dem Studium des Dirichletproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

beginnen. Zwar werden wir uns hier weitgehend auf die Kugel $\Omega = B$ beschränken, doch ist selbst dieses scheinbar so spezielle Resultat grundlegend für Vieles wie zum Beispiel:

- Verschärfung von Hilfssatz 2.3 (Mittelwerteigenschaft \Rightarrow harmonisch) auf stetige Funktionen.
- Perronsche Methode subharmonischer Funktionen, vgl. Satz 4.8: Damit gelingt im Falle $f = 0$ immerhin ein Existenzresultat für sehr allgemeine Gebiete Ω .
- Die ganzen „Schauderabschätzungen“ und die klassische Lösungstheorie basieren auf Resultaten in Kugel bzw. Halbkugel.

Beginnen wir die Suche nach Lösungen von (3.1) mit der Bestimmung radialsymmetrischer harmonischer Funktionen. Dazu sei erwähnt:

Ist $\tilde{u} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ und $u(x) = \tilde{u}(|x|)$, so gilt mit $r = |x|$:

$$\Delta u(x) = \tilde{u}''(r) + \frac{n-1}{r} \tilde{u}'(r) = r^{1-n} (r^{n-1} \tilde{u}'(r))'.$$

Die Unterscheidung von u und \tilde{u} werden wir fortan nicht mehr explizit vornehmen, sondern sie wird sich aus dem Kontext ergeben.

Gesucht ist also radialsymmetrisches harmonisches u :

$$\begin{aligned} 0 &= r^{1-n} (r^{n-1} u'(r))' \\ \Rightarrow r^{n-1} u' &= c_1 \quad \Rightarrow \begin{cases} u = c_2 r^{2-n} + c_3 & (n \neq 2), \\ u = c_2 \log(r) + c_3 & (n = 2). \end{cases} \end{aligned}$$

Der reguläre konstante Anteil ist natürlich bedeutungslos, umso wichtiger dagegen der singuläre Teil:

3.1 Definition. Wir definieren die **singuläre Grundlösung** des Laplace-Operators $-\Delta$ in \mathbb{R}^n durch

$$\Phi(r) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log(r), & n = 2, \\ \frac{1}{(n-2)n\epsilon_n} r^{2-n}, & n \neq 2. \end{cases}$$

Diese Namensgebung wird durch den folgenden, noch unter sehr starken Voraussetzungen formulierten, Existenzsatz in \mathbb{R}^n gerechtfertigt:

3.2 Satz. Für $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ definieren wir das **Newton-Potential**

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|x-y|)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|y|)f(x-y)dy.$$

Dann gilt: $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad -\Delta u(x) = f(x).$$

Beweis. Wir verwenden die zweite Darstellung und wenden darauf den Lebesgueschen Satz über parameterabhängige Integrale an. Wir wählen ein beliebiges $R_1 > 0$, halten dieses aber im Folgenden fest und betrachten $|x| < R_1$. Weiter seien $\text{supp } f \subset B_{R_2}(0)$ und M so, dass

$$\forall i, j, \forall x : |f(x)|, \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right| \leq M.$$

Dann ist das Integral nur über $B_{R_1+R_2}(0)$ zu erstrecken und $y \mapsto M\Phi(|y|)$ ist hierauf eine integrable Majorante für das formal differenzierte Integral. Da R_1 beliebig gewählt werden kann, erhält man so $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|y|) \frac{\partial}{\partial x_i} f(x-y) dy \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|y|) \frac{\partial}{\partial y_i} f(x-y) dy, \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|y|) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x-y) dy \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|y|) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} f(x-y) dy. \end{aligned}$$

Insbesondere:

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|y|) \Delta_y f(x-y) dy.$$

Für $x \in B_{R_1}(0)$ ist dieses Integral nur über $B_{R_1+R_2}(0)$ zu erstrecken. Es soll der Satz von Gauß / Greensche Formel angewendet werden. Auf $\partial B_{R_1+R_2}(0)$ verschwinden $y \mapsto f(x-y)$ und $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial y_i}(x-y)$ (da kompakter Träger). Allerdings ist nur $\Phi(|\cdot|) \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Um dennoch den Gaußschen Satz anwenden zu können, schneiden wir zunächst $B_\varepsilon(0)$ aus \mathbb{R}^n heraus. Auf Grund der Integrierbarkeit nahe 0 gilt (z.B. mit Satz von Lebesgue):

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= -\lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{i=1}^n \int_{|y| \geq \varepsilon} \Phi(|y|) \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} f(x-y) dy \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{i=1}^n \left\{ - \int_{|y|=\varepsilon} \Phi(|y|) \underbrace{\frac{-y_i}{|y|}}_{\nu_i} \frac{\partial}{\partial y_i} f(x-y) dS(y) + \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} \Phi(|y|) \frac{\partial}{\partial y_i} f(x-y) dy \right\} \\ &\quad \text{(das erste Oberflächenintegral ist von der Ordnung } \varepsilon \text{ bzw. } \varepsilon |\log \varepsilon| \text{)} \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left\{ \int_{|y|=\varepsilon} \sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{ne_n} \frac{y_i}{|y|^n} \right) \left(-\frac{y_i}{|y|} \right) f(x-y) dS(y) - \int_{|y| \geq \varepsilon} \underbrace{\Delta \Phi(|y|)}_{=0} f(x-y) dy \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{ne_n \varepsilon^{n-1}} \int_{|y|=\varepsilon} f(x-y) dS(y) \stackrel{f \text{ stetig}}{=} f(x). \end{aligned}$$

Im Oberflächenintegral treten „stark singuläre“ Integralkerne auf ($\varepsilon \searrow 0$). Damit wird, obwohl $\Delta\Phi(|y|) = 0$ f.ü., $-\Delta u(x) = f(x)$. In einer funktionalanalytischen Sprache bedeutet dies, dass

$$-\Delta\Phi(|y|) = \delta_0, \quad \text{Delta-Distribution.}$$

□

Mit denselben Methoden zeigt man die folgende Darstellungsformel:

3.3 Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein reguläres Gebiet, $f \in C^0(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung von

$$\forall x \in \Omega : \quad -\Delta u(x) = f(x); \quad \forall x \in \partial\Omega : \quad u(x) = \varphi(x).$$

Dann gilt $\forall x \in \Omega$:

$$u(x) = \int_{\Omega} \Phi(|x-y|)f(y)dy + \int_{\partial\Omega} \left(-\frac{\partial}{\partial\nu_y} \Phi(|x-y|)\varphi(y) + \Phi(|x-y|)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y) \right) dS(y).$$

Bemerkungen. Man beachte, dass hier keine Lösungsformel gegeben wird, insbesondere ist $f \in C^0$ i.A. nicht ausreichend, damit das Volumenintegral $\in C^2(\Omega)$ ist! Gezeigt wird nur u Lösung $\Rightarrow u$ besitzt diese Darstellung.

Ein weiteres Ärgernis besteht im Randintegral über $\frac{\partial u}{\partial\nu}$! Die Kenntnis dieses Datums sollte zur eindeutigen Bestimmtheit von u eigentlich nicht erforderlich sein! Um diesen Mangel zu beheben, werden wir in Definition 3.5 unten den Begriff der Grundlösung zu dem der Greenschen Funktion ausbauen.

Vorher ziehen wir aus dem scheinbar so unzulänglichen Satz 3.3 eine wichtige Folgerung: (Wie üblich sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.)

3.4 Satz. Sei $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch. Dann ist sogar $u \in C^\infty(\Omega)$ (man kann sogar zeigen: reell analytisch).

Beweis. Es reicht zu zeigen: Für $x_0 \in \Omega$ beliebig aber fest, $r \in (0, \text{dist}(x_0, \partial\Omega))$ gilt: $u \in C^\infty(B_{r/2}(x_0))$.

Da $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$, $u \in C^2(\overline{B_r(x_0)})$, zeigt der vorhergehende Satz für $x \in B_{r/2}(x_0)$:

$$u(x) = \int_{|y-x_0|=r} \left(-\sum_{i=1}^n \frac{y_i - x_{0,i}}{|y-x_0|} \frac{\partial}{\partial y_i} \Phi(|x-y|)u(y) + \Phi(|x-y|)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y) \right) dS(y).$$

Der Integrand ist bezüglich x beliebig oft differenzierbar und jede x -Ableitung liegt in $C^0(\overline{B_{r/2}(x_0)} \times \partial B_r(x_0))$. Die Theorie parameterabhängiger (sogar Riemann-!) Integrale zeigt dann, dass $u \in C^\infty(B_{r/2}(x_0))$. □

Wir wollen nun die singuläre Grundlösung so modifizieren, dass das $\frac{\partial u}{\partial\nu}$ -Randintegral in Satz 3.3 entfällt.

3.5 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein reguläres Gebiet, es sei

$$H : \Omega \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion derart, dass für jedes $x \in \Omega$ gilt:

$$H(x, \cdot) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \forall y \in \Omega : \quad \Delta_y H(x, y) = 0.$$

Für $x \in \Omega, y \in \overline{\Omega} \setminus \{x\}$ setzen wir dann

$$G(x, y) = \Phi(|x - y|) + H(x, y).$$

Kann man H so bestimmen, dass $\forall x \in \Omega$:

$$\forall y \in \partial\Omega : \quad G(x, y) = 0$$

gilt, so heißt G **Greensche Funktion** zu $-\Delta$ in Ω . Zur Verdeutlichung schreibt man in diesem Falle mitunter $G_{-\Delta, \Omega}$.

Man stellt fest: Satz 3.3 bleibt unverändert richtig, wenn man $\Phi(|x - y|)$ durch ein $G(x, y)$ wie in der Definition ersetzt. Insbesondere gilt:

3.6 Bemerkung. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein reguläres Gebiet derart, dass $-\Delta$ in Ω eine Greensche Funktion $G_{-\Delta, \Omega}$ besitzt. Seien $f \in C^0(\overline{\Omega}), \varphi \in C^0(\partial\Omega)$ gegeben. Es sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung von

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = \varphi \text{ auf } \partial\Omega.$$

Dann gilt:

$$\forall x \in \Omega : \quad u(x) = \int_{\Omega} G_{-\Delta, \Omega}(x, y) dy + \int_{\partial\Omega} \left(-\frac{\partial}{\partial \nu_y} G_{-\Delta, \Omega}(x, y) \right) \varphi(y) dS(y).$$

Man beachte: Auch hier wird nur eine *Darstellungsformel*, aber *keine Lösungsformel* gezeigt. Um tatsächlich Lösungen zu erhalten, sind die Voraussetzungen (vor allem) an f zu verschärfen. Dazu vgl. man unten Satz 4.15, der in dieser grundlegenden Vorlesung nicht bewiesen werden kann.

3.7 Bemerkung. Wie bestimmt man Greensche Funktionen?

Für festes $x \in \Omega$ ist zu lösen:

$$\begin{cases} -\Delta_y H(x, y) & = 0 & y \in \Omega, \\ H(x, y) & = -\Phi(|x - y|) & y \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.2)$$

Eindeutigkeit ist auf Grund des Maximumprinzips klar: vgl. Folgerung 2.8. Im Allgemeinen ist das Existenzproblem für (3.2) aber ebenso schwer wie das ursprüngliche für (3.1).

Im Spezialfall $\Omega = B := B_1(0)$ (durch Skalieren und Translation auch $B_R(a)$) gelingt mittels eines physikalisch motivierten Kunstgriffs eine explizite Bestimmung der Greenschen Funktion. Das Potential

$$y \mapsto \Phi(|x - y|)$$

der Einheitspunktladung in $x \in B$ soll auf ∂B kompensiert werden durch das Potential einer geeinget starken negativen Ladung im Spiegelpunkt $x^* = \frac{1}{|x|} \frac{x}{|x|}$.

Mit diesem Ansatz kann man dann tatsächlich die Greensche Funktion zu $-\Delta$ in B bestimmen:

3.8 Satz. *Die Greensche Funktion $G = G_{-\Delta, B}$ zu (dem Dirichletproblem für) $-\Delta$ in der Einheitskugel $B = B_1(0)$ existiert, ist eindeutig bestimmt und wird gegeben durch die Formel:*

Falls $n \neq 2$:

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)ne_n} \left(|x - y|^{2-n} - \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|^{2-n} \right) & \text{falls } x \neq 0, \\ \frac{1}{(n-2)ne_n} (|y|^{2-n} - 1) & \text{falls } x = 0; \end{cases}$$

falls $n = 2$:

$$G(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \left(\log(|x - y|) - \log \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right| \right) & \text{falls } x \neq 0, \\ -\frac{1}{2\pi} \log |y| & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Die Greensche Funktion ist symmetrisch:

$$\forall (x, y) \in B \times B \setminus \{x = y\} : \quad G(x, y) = G(y, x)$$

und strikt positiv:

$$\forall (x, y) \in B \times B \setminus \{x = y\} : \quad G(x, y) > 0.$$

Sind $f \in C^0(\overline{B})$, $\varphi \in C^0(\partial B)$ gegeben und ist $u \in C^2(\overline{B})$ eine Lösung des Dirichletproblems

$$-\Delta u = f \text{ in } B, \quad u = \varphi \text{ auf } \partial B,$$

so gilt die Darstellungsformel

$$\forall x \in B : \quad u(x) = \int_B G(x, y) f(y) dy + \int_{\partial B} K(x, y) \varphi(y) dS(y), \quad (3.3)$$

wobei der **Poissonkern** durch die folgende Formel gegeben ist:

$$B \times \partial B \ni (x, y) \mapsto K(x, y) = \frac{1 - |x|^2}{ne_n |x - y|^n}.$$

Dieser ist ebenfalls strikt positiv:

$$\forall (x, y) \in B \times \partial B : \quad K(x, y) > 0.$$

Beweis. Die Harmonizität von

$$B \ni y \mapsto \Phi \left(\left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right| \right) = \Phi \left(|x| \left| -y + \frac{x}{|x|^2} \right| \right)$$

liegt auf der Hand. Die Rechnung

$$\begin{aligned} \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|^2 - |x - y|^2 &= |x|^2|y|^2 - 2\langle x, y \rangle + 1 - |x|^2 + 2\langle x, y \rangle - |y|^2 \\ &= |x|^2(|y|^2 - 1) + 1 - |y|^2 = (1 - |x|^2)(1 - |y|^2) \end{aligned}$$

zeigt:

- $\forall x \in B, \forall y \in \partial B : G(x, y) = 0$, so dass G in der Tat die Greensche Funktion ist (Eindeutigkeit: Folgerung 2.8).
- $\forall (x, y) \in B \times B \setminus \{x = y\} : G(x, y) > 0$.
- Die Symmetrie von G .

Laut Bemerkung 3.6 gilt die Darstellungsformel mit ($x \in B, y \in \partial B$):

$$\begin{aligned} K(x, y) &= \left(-\frac{\partial}{\partial \nu_y} \right) G(x, y) = -\sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial y_i} G(x, y) \\ &= -\sum_{i=1}^n y_i \left(-\frac{1}{ne_n} \frac{(y_i - x_i)}{|x - y|^n} + \frac{1}{ne_n} \frac{\left(|x|y_i - \frac{x_i}{|x|} \right) |x|}{\left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|^n} \right) \\ &\quad \text{weil } \forall y \in \partial B : |x - y| = \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right| \\ &= \frac{1}{ne_n |x - y|^n} \left(\sum_{i=1}^n y_i (y_i - x_i - |x|^2 y_i + x_i) \right) \\ &= \frac{1}{ne_n |x - y|^n} \underbrace{|y|^2}_{=1} (1 - |x|^2) = \frac{1 - |x|^2}{ne_n |x - y|^n}. \end{aligned}$$

Der Kürze wegen haben wir nur den Fall $x \neq 0$ dargestellt. Der Fall $x = 0$ ist analog und einfacher. \square

Die Darstellungsformel in diesem Satz legt die folgende Strategie nahe, um die Existenz von Lösungen zu zeigen: Gegeben seien $f \in C^0(\overline{B}), \varphi \in C^0(\partial B)$, wir definieren u gemäß der Darstellungsformel. Aber:

- Nur unter stärkeren Voraussetzungen an f, φ wird man auch $u \in C^2(\overline{B})$ zeigen können.
- Selbst für $f \in C^1(\overline{B})$ ist die Behandlung des Volumenintegrals sehr aufwändig!

Es fehlt noch ein *Existenzsatz* für eine Lösung $u \in C^2(\overline{B})$! Sobald man einen solchen Existenzsatz hat, hat die Lösung $u \in C^2(\overline{B})$ die Darstellung (3.3).

Wir beginnen mit einem speziellen und vergleichsweise einfach zu beweisenden Existenzsatz. Für Allgemeineres siehe § 4 und § 6.

3.9 Satz (Existenzsatz). Sei $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, wir setzen für $x \in \overline{B}$:

$$u(x) := \begin{cases} \varphi(x) & x \in \partial B, \\ \int_{\partial B} K(x, y) \varphi(y) dS(y) & x \in B; \end{cases}$$

dabei ist K der Poissonkern aus Satz 3.8. Dann ist $u \in C^\infty(B) \cap C^0(\overline{B})$ die eindeutig bestimmte Lösung des Dirichletproblems

$$-\Delta u(x) = 0 \quad \text{für } x \in B, \quad u(x) = \varphi(x) \quad \text{für } x \in \partial B.$$

Beweis. Zur Eindeutigkeit: siehe Folgerung 2.8. Zur inneren Glattheit:

$$B \times \partial B \ni (x, y) \mapsto K(x, y) \varphi(y) = \frac{1 - |x|^2}{n e_n |x - y|^n} \varphi(y)$$

ist bezüglich x beliebig oft differenzierbar, und alle x -Ableitungen sind stetig in $B \times \partial B$. Indem man $B := \bigcup_k \overline{B_{1-\frac{1}{k}}(0)}$ ausschöpft, zeigt die Theorie parameterabhängiger Riemann-Integrale $u \in C^\infty(B)$ und die Vertauschbarkeit von Ableitungen und Integral. Schließlich ist der Poissonkern wegen

$$\begin{aligned} \Delta_x K(x, y) &= \Delta_x \sum_{i=1}^n (-y_i \frac{\partial}{\partial y_i} G(x, y)) \\ &= - \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \Delta_x G(x, y) = 0 \end{aligned}$$

auch harmonisch, denn $\Delta_x G(x, y) = \Delta_x G(y, x) = 0$. Es bleibt, die Stetigkeit für beliebiges $x_0 \in \partial B$ zu zeigen. Indem man $u(x) \equiv 1$ in die Darstellungsformel (3.3) in Satz 3.8 einsetzt, erhält man die nützliche Identität:

$$\forall x \in B : \quad \int_{\partial B} K(x, y) dS(y) = 1. \quad (*)$$

Sei nun $x \in \overline{B}$ „nahe“ x_0 , da $\varphi|_{\partial B}$ stetig, reicht es, $x \in B$ zu betrachten. Mittels (*) erhält man:

$$u(x) - u(x_0) = \int_{\partial B} K(x, y) (\varphi(y) - \varphi(x_0)) dS(y),$$

wobei $K(x, y)$ für $x \rightarrow x_0$ und y nahe x_0 explodiert und $\varphi(y) - \varphi(x_0)$ für alle y nahe x_0 klein ist.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, bestimme $\delta > 0$ so, dass $y \in \partial B, |x_0 - y| \leq \delta \Rightarrow |\varphi(y) - \varphi(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Außerdem sei $M := \|\varphi\|_{C^0(\partial B)}$ und wir beschränken uns auf x mit $|x - x_0| \leq \frac{\delta}{2}$. Für $y \in \partial B$ mit $|y - x_0| \geq \delta$ ist dann

$$|y - x| \geq |y - x_0| - |x_0 - x| \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}, \quad |y - x|^{-n} \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^n.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(x_0)| &\leq \int_{\partial B \cap \{y, |y-x_0| \leq \delta\}} K(x, y) |\varphi(y) - \varphi(x_0)| dS(y) \\
&\quad + \int_{\partial B \cap \{y, |y-x_0| \geq \delta\}} K(x, y) |\varphi(y) - \varphi(x_0)| dS(y) \\
&\leq \int_{\partial B} K(x, y) \frac{\varepsilon}{2} dS(y) \\
&\quad + 2M \frac{1}{ne_n} (1 - |x|^2) \int_{\partial B \cap \{y, |y-x_0| \geq \delta\}} |x - y|^{-n} dS(y) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{ne_n} \underbrace{(1 + |x|)}_{\leq 2} \underbrace{(1 - |x|)}_{\leq |x-x_0|} \int_{\partial B} \left(\frac{2}{\delta}\right)^n dS(y) \\
&\quad (*) \text{, benutze } |y - x|^{-n} \leq (2/\delta)^n \text{ auf Grund von } |x - x_0| \leq \delta/2 \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2^{n+2}M}{\delta^n} |x - x_0| \leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

sofern man $|x - x_0| \leq \min\{\delta/2, \frac{\varepsilon \delta^n}{2^{n+3}M}\}$ wählt. \square

Mit Hilfe dieses Existenzsatzes gelingt nun eine substantielle Verschärfung der Charakterisierung harmonischer Funktionen mittels der schwachen Mittelwertigkeit, vgl. Definition 2.2.

3.10 Satz. *Sei $u \in C^0(\Omega)$. Genau dann ist u im klassischen Sinne harmonisch, wenn u die schwache Mittelwertigkeit gemäß Definition 2.2 besitzt.*

Beweis. „ \Rightarrow “: Satz 2.1.

„ \Leftarrow “: Im Beweis von Beweis von Satz 2.5 hatten wir festgehalten: Jede stetige Funktion, die eine schwache Mittelwertigkeit gemäß Definition 2.2 besitzt, genügt dem (starken) Maximum-/Minimumprinzip.

Sei $x_0 \in \Omega$ beliebig, $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$. Wir lösen durch $\tilde{u} \in C^\infty(B_R(x_0)) \cap C^0(\partial B_R(x_0))$ gemäß Satz 3.9 (\rightarrow skalieren!) das Dirichlet-Problem

$$-\Delta \tilde{u} = 0 \quad \text{in } B_R(x_0), \quad \tilde{u} = u \quad \text{auf } \partial B_R(x_0).$$

Da $u - \tilde{u}$ gemäß Satz 2.1 und der Voraussetzung eine schwache Mittelwertigkeit besitzt, folgt auf Grund des (schwachen) Maximumprinzips: $u = \tilde{u}$ in $B_R(x_0)$, damit $u \in C^\infty$ und $\Delta u = 0$ nahe x_0 . \square

Auch der folgende Satz hat seine Entsprechung in der Funktionentheorie, den Weierstraßschen Konvergenzsatz:

3.11 Satz. *Seien $u_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch, die Folge konvergiere lokal gleichmäßig gegen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist auch u harmonisch.*

Beweis. Satz 3.10. □

Eine weitere Folgerung aus Satz 3.10 ist das Schwarzsche Spiegelungsprinzip, das in den Übungen behandelt wird.

Und bezüglich monotoner Konvergenz haben wir:

3.12 Satz (Harnackscher Konvergenzsatz). *Die Folge $u_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonischer Funktionen sei punktweise monoton wachsend:*

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \Omega : \quad u_{k+1}(x) \geq u_k(x)$$

und punktweise beschränkt:

$$\forall x \in \Omega : \quad \sup_k u_k(x) < \infty.$$

Dann konvergiert u_k lokal gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Beweis. Die punktweise Konvergenz der u_k gegen ein $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ liegt auf der Hand. Wir zeigen lokal gleichmäßige Konvergenz. Sei $x_0 \in \Omega$ beliebig, $R > 0$ so, dass $\overline{B_{4R}(x_0)} \subset \Omega$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir bestimmen k_0 , so dass für alle $k \geq \ell \geq k_0$ gilt: $0 \leq u_k(x_0) - u_\ell(x_0) \leq \frac{\varepsilon}{3^n}$ und der Beweis der Harnackschen Ungleichung Satz 2.10 zeigt:

$$\sup_{B_R(x_0)} \underbrace{(u_k - u_\ell)}_{\geq 0} \leq 3^n \inf_{B_R(x_0)} (u_k - u_\ell) \leq 3^n (u_k(x_0) - u_\ell(x_0)) \leq 3^n \frac{\varepsilon}{3^n} = \varepsilon.$$

Man beachte dabei, dass die Monotonie $(u_k - u_\ell)(x) \geq 0$ zeigt. Diese Abschätzung zeigt die gleichmäßige Konvergenz in $B_R(x_0)$. Dass u harmonisch ist, folgt nun aus Satz 3.11. □

Wir fahren fort, Sätze parallel zur Funktionentheorie zu beweisen. Das nächste Resultat hat Beziehungen zu den Cauchyschen Abschätzungen:

3.13 Satz (Innere Gradientenabschätzungen für harmonische Funktionen). *Sei $\Omega' \subset \subset \Omega$, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sei harmonisch. Dann gilt*

$$\sup_{\Omega'} |\nabla u| \leq \frac{n}{\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)} \sup_{\Omega} |u|.$$

Beweis. O.B.d.A.: $\sup_{\Omega} |u| < \infty$. Sei $x \in \Omega'$ beliebig, $R < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, so dass $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$.

$$\begin{aligned} \nabla u(x) &\stackrel{2.1}{=} \nabla \frac{1}{e_n R^n} \int_{|y| < R} u(x+y) dy \stackrel{\text{parameterabh. Int}}{=} \frac{1}{e_n R^n} \int_{|y| < R} \nabla_x u(x+y) dy \\ &= \frac{1}{e_n R^n} \int_{|y| < R} \nabla_y u(x+y) dy \stackrel{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{e_n R^n} \int_{|y|=R} u(x+y) \nu(y) dS(y) \\ \Rightarrow \quad |\nabla u(x)| &\leq \frac{n}{R} \sup_{\Omega} |u|. \end{aligned}$$

Mit $R \nearrow \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ folgt die Behauptung. □

Durch Iteration lassen sich natürlich Ableitungen beliebiger Ordnung lokal durch $\sup_{\Omega} |u|$ abschätzen.

Wie in der Funktionentheorie erhält man aus Satz 3.13 als unmittelbare Folgerung:

3.14 Satz (Liouville). *Sei $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch und beschränkt. Dann ist u konstant.*

Beweis. Für $\overline{\Omega'}$ kompakt, $\Omega = \mathbb{R}^n$ zeigt Satz 3.13: $\nabla u|_{\Omega'} \equiv 0$ □

Eine weitere Folgerung aus Satz 3.13 ist das Pendant zum Satz von Montel:

3.15 Satz. *Die Folge harmonischer Funktionen $u_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sei lokal gleichmäßig beschränkt. Dann existiert eine Teilfolge k_ℓ , so dass u_{k_ℓ} lokal gleichmäßig gegen ein harmonisches $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert.*

Beweis. Satz 3.13 liefert die lokal gleichgradige gleichmäßige Stetigkeit, der Satz von Arzela-Ascoli eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge. Beachte Satz 3.11. □

4 Die Perronsche Methode subharmonischer Funktionen

In diesem Abschnitt werden wir zum ersten Mal ein relativ allgemeines Dirichlet-Problem erfolgreich behandeln können.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ im Folgenden stets ein beschränktes Gebiet, sofern nicht ausdrücklich etwas Anderes vorausgesetzt wird. Wir wollen das Dirichlet-Problem

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (4.1)$$

für vorgegebenes $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ behandeln. Die Lösung wird unter vergleichsweise moderaten Bedingungen an Ω gelingen und einen enormen Fortschritt gegenüber unserem ersten Existenzsatz 3.9 bedeuten. Allerdings wird die Methode genau auf diesem Resultat und der intensiven Verwendung des Maximum-Prinzips aufbauen. Basierend auf Letzterem haben wir zunächst den Begriff der sub- / superharmonischen Funktionen zu verallgemeinern (in Richtung hin auf Distributionslösungen / Viskositätslösungen):

4.1 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine stetige Funktion $u \in C^0(\Omega)$ heißt **subharmonisch** bzw. **superharmonisch**, falls für *jede* Kugel $B_r(x_0) \subset\subset \Omega$ und jede harmonische Funktion $h \in C^2(B_r(x_0)) \cap C^0(\overline{B_r(x_0)})$ mit $h|_{\partial B_r(x_0)} \geq u|_{\partial B_r(x_0)}$ bzw. $h|_{\partial B_r(x_0)} \leq u|_{\partial B_r(x_0)}$ gilt:

$$\forall x \in B_r(x_0) : \quad u(x) \leq h(x);$$

$$\text{bzw. } \forall x \in B_r(x_0) : \quad u(x) \geq h(x).$$

Bemerkung.

- u subharmonisch $\Leftrightarrow -u$ superharmonisch.
- Die Definition kann äquivalent auch mit „ $h|_{\partial B} = u|_{\partial B}$ “ statt mit den Ungleichungen formuliert werden: Dieses kann man mit Hilfe des klassischen schwachen Maximum-Prinzips für harmonische Funktionen zeigen.

Für den Erfolg der Perronschen Methode wird folgendes Verfahren grundlegend sein:

4.2 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^0(\Omega)$ sei subharmonisch, $B_r(x_0) \subset\subset \Omega$. Sei $\bar{u} \in C^2(B_r(x_0)) \cap C^0(\overline{B_r(x_0)})$ die gemäß Satz 3.9 existierende Lösung von $-\Delta \bar{u} = 0$ in $B_r(x_0)$, $\bar{u} = u$ auf $\partial B_r(x_0)$. Dann heißt:

$$U(x) = \begin{cases} \bar{u}(x), & x \in \overline{B_r(x_0)}, \\ u(x), & x \in \Omega \setminus \overline{B_r(x_0)}, \end{cases}$$

harmonische Liftung von u bzgl. $B_r(x_0)$.

Wir stellen einige Eigenschaften subharmonischer Funktionen und der harmonischen Liftung zusammen. Für superharmonische Funktionen betrachte $-u$.

4.3 Satz (Starkes Maximumprinzip). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $u \in C^0(\Omega)$ sei subharmonisch und nehme sein Maximum in einem $x_0 \in \Omega$ an, d.h. $\forall x \in \Omega : u(x) \leq u(x_0)$. Dann ist u konstant.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass u in einer Umgebung von x_0 konstant ist, vgl. auch den Beweis von Satz 2.5.

Sei $M = \sup_{\Omega} u = u(x_0)$, $B_{r_0}(x_0) \subset\subset \Omega$, $0 < r \leq r_0$, sei $h \in C^2(B_r(x_0)) \cap C^0(\overline{B_r(x_0)})$ die gemäß Satz 3.9 existierende Lösung von

$$-\Delta h = 0 \quad \text{in } B_r(x_0), \quad h = u \quad \text{auf } \partial B_r(x_0).$$

Dann gilt einerseits auf Grund der Subharmonizität von u : $u \leq h$ in $B_r(x_0)$, andererseits in $h|_{\partial B_r(x_0)} = u|_{\partial B_r(x_0)} \leq M$ und damit nach dem schwachen Maximum-Prinzip 2.7 $h \leq M$ in $B_r(x_0)$. Es folgt $M = u(x_0) \leq h(x_0) \leq M$, h nimmt sein Maximum in $x_0 \in B_r(x_0)$ an. Das starke Maximumprinzip für harmonische Funktionen (Satz 2.5) zeigt:

$$h(x) \equiv M \text{ in } \overline{B_r(x_0)} \quad \Rightarrow \quad u(x) \equiv M \text{ auf } \partial B_r(x_0).$$

Da $r \in (0, r_0]$ beliebig ist, folgt $u \equiv M$ in $B_{r_0}(x_0)$. □

4.4 Hilfssatz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, sei $u \in C^0(\overline{\Omega})$ subharmonisch, $v \in C^0(\overline{\Omega})$ superharmonisch, es sei $u \leq v$ auf $\partial\Omega$. Dann gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{entweder} & \forall x \in \Omega : \quad u(x) < v(x), \\ \text{oder} & \forall x \in \Omega : \quad u(x) = v(x). \end{array}$$

Beweis. Man bemerke, dass Definition 4.1 mit „ $u|_{\partial B} = h|_{\partial B}$ “ formuliert werden kann. Da u subharmonisch, $-v$ subharmonisch, kann man so direkt folgern: $u - v = u + (-v)$ ist subharmonisch. Das starke Maximum-Prinzip 4.3 zeigt nun direkt die Behauptung. □

Damit gelingt nun der Nachweis der zentralen Eigenschaft harmonischer Liftungen:

4.5 Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^0(\Omega)$ sei subharmonisch, $B_r(x_0) \subset\subset \Omega$, U sei die harmonische Liftung von u bzgl. $B_r(x_0)$. Dann ist U ebenfalls subharmonisch in Ω .

Beweis. Sei $B' \subset\subset \Omega$ irgendeine Kugel, $h \in C^0(\overline{B'}) \cap C^2(B')$ harmonisch mit $h|_{\partial B'} \geq U|_{\partial B'}$. Ist $B' \cap B_r(x_0) = \emptyset$, so ist nichts zu zeigen. Der Fall $B' \subset \overline{B_r(x_0)}$ (impliziert sogar $B' \subset B_r(x_0)$) ist ebenfalls klar. Sei also im Folgenden $B' \cap B_r(x_0) \neq \emptyset$ sowie $B' \setminus \overline{B_r(x_0)} \neq \emptyset$.

Zunächst zeigen wir, dass

$$h \geq u \quad \text{in } B' \quad (*)$$

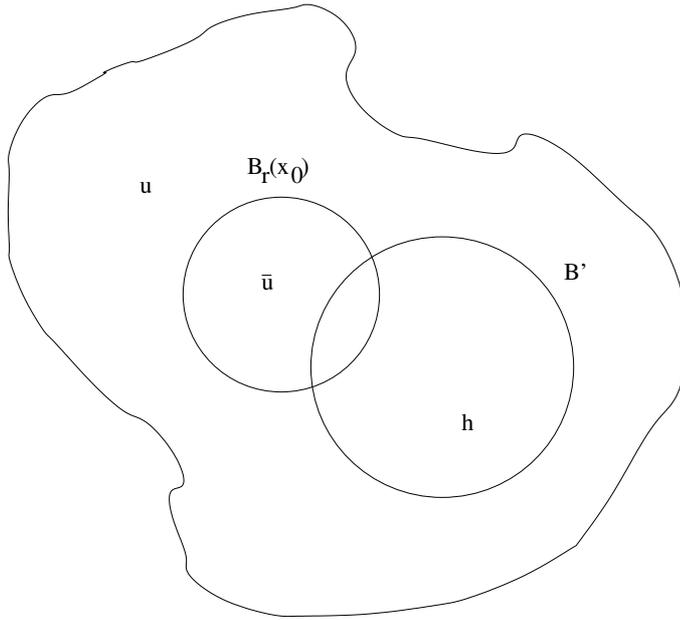


Abbildung 4: Harmonische Liftungen subharmonischer Funktionen sind subharmonisch: Satz 4.5.

gilt: Auf $\partial B' \cap B_r(x_0)$ haben wir $h \geq U = \bar{u} \underset{u \text{ subh.}}{\geq} u$, auf $\partial B' \setminus B_r(x_0)$: $h \geq U = u$.

Also ist $h \geq u$ auf $\partial B'$. Da u subharmonisch ist, folgt gemäß Definition 4.1: $u \leq h$ in B' . Damit ist (*) gezeigt und folglich $h \geq U = u$ in $B' \setminus B_r(x_0)$.

Es bleibt $\Omega' = B_r(x_0) \cap B'$ zu betrachten; hier soll das schwache Maximum-Prinzip für harmonische Funktionen Anwendung finden. Auf $\partial \Omega' \cap \overline{B_r(x_0)}$ haben wir $h \geq U = \bar{u}$; auf $\partial \Omega' \cap B'$: $h \underset{(*)}{\geq} u \underset{\partial \Omega' \cap B' \subset \partial B_r(x_0)}{=} \bar{u}$.

Also ist $h \geq \bar{u}$ auf $\partial \Omega'$. Da beide Funktionen harmonisch sind, folgt $h \geq \bar{u}$ in Ω' . Damit haben wir insgesamt: $h \geq U$ in B' . Der Beweis wird in Abbildung 4 illustriert. \square

Schließlich liegt auf Grund unserer allgemeinen Definition die folgende bemerkenswerte Eigenschaft auf der Hand:

4.6 Hilfssatz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u_1, \dots, u_N \in C^0(\Omega)$ seien subharmonisch. Dann ist

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, u(x) := \max\{u_1(x), \dots, u_N(x)\}$$

ebenfalls subharmonisch in Ω .

Wir kommen nun zur Behandlung des Dirichlet-Problems (4.1). Es sei an die Generalvoraussetzung erinnert: „ Ω ist ein beschränktes Gebiet“ (sofern nicht ausdrücklich anders vereinbart). Vorbereitend definieren wir:

4.7 Definition. Sei $\varphi \in C^0(\partial \Omega)$. Eine Funktion $u \in C^0(\overline{\Omega})$ heißt **Unterfunktion** (bzw. **Oberfunktion**) bezüglich φ , falls $u|_{\partial \Omega} \leq \varphi|_{\partial \Omega}$ und u subharmonisch in Ω ist (bzw. $u|_{\partial \Omega} \geq \varphi|_{\partial \Omega}$, u superharmonisch in Ω).

Es bezeichne bei gegebenem $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$

$$S_\varphi = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : v \text{ ist Unterfunktion bzgl. } \varphi\}.$$

Sicher ist $\min_{\partial\Omega} \varphi \in S_\varphi$, also $S_\varphi \neq \emptyset$. Die konstante harmonische Funktion $\max_{\partial\Omega} \varphi$ ist gemäß Hilfssatz 4.4 eine obere Schranke:

$$\forall v \in S_\varphi : \quad \forall x \in \bar{\Omega} : \quad v(x) \leq \max_{\partial\Omega} \varphi.$$

Diese Beobachtung, zusammen mit Hilfssatz 4.6, legt die folgende Konstruktion nahe:

4.8 Satz (Perronsche Lösung). *Die punktweise gebildete Funktion*

$$u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x) := \sup_{v \in S_\varphi} v(x)$$

ist harmonisch in Ω .

Beweis. Gemäß der auf Hilfssatz 4.4 beruhenden Vorbemerkung ist $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ wohldefiniert und

$$\forall x \in \bar{\Omega} : \quad \min_{\partial\Omega} \varphi \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} \varphi.$$

Sei $x_0 \in \Omega$ beliebig, wir betrachten eine Folge $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset S_\varphi$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k(x_0) = u(x_0)$. Indem man ggfs. zu $\max\{v_k, \min_{\partial\Omega} \varphi\}$ übergeht, kann man gemäß Hilfssatz 4.6 erreichen:

$$\forall k, \forall x : \quad \min_{\partial\Omega} \varphi \leq v_k(x) \leq \max_{\partial\Omega} \varphi.$$

Sei $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$, es seien V_k die harmonischen Liftungen von v_k bzgl. $B_R(x_0)$. Gemäß Satz 4.5 ist $V_k \in S_\varphi$, also offensichtlich für alle $x \in \bar{\Omega}$:

$$\min_{\partial\Omega} \varphi \leq v_k(x) \leq V_k(x) \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} \varphi.$$

Gemäß dem Konvergenzsatz 3.15 können wir nach Auswahl einer Teilfolge annehmen, dass V_k in $B_R(x_0)$ lokal gleichmäßig gegen ein harmonisches $V : B_R(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Offenbar ist $V \leq u$ in $B_R(x_0)$, $V(x_0) = u(x_0)$, wir wollen zeigen: $V = u$ in $B_R(x_0)$. Wegen der Beliebigkeit von x_0 ist damit dann der Satz bewiesen.

Annahme: $\exists x_1 \in B_R(x_0) : \quad V(x_1) < u(x_1)$.

Also existiert ein $w \in S_\varphi : \quad w(x_1) > V(x_1)$.

Sei $w_k(x) = \max\{v_k(x), w(x)\} \in S_\varphi$ gemäß Hilfssatz 4.6, W_k seien die harmonischen Liftungen, gemäß Satz 4.5 ist $W_k \in S_\varphi$. Wiederum nach Auswahl einer Teilfolge kann man gemäß dem Konvergenzsatz 3.15 erreichen:

$W_k \rightarrow W$ lokal gleichmäßig in $B_R(x_0)$, $W : B_R(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch.

Offenbar ist in $\bar{\Omega}$: $V_k \leq W_k \leq u$ also:

$$\forall x \in B_r(x_0) : \quad V(x) \leq W(x) \leq u(x).$$

Außerdem gilt:

$$V(x_0) = W(x_0) = u(x_0),$$

sowie

$$V(x_1) < w(x_1) \leq W_k(x_1) \leq u(x_1) \quad \Rightarrow \quad V(x_1) < W(x_1).$$

Nun sind V, W zwei harmonische Funktionen in $B_R(x_0)$, $V \leq W$ in $B_R(x_0)$, $V(x_0) = W(x_0)$. Das starke Maximum-Prinzip zeigt $V(x) \equiv W(x)$ in $B_R(x_0)$ im Widerspruch zu $V(x_1) < W(x_1)$.

Also ist obige Annahme absurd und es gilt: u und die harmonische Funktion V stimmen in $B_R(x_0)$ überein. \square

Bemerkung. Die für $\Omega = B$ in Satz 3.9 mittels des Poissonkerns konstruierte Lösung u' stimmt mit obigem u überein.

In der Tat hat man auf Grund von Hilfssatz 4.4:

$$\forall v \in S_\varphi : \quad v \leq u' \quad \Rightarrow \quad u \leq u'.$$

Andererseits $u' \in S_\varphi \Rightarrow u' \leq u$. Zusammen folgt: $u = u'$.

Satz 4.8 klärt nur die inneren Eigenschaften von u , am Rande hat man bisher nur $u|_{\partial\Omega} \leq \varphi$. In der Tat kann man stetige Annahme der Randwerte nicht in jedem beliebigen Gebiet erwarten. Besonders kritisch sind z.B. „innere Randpunkte“ in Raumdimensionen $n \geq 2$.

4.9 Beispiel. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) die Einheitskugel, $1 > \varepsilon > 0$. Wir zeigen, dass

$$u_\varepsilon : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_\varepsilon(x) := \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^{2-n}-1}(1 - |x|^{2-n}), & \varepsilon \leq |x| \leq 1, \\ -1, & |x| \leq \varepsilon, \end{cases}$$

in B subharmonisch sind. Sei $B' \subset\subset B$ eine Kugel, $h \in C^0(\bar{B}') \cap C^2(B')$ in B' harmonisch, $h \geq u_\varepsilon$ auf $\partial B'$. Sicher gilt, indem man ggfs. ein hinreichend kleines Loch um 0 aus B' herausschneidet:

$$h \geq \frac{1}{\varepsilon^{2-n}-1}(1 - |x|^{2-n})$$

in B' : Man vergleiche beide harmonischen Funktionen in $B' \setminus B_\delta(0)$.

Die Ungleichung $h \geq -1$ ist wegen $h|_{\partial B'} \geq u_\varepsilon|_{\partial B'} \geq -1$ aber evident. Insgesamt haben wir $h \geq u_\varepsilon$ in B' .

Betrachten wir nun $\Omega = B \setminus \{0\}$, $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & |x| = 1, \\ -1, & x = 0, \end{cases}$$

ist sicher stetig. Gemäß Obigem sind $u_\varepsilon|_{\bar{\Omega}}$ Unterfunktionen zu φ . Für $\varepsilon \searrow 0$ ist aber punktweise für $x \neq 0$:

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} u_\varepsilon(x) = 0.$$

Das heißt: Das in Satz 4.8 bestimmte u ist

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \in \overline{B} \setminus \{0\}, \\ -1, & x = 0. \end{cases}$$

Die Randdaten φ werden im Randpunkt 0 nicht stetig angenommen.

Mit dieser Methode kann man sogar die Unlösbarkeit dieses Dirichletproblems zeigen: Eine solche Lösung müsste nämlich oberhalb der Perronschen Lösung u liegen!

Ähnlich kann man in \mathbb{R}^2 mit $x \mapsto -\frac{\log|x|}{\log\varepsilon}$ ein Gegenbeispiel finden.

Problematisch sind auch Gebiete, deren Ränder einspringende Ecken enthalten: vgl. Abbildung 5.

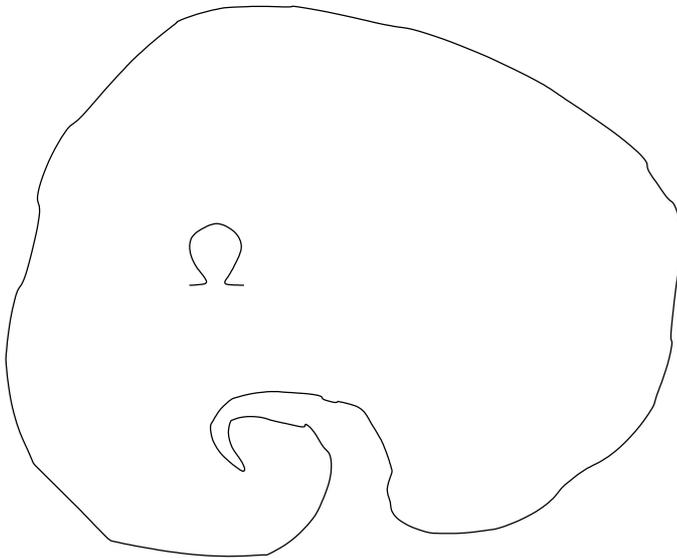


Abbildung 5: Einspringende Ecke.

Stetige Annahme der Randdaten φ lässt sich aber unter recht allgemeinen Bedingungen an $\partial\Omega$ zeigen:

4.10 Definition. (a) Eine stetige Funktion $w \in C^0(\overline{\Omega})$ heißt **Barrierenfunktion** bzgl. des Randpunktes $x_0 \in \partial\Omega$, falls gilt:

- (i) w ist superharmonisch in Ω ,
- (ii) $w(x_0) = 0$,
- (iii) $w > 0$ in $\overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$.

(b) Ein Randpunkt $x_0 \in \partial\Omega$ heißt **regulär** (bzgl. des Laplace-Operators), falls eine Barrierenfunktion bzgl. x_0 existiert.

Für eine große Klasse von Gebieten kann die Regularität aller Randpunkte sehr leicht gezeigt werden:

4.11 Beispiel. Man sagt, dass Ω in $x_0 \in \partial\Omega$ eine **äußere Kugelbedingung** erfüllt, falls es eine Kugel $B_R(x_1)$ gibt mit $\overline{B_R(x_1)} \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}$. In diesem Fall gibt die Grundlösung mit Pol in x_1 eine geeignete Barrierenfunktion:

$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{n-2} (R^{2-n} - |x - x_1|^{2-n}), & n \neq 2, \\ \log |x - x_1| - \log R, & n = 2. \end{cases}$$

Konvexe Gebiete erfüllen sicher in jedem Randpunkt eine äußere Kugelbedingung. Mit etwas Aufwand lässt sich das auch für reguläre Gebiete mit C^2 -Rand zeigen.

Nimmt man den folgenden Satz mit der vorhergehenden Diskussion zusammen, so ergibt sich eine recht weittragende Diskussion des Dirichlet-Problems (4.1).

4.12 Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Es sei u die in Satz 4.8 konstruierte harmonische Funktion. Dann gilt:

Ist $x_0 \in \partial\Omega$ ein regulärer Randpunkt, so gilt

$$\lim_{\Omega \ni x \rightarrow x_0} u(x) = \varphi(x_0).$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig; es bezeichne $M := \max_{\partial\Omega} |\varphi|$. Sei zunächst $\eta > 0$ so gewählt, dass für alle $x \in \partial\Omega$ gilt:

$$|x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zu diesem η sei $k > 0$ so gewählt, dass mit der voraussetzungsgemäß zu x_0 existierenden Barrierenfunktion $w : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$x \in \partial\Omega, |x - x_0| \geq \eta \Rightarrow kw(x) \geq 2M.$$

Für $x \in \partial\Omega$ ist dann

$$\underbrace{\varphi(x_0) - \varepsilon/2 - kw(x)}_{\text{subharm.}} \leq \varphi(x) \leq \underbrace{\varphi(x_0) + \varepsilon/2 + kw(x)}_{\text{superharm.}}$$

Mithin ist $x \mapsto \varphi(x_0) + \varepsilon/2 + kw(x)$ eine Oberfunktion bzgl. φ , $x \mapsto \varphi(x_0) - \varepsilon/2 - kw(x)$ eine Unterfunktion bzgl. φ . Laut Hilfssatz 4.4 ist jede Oberfunktion über jeder Unterfunktion. Mit der Menge S_φ aus Satz 4.8 können wir uns dann bei der Bestimmung von u auf diejenigen $v \in S_\varphi$ beschränken, für die gilt:

$$\forall x \in \overline{\Omega} : \quad S_\varphi \ni \varphi(x_0) - \varepsilon/2 - kw(x) \underbrace{\leq}_{\text{o.E.}} v(x) \leq \varphi(x_0) + \varepsilon/2 + kw(x),$$

$$\Rightarrow \forall x \in \overline{\Omega} : \quad \varphi(x_0) - \varepsilon/2 - kw(x) \leq u(x) \leq \varphi(x_0) + \varepsilon/2 + kw(x).$$

Wählt man nun $\delta > 0$ so, dass $x \in \Omega, |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |kw(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, so folgt für $|x - x_0| \leq \delta : |u(x) - \varphi(x_0)| \leq \varepsilon$. \square

Hinsichtlich klassischer Lösbarkeit des Dirichlet-Problems (4.1) haben wir somit folgendes notwendige und hinreichende Kriterium:

4.13 Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Das Dirichlet-Problem (4.1) besitzt für jedes stetige Randdatum $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ eine Lösung $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ genau dann, wenn alle Randpunkte $x \in \partial\Omega$ regulär sind.

Beweis. „ \Leftarrow “: Satz 4.8 und Satz 4.12.

„ \Rightarrow “: Sei $x_0 \in \partial\Omega$ beliebig, $\varphi(x) = |x - x_0|$. Sei $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ die dazu als existent angenommene Lösung des Dirichlet-Problems. Schwaches und starkes Maximum-Prinzip zeigen: $u|_{\bar{\Omega} \setminus \{x_0\}} > 0$. Somit kann u bzgl. x_0 als Barrierenfunktion dienen, x_0 ist regulärer Randpunkt. \square

4.14 Bemerkung. Bisher konnten wir das Dirichlet-Problem

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = \varphi \text{ auf } \partial\Omega \quad (4.2)$$

in allgemeinen Klassen von Gebieten nur für den Fall $f = 0$ behandeln - und das erforderte schon einigen Aufwand!

Für $f \neq 0$ könnte man unter der Voraussetzung, dass $f \in C^2(\bar{\Omega})$ und sich zu einem $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen lässt, zunächst gemäß Satz 3.2 eine Lösung u_1 der Differentialgleichung $-\Delta u_1 = f$ bestimmen. Anschließend könnte man Satz 4.13 auf das Randdatum $\varphi - u_1|_{\partial\Omega}$ und dazu eine in Ω harmonische Funktion u_2 finden. Mit $u = u_1 + u_2$ hat man dann eine Lösung von (4.2). Dieser Zugang erfordert allerdings erhebliche Voraussetzungen an f bzw. $\partial\Omega$ sowie ggfs. einen Fortsetzungssatz.

Die Diskussion des Falles $f \neq 0$, wenn man solche unrealistisch starken Auflagen an f vermeiden will, erfordert jedoch ganz erheblichen technischen Aufwand. Hier kommt noch erschwerend hinzu, dass $C^0(\bar{\Omega})$ für f und $C^2(\bar{\Omega})$ für u *nicht* die *richtigen* Klassen sind. Hat man z. B. in $\Omega = B$ eine Greensche Funktion und differenziert man in der Darstellungsformel aus Satz 3.8 *formal* unter dem Integral:

$$\int_B \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} G(x, y) f(y) dy,$$

so erhält man Terme $\frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|x - y|^{n+2}}$, d.h. von der Ordnung $|x - y|^{-n}$, die nicht mehr absolut integrierbar sind! Geeignet sind „Hölderklassen“:

$$f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}), \quad \varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}), \quad C^{2,\alpha}\text{-glatter Rand } \partial\Omega$$

$$\Rightarrow \text{Existenz einer Lösung } u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}).$$

Diese Richtung soll hier nicht verfolgt werden, wir geben nur zur Kenntnis, wobei wir die Hölderklassen vermeiden und dementsprechend auf Optimalität verzichten:

4.15 Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein reguläres Gebiet, außerdem sei $\partial\Omega$ überall C^3 -glatt im Sinne von Definition 0.12. Dann existiert zu jedem $f \in C^1(\bar{\Omega})$, $\varphi \in C^3(\bar{\Omega})$ genau eine Lösung $u \in C^2(\bar{\Omega})$ des Dirichlet-Problems (4.2).

Bemerkung. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ regulär, $\partial\Omega \in C^3$, L ein elliptischer Differentialoperator gemäß Voraussetzung 2.11. Gilt darüber hinaus, dass $a_{ij}, b_i, c \in C^1(\overline{\Omega})$, $c \geq 0$, so kann man zeigen:

Für alle $f \in C^1(\overline{\Omega})$ und alle $\varphi \in C^3(\overline{\Omega})$ existiert dann genau eine Lösung $u \in C^2(\overline{\Omega})$ des allgemeinen elliptischen Dirichletproblems:

$$Lu = f \text{ in } \Omega, \quad u = \varphi \text{ auf } \partial\Omega.$$

Anstatt diese klassische Theorie voranzubringen, soll ein Ausblick auf modernere funktionalanalytisch orientierte Lösungsmethoden gegeben werden. Dazu ist die Einführung neuer Funktionenräume (=Hilberträume) unerlässlich.

5 Sobolevräume

Hier soll nur das Allernötigste in aller Kürze und weitgehend ohne Beweise zusammengetragen werden. Eine ausführliche Diskussion erfolgt in der Veranstaltung über „Funktionalanalysis“. Zur Natürlichkeit von Funktionenräumen, die mittels Integralen normiert werden: Bei der Herleitung der Modellgleichungen erhielt man oft zunächst eine integrale Formulierung. Und physikalisch relevante Größen sind oft „Energieintegrale“ wie $\int_{\Omega} u^2 dx$, $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$.

Sollte man nicht die entsprechend normierten *vollständigen* Funktionenräume betrachten?

Ein anderer Gesichtspunkt führt zu demselben Ergebnis: Häufig schon mussten wir den Satz von Gauß verwenden, insbesondere in Kapitel 3. Wir werden nun schwache Ableitungen so einführen, dass mit diesen der Satz von Gauß weiterhin verwendet werden kann.

Stets bezeichne $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte (!) offene Menge.

5.1 Definition. Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Wir sagen, dass $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ **schwache Ableitung** zum Multiindex α ist, falls $\forall \varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega)$ gilt:

$$\int_{\Omega} g(x)\varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x)D^{\alpha}\varphi(x) dx.$$

In diesem Falle schreiben wir $g = D^{\alpha}f$ (im L^1_{loc} -Sinne). Für $m \in \mathbb{N}$ ist

$$W^m(\Omega) := \{f \in L^1_{loc}(\Omega) : \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } |\alpha| \leq m \text{ existiert } D^{\alpha}f \in L^1_{loc}(\Omega)\}$$

der (Vektor-)Raum der m -mal schwach differenzierbaren Funktionen.

Bemerkungen.

- (a) Ist f klassisch differenzierbar, so zeigt die Trivialversion des Gaußschen Integralsatzes (partielle Integration mit Null-Randwerten), dass f auch entsprechend schwach differenzierbar ist.
- (b) Im Fall der Existenz ist die schwache Ableitung eindeutig bestimmt (im L^1 -Sinne, d.h. punktweise f.ü.). Dahinter steckt die L^1_{loc} -Version des Weierstraßschen Approximationssatzes, deren Beweis mehr Aufwand als die klassische C^0 -Version erfordert.

Zur Handhabbarkeit schwacher Ableitungen ebenso wichtig wie die explizite Definition 5.1 ist die folgende Charakterisierung mittels einer Approximationseigenschaft.

5.2 Satz. Seien $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Genau dann ist $g = D^{\alpha}f$ schwache Ableitung, wenn eine Folge $(f_k) \subset C^{\infty}(\Omega)$ existiert mit $f_k \rightarrow f$ in $L^1_{loc}(\Omega)$, $D^{\alpha}f_k \rightarrow g$ in $L^1_{loc}(\Omega)$.

Beweisidee. „ \Rightarrow “: Ganz ähnlich wie beim Weierstraßschen Approximationssatz, man vgl. auch Dichtheit von C_0^{∞} in L^p . Faltung mit Glättungskernen, vorher noch

„Abschmieren“ in immer kleineren Streifen nahe $\partial\Omega$.

„ \Leftarrow “: Da $(f_k) \subset C^\infty$, sind auf Grund der Elementarversion des Gaußschen Satzes die f_k auch schwach differenzierbar. Für alle $\varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega)$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D^\alpha f_k(x) \varphi(x) dx &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f_k(x) D^\alpha \varphi(x) dx, \\ \Rightarrow \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung gilt auf Grund des Gaußschen Satzes und $\text{supp } \varphi \subset\subset \Omega$. Die zweite Gleichung folgt auf Grund der L_{loc}^1 -Konvergenz und entspricht genau der Definition von $g = D^\alpha f$ als schwache Ableitung. \square

Als Folgerung erhält man eine Produktregel auch für schwache Ableitungen; gemäß der Hölderschen Ungleichung muss man aber die Integrierbarkeit des Produktes sicherstellen. Wir geben *eine* mögliche Formulierung:

5.3 Folgerung. Seien $f, g \in W^1(\Omega) \cap C^0(\Omega)$, dann ist $f \cdot g \in W^1(\Omega)$ und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(fg) = \frac{\partial f}{\partial x_j}g + f \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

auch im schwachen Sinne.

Beweisidee. Man konstruiert mit ähnlichen Ideen wie oben skizziert Folgen

$$(f_k), (g_k) \subset C^\infty(\Omega)$$

mit $f_k \rightarrow f$ in $L^1(\Omega')$, $\frac{\partial f_k}{\partial x_j} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}$ in $L^1(\Omega')$, $f_k \rightarrow f$ in $C^0(\overline{\Omega'})$ wobei $\Omega' \subset\subset \Omega$ beliebig; entsprechend für die g_k . Damit bekommen wir

$$f_k g_k \rightarrow fg \text{ in } L_{loc}^1$$

und

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} g_k \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j} g \text{ in } L_{loc}^1, \quad f_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j} \rightarrow f \frac{\partial g}{\partial x_j} \text{ in } L_{loc}^1,$$

und deshalb

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f_k g_k) \underset{\text{klassische Produktregel}}{=} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} g_k + f_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j} g + f \frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

Satz 5.2 zeigt: $fg \in W^1(\Omega)$ und $\frac{\partial f}{\partial x_j} g + f \frac{\partial g}{\partial x_j}$ ist schwache $\frac{\partial}{\partial x_j}$ -Ableitung von fg . \square

Ganz ähnlich zeigt man bei *regulärer* Transformation der *unabhängigen* Veränderlichen:

5.4 Folgerung. Seien $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Gebiete, $\Phi: \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ ein Diffeomorphismus. Sei $f \in W^1(\Omega)$, dann ist $f \circ \Phi \in W^1(\tilde{\Omega})$, und es gilt die Kettenregel:

$$\frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial y_j}(y) = \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(\Phi(y)) \frac{\partial \Phi_\ell}{\partial y_j}(y) \text{ f.ü. in } \tilde{\Omega}.$$

Beweis. Sei (f_k) eine Folge wie in Satz 5.2:
 $f_k \in C^\infty(\Omega)$, $f_k \rightarrow f$ in L^1_{loc} , $\frac{\partial f_k}{\partial x_\ell} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_\ell}$ in L^1_{loc} . Für die f_k gilt natürlich die
klassische Kettenregel: $f_k \circ \Phi \in C^1(\tilde{\Omega})$:

$$\frac{\partial(f_k \circ \Phi)}{\partial y_j} = \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_\ell}(\Phi(y)) \frac{\partial \Phi_\ell}{\partial y_j}(y) \quad \text{in } \tilde{\Omega}.$$

Sei $\tilde{\Omega}' \subset\subset \tilde{\Omega}$ und $\Omega' := \Phi(\tilde{\Omega}') \subset\subset \Omega$.

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}'} |f_k \circ \Phi(y) - f \circ \Phi(y)| dy &\stackrel{\text{Trafo-Formel}}{=} \int_{\Omega'} |f_k(x) - f(x)| \left| \det \left(\frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial x}(x) \right) \right| dx \\ &\leq c_1 \|f_k - f\|_{L^1(\Omega')} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_{\tilde{\Omega}'} \left| \frac{\partial(f_k \circ \Phi)}{\partial y_j}(y) - \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(\Phi(y)) \frac{\partial \Phi_\ell}{\partial y_j}(y) \right| dy \\ &= \int_{\tilde{\Omega}'} \left| \sum_{\ell=1}^n \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_\ell}(\Phi(y)) - \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(\Phi(y)) \right) \frac{\partial \Phi_\ell}{\partial y_j}(y) \right| dy \\ &\stackrel{\text{Trafo-Satz}}{=} \int_{\Omega'} \left| \sum_{\ell=1}^n \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_\ell}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(x) \right) \frac{\partial \Phi_\ell}{\partial y_j}(\Phi^{-1}(x)) \right| \underbrace{\left| \det \left(\frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial x}(x) \right) \right|}_{\leq c_1 \text{ von oben}} dx \\ &\leq c_1 \int_{\Omega'} \sum_{\ell=1}^n \left| \frac{\partial f_k}{\partial x_\ell}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(x) \right| \cdot \underbrace{\left| \frac{\partial \Phi_\ell}{\partial y_j}(\Phi^{-1}(x)) \right|}_{\leq c_2} dx \\ &\leq c_1 c_2 \sum_{\ell=1}^n \left\| \frac{\partial f_k}{\partial x_\ell} - \frac{\partial f}{\partial x_\ell} \right\|_{L^1(\Omega')} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Satz 5.2 (leicht modifiziert (mit C^1 statt C^∞)) zeigt nun: $f \circ \Phi \in W^1(\tilde{\Omega})$, die Kettenregel gilt.

Man beachte: Da die Transformationsformel hier unverzichtbar ist, kann man die Voraussetzungen an die Transformation Φ der unabhängigen Veränderlichen nicht wesentlich abschwächen! \square

Nun zur Transformation der abhängigen Variablen; um hier jeweils Integrabilität sicherzustellen, sind die Voraussetzung noch restriktiver als im vorhergehenden Satz zu formulieren. Auch hier liegt beim Beweis der Approximationsatz 5.2 zu Grunde.

5.5 Satz. Sei $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, mit einem geeigneten $M \geq 0$ gelte $\forall y \in \mathbb{R} : |g'(y)| \leq M$. Dann gilt für jedes $f \in W^1(\Omega)$, dass auch $g \circ f \in W^1(\Omega)$ und

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(g \circ f) = g' \circ f \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Entsprechendes kann man auch bei \mathbb{R}^m -wertigen Abbildungen $f \in W^1(\Omega)$ und $g \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ mit beschränkten Ableitungen zeigen.

Im Beweis sind noch der Satz von Riesz-Fischer, der die Auswahl p.w.f.ü. konvergenter Teilfolgen gestattet, sowie der Lebesguesche Satz von der majorisierten Konvergenz zu benutzen.

Bei der Verallgemeinerung von Satz 5.5 auf höhere Ableitungen ist große *Vorsicht* hinsichtlich der Integrierbarkeit aller auftretenden Terme geboten! Die folgenden Bemerkungen und der folgende Satz gilt *ausschließlich* für schwache Ableitungen erster Ordnung.

Indem man nun die Betragsfunktion durch C^1 -Funktionen $f \mapsto \sqrt{\varepsilon^2 + f^2}$ approximiert, erhält man folgendes bemerkenswerte Resultat über $|f|$, f^+ , f^- , das allerdings *ausschließlich* in W^1 Gültigkeit besitzt. Bei zweiten und höheren Ableitungen treten δ -Distributionen auf. Diese Tatsache ist verantwortlich nicht nur für den großen Unterschied im Ausbaustand der modernen Theorie elliptischer Gleichungen zweiter und höherer Ordnung, sondern auch für unterschiedliche qualitative Phänomene.

5.6 Satz. *Sei $f \in W^1(\Omega)$, dann sind auch $|f|$, f^+ , $f^- = \max\{-f, 0\} \in W^1(\Omega)$, und es gilt (p.w.f.ü.):*

$$\begin{aligned} \nabla f^+(x) &= \begin{cases} \nabla f(x), & \text{falls } f(x) > 0, \\ 0, & \text{sonst;} \end{cases} \\ \nabla f^-(x) &= \begin{cases} -\nabla f(x), & \text{falls } f(x) < 0, \\ 0, & \text{sonst;} \end{cases} \\ \nabla |f|(x) &= \begin{cases} \nabla f(x), & \text{falls } f(x) > 0, \\ -\nabla f(x), & \text{falls } f(x) < 0, \\ 0, & \text{falls } f(x) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ist $\Omega' \subset \Omega$ messbar und $f = \text{const.}$ f.ü. in Ω' , so gilt $\nabla f = 0$ f.ü. in Ω' .

5.7 Satz und Definition. *Sei $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$. Dann ist*

$$W^{m,p}(\Omega) := \{f \in W^m(\Omega); \quad \forall |\alpha| \leq m : D^\alpha f \in L^p(\Omega)\},$$

versehen mit der Norm

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ein separabler Banachraum. $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ liegt dicht in $W^{m,p}(\Omega)$. Ist $\partial\Omega$ glatt, etwa $\partial\Omega \in C^m$, dann ist sogar $C^\infty(\Omega) \cap C^m(\bar{\Omega})$ dicht in $W^{m,p}(\Omega)$.

Hinweise zum Beweis. • Dreiecksungleichung in $L^p(\Omega)$ sowie in $(\mathbb{R}^{\sum_{|\alpha| \leq m} 1}, |\cdot|_p)$.

- Vollständigkeit: Basiert auf der Vollständigkeit der L^p -Räume; L^p -Limites und schwache Differenzierbarkeit vertauschen, vgl. „ \Leftarrow “-Teil im Beweis von Satz 5.2.

- Separabilität: $L^p(\Omega)$ separabel (Weierstraßscher Approximationssatz mit Polynomen, bei $p = 2$ alternativ Fourierreihen), also auch $\left(\prod_{|\alpha| \leq m} L^p(\Omega)\right)$, also auch $W^{m,p}(\Omega)$ als abgeschlossener Teilraum davon.
- Dichtheitsaussagen: Vgl. Satz 5.2. Bei glattem Rand hat man Fortsetzungsoperator $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n) : \partial\Omega$ gerade biegen, fortsetzen, zurücktransformieren. In $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ dann Faltungsprozedur mit Glättungskern.

□

5.8 Definition. Unter $W_0^{m,p}(\Omega)$ verstehen wir den Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in $W^{m,p}(\Omega)$ bezüglich der $W^{m,p}(\Omega)$ -Norm:

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \left\{ f \in W^{m,p}(\Omega); \quad \exists (f_k) \subset C_0^\infty(\Omega) : \|f - f_k\|_{W^{m,p}(\Omega)} \rightarrow 0 \ (k \rightarrow \infty) \right\}.$$

Bemerkung. Ist $\partial\Omega \in C^m$, so kann man mit erheblichen Aufwand (\rightarrow Spurooperatoren) zeigen:

Ist $f \in C^m(\bar{\Omega})$, so gilt

$$f \in W_0^{m,p}(\Omega) \Leftrightarrow \forall |\alpha| \leq m-1, \quad D^\alpha f|_{\partial\Omega} = 0.$$

Mit Hilfe der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung 0.11 kann man $W_0^{m,p}$ allein mit Hilfe der schwachen Ableitungen höchster, d.h. m -ter Ordnung normieren.

5.9 Satz und Definition (Poincaré-Friedrichs-Ungleichung). *Sei $\Omega \subset B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$. Für $f \in W_0^{m,p}$ sei*

$$\|f\|_{W_0^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dann existiert eine Konstante $C = C(n, m, R, p) > 0$ derart, dass

$$\forall f \in W_0^{m,p}(\Omega) : \quad \|f\|_{W_0^{m,p}(\Omega)} \leq \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq C \|f\|_{W_0^{m,p}(\Omega)}.$$

Beweis. Nur die zweite Ungleichung ist zu beweisen. Mittels etwas mühsamer, aber einfacher Induktion und der Ungleichung in \mathbb{R}^k

$$|x|_2 \leq C(k, p) |x|_p$$

findet man die Behauptung für $f \in C_0^\infty(\Omega)$ direkt aus Satz 0.11. Sei nun $f \in W_0^{m,p}(\Omega)$, definitionsgemäß existieren $f_k \in C_0^\infty$:

$$\forall |\alpha| \leq m : \quad D^\alpha f_k \rightarrow D^\alpha f \text{ in } L^p(\Omega).$$

Nach dem ersten Argument haben wir für alle k mit einer festen Konstante $C = C(n, m, R, p)$:

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f_k\|_{L^p}^p \leq C^p \cdot \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha f_k\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Grenzübergang für $k \rightarrow \infty$ zeigt die Behauptung.

□

5.10 Bemerkung. In $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$ bzw. $H_0^m(\Omega) := W_0^{m,2}(\Omega)$ werden die entsprechenden Normen durch Skalarprodukte gegeben.

$$\langle f, g \rangle_{H^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha f, D^\alpha g \rangle_{L^2(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha f(x) D^\alpha g(x) dx$$

bzw.

$$\langle f, g \rangle_{H_0^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha|=m} \langle D^\alpha f, D^\alpha g \rangle_{L^2(\Omega)} := \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} D^\alpha f(x) D^\alpha g(x) dx.$$

Man erhält so separable Hilberträume.

Abschließend halten wir noch Einbettungssätze fest:

Hat man L^p -Integrierbarkeit der (ersten) schwachen Ableitungen, so verbessert diese Information die Qualität der Funktion selbst.

So, wie der folgende Satz formuliert ist, ist es wichtig, dass Ω beschränkt ist.

5.11 Satz (Sobolevscher Einbettungssatz). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit $\partial\Omega \in C^1$. Sei $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$.*

Ist $\frac{n}{p} > m$, so hat man für alle $q \in \left[1, \frac{np}{n-mp}\right]$:

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall f \in W^{m,p}(\Omega) : \|f\|_{L^q(\Omega)} \leq C \cdot \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

mit einer Konstanten $C = C(n, m, p, q, \Omega)$.

Ist $\frac{n}{p} = m$, so hat man für alle $q \in [1, \infty)$:

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall f \in W^{m,p}(\Omega) : \|f\|_{L^q(\Omega)} \leq C \cdot \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Ist $\frac{n}{p} < m$, so gilt sogar (bei geeigneter Auswahl der L^p -Repräsentanten bzw. nach Abänderung auf jeweils geeigneten Nullmengen):

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega}), \quad \forall f \in W^{m,p}(\Omega) : \|f\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq C \cdot \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

mit $C = C(n, m, \Omega, p)$.

In $W_0^{m,p}(\Omega)$ gelten die entsprechenden Aussagen ohne Glattheitsanforderungen an $\partial\Omega$.

6 Hilbertraummethoden

Unter Verwendung der im vorhergehenden Abschnitt bereit gestellten Sobolevräume soll nun demonstriert werden, mit welcher eleganten Methoden es gelingt, die Existenz *schwacher* Lösungen zu zeigen. Der technisch unangenehmere Teil (den wir hier nur ansatzweise darstellen) betrifft die „Regularitätstheorie“ schwacher Lösungen, unter welchen Zusatzbedingungen diese „klassische“ Lösungen im gewohnten Sinne sind.

Im Folgenden bezeichne stets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Für geeignete Daten $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ legen wir zunächst folgendes Dirichletproblem zu Grunde.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.1)$$

6.1 Definition. Seien $f \in L^2(\Omega)$, $\varphi \in H^1(\Omega)$. Dann heißt $u \in H^1(\Omega)$ eine **schwache Lösung** des Dirichletproblems (6.1), falls für alle Testfunktionen $\psi \in H_0^1(\Omega)$ gilt:

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle dx = \int_{\Omega} f \cdot \psi dx, \quad u - \varphi \in H_0^1. \quad (6.2)$$

Bemerkungen.

- (a) Ist Ω ein reguläres Gebiet und $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$, dann sind auf Grund des Gaußschen Satzes und Bemerkung 5.8 die Formulierungen (6.1) und (6.2) äquivalent. Ohne die Zusatzannahme an u kann man allgemein nur folgern:

$$u \text{ klassische Lösung} \quad \Rightarrow \quad u \text{ schwache Lösung.}$$

- (b) Wegen der Dichtheit von C_0^∞ in $W_0^{1,2}(\Omega)$ (def.-gem.!) und der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung 5.9 kann man gleichwertig die Gültigkeit von (6.2) für alle Testfunktionen $\psi \in C_0^\infty$ fordern.

Die Klasse schwacher Lösungen ist nicht so groß geworden, als dass Eindeutigkeit nicht weiterhin auf der Hand läge.

6.2 Satz. Seien $f \in L^2(\Omega)$, $\varphi \in H^1(\Omega)$ und $u, v \in H^1(\Omega)$ schwache Lösungen von (6.1). Dann gilt $u = v$ (in $W^{1,2}$, insbesondere *p.w.f.ü.*).

Man vgl. auch Beispiel 0.10 - Faradayscher Käfig.

Beweis. Sei $w = u - v$. Zunächst liefern die schwachen Randbedingungen $u - \varphi \in H_0^1$, $v - \varphi \in H_0^1$,

$$w = (u - \varphi) - (v - \varphi) \in H_0^1,$$

und w ist zulässige Testfunktion in (6.2):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (f - f) \cdot w dx = \int_{\Omega} \langle \nabla u - \nabla v, \nabla w \rangle dx = \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \|w\|_{H_0^1}^2. \end{aligned}$$

Gemäß Satz 5.9 ist $\|\cdot\|_{H_0^1}$ eine zu $\|\cdot\|_{H^1}$ äquivalente Norm auf $H_0^1(\Omega)$ (\rightarrow Poincaré-Friedrichs-Ungleichung). Insbesondere: $w = 0$ in $H_0^1(\Omega)$. \square

Wir stellen nun einige sehr elegante und geometrisch motivierte Lösungsverfahren für schwache Lösungen von (6.1) dar.

Dirichletsches Prinzip

Hier betrachten wir die homogene Differentialgleichung, d.h. $f = 0$ in (6.1). Gegeben sei $\varphi \in H^1(\Omega)$, gesucht ist eine (schwach) harmonische Funktion $u \in H^1(\Omega)$ mit Randdaten φ , d.h. eine Lösung von

$$\forall \psi \in H_0^1(\Omega) : \quad \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle dx = 0, \quad u - \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (6.3)$$

Idee: Suche u im affinen Raum $\varphi + H_0^1(\Omega)$. Minimiere dazu den Abstand zum Ursprung, Abstandsbegriff $\|u\|_{H_0^1}^2 = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx$ *Dirichlet-Integral*.

6.3 Satz. *Sei $\varphi \in H^1(\Omega)$, dann existiert genau eine schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ des Dirichletproblems (6.3).*

Beweis mittels des Dirichletschen Prinzips. Sei

$$\mathcal{K} = \{v \in H^1(\Omega) : v - \varphi \in H_0^1(\Omega)\} = \varphi + H_0^1(\Omega),$$

diese Menge ist sicher konvex und abgeschlossen $\subset H^1(\Omega)$.

Auf \mathcal{K} soll das „Abstands“-Funktional

$$\mathcal{F} : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \mathcal{F}(v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx$$

minimiert werden. Es sei

$$\alpha := \inf \{\mathcal{F}(v) : v \in \mathcal{K}\} \geq 0, \quad (6.4)$$

und $(v_k) \subset \mathcal{K}$ eine Minimalfolge:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(v_k) = \alpha.$$

Ohne Weiteres kann man Beschränktheit der H_0^1 -Normen und durch Anwendung der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung 5.9 auf $v_k - \varphi$ die Beschränktheit der H^1 -Normen zeigen. Mit Hilfe der Funktionalanalysis könnte man daraus eine „schwach konvergente“ Teilfolge konstruieren. Das wäre zwar genug, aber in unserer speziellen Situation gelingt mittels eines einfachen Tricks (Parallelogrammgleichung in Hilberträumen) direkt der Nachweis starker Konvergenz.

Für alle k, ℓ gilt auf Grund der Konvexität von \mathcal{K} :

$$\frac{1}{2}(v_k + v_\ell) \in \mathcal{K} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}\mathcal{F}(v_k + v_\ell) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2}(v_k + v_\ell)\right) \geq \alpha.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben, bestimme k_0 so, dass für $k, \ell \geq k_0$ gilt:

$$\mathcal{F}(v_k) \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{4}, \quad \mathcal{F}(v_\ell) \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Für $k, \ell \geq k_0$ gilt auf Grund einer „Parallelogrammidentität“:

$$\begin{aligned}
\|v_k - v_\ell\|_{H_0^1}^2 &= \int_{\Omega} |\nabla v_k - \nabla v_\ell|^2 dx \\
&= 2 \int_{\Omega} |\nabla v_k|^2 dx + 2 \int_{\Omega} |\nabla v_\ell|^2 dx - \int_{\Omega} |\nabla v_k + \nabla v_\ell|^2 dx \\
&= 2\mathcal{F}(v_k) + 2\mathcal{F}(v_\ell) - \mathcal{F}(v_k + v_\ell) \\
&\leq 2\alpha + \frac{\varepsilon}{2} + 2\alpha + \frac{\varepsilon}{2} - 4\alpha = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $v_k - v_\ell \in H_0^1(\Omega)$, zeigt die Poincaré-Friedrichs-Ungleichung 5.9, dass eine Konstante $C = C(n, \text{diam } \Omega) > 0$ existiert, so dass stets

$$\|v_k - v_\ell\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C^2 \cdot \varepsilon,$$

(v_k) ist eine Cauchy-Folge im Hilbertraum $H^1(\Omega)$.

Also existiert $u \in H^1(\Omega)$ mit $\|v_k - u\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Deshalb und da \mathcal{K} in H^1 abgeschlossen ist, haben wir:

$$u \in \mathcal{K}, \quad \mathcal{F}(u) = \alpha. \quad (6.5)$$

Wir haben in der Tat ein optimales Element für das Variationsproblem (6.4) gefunden. Zunächst haben wir $u \in \mathcal{K}$, also $u - \varphi \in H_0^1(\Omega)$, die Randwerte werden im schwachen Sinne angenommen.

Wir leiten aus der Minimaleigenschaft (6.5) noch die „Euler-Lagrange-Gleichung“ und damit die schwache Formulierung (6.3) des Dirichletproblems für u her.

Seien $\psi \in H_0^1(\Omega)$, $t \in \mathbb{R}$ beliebig, dann ist $u + t\psi \in \mathcal{K}$

$$\begin{aligned}
\alpha &\leq \mathcal{F}(u + t\psi) = \underbrace{\mathcal{F}(u)}_{\alpha} + 2t \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle dx + t^2 \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx \\
0 &\leq 2t \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle dx + t^2 \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx.
\end{aligned}$$

Dividiert man zunächst durch $t > 0$ und lässt $t \searrow 0$, so folgt

$$0 \leq \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle dx;$$

dividiert man dann durch $t < 0$ und lässt $t \nearrow 0$, so erhält man auch:

$$0 \geq \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle dx.$$

Insgesamt haben wir für beliebiges $\psi \in H_0^1(\Omega)$:

$$0 = \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle dx.$$

Die Eindeutigkeit der schwachen Lösung folgt aus Satz 6.2. □

Die Diskussion der Randregularität schwacher Lösungen unter möglichst schwachen Bedingungen ist aufwändig und etwa der Perronschen Lösungskonstruktion vergleichbar. Sie soll hier nicht aufgeführt werden. Hinsichtlich innerer Regularität aber kann man mit moderatem Aufwand zeigen:

6.4 Satz (Weylsches Lemma). *Sei $u \in L^2(\Omega)$, für alle $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ gelte $\int_\Omega u \cdot \Delta\psi dx = 0$. Dann existiert eine harmonische Funktion $u^* \in C^\infty(\Omega)$ derart, dass*

$$u = u^* \quad \text{f.ü. in } \Omega.$$

Beweis. Für noch geeignet zu wählendes $\delta > 0$ bezeichnen wir

$$\Omega_\delta := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\}.$$

Für $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\delta$ sei

$$\chi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1]), \quad \chi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & -\infty < t \leq \frac{\varepsilon}{2}, \\ 0, & t \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Um Testfunktionen mit kompaktem Träger erhalten zu können, definieren wir eine modifizierte Grundlösung zu $-\Delta$:

$$H_\varepsilon(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \chi_\varepsilon(|x|) \log|x|, & n = 2; \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \chi_\varepsilon(|x|) |x|^{2-n}, & n \geq 3. \end{cases}$$

Sei $f \in C_0^\infty(\Omega_\delta)$ beliebig, wir betrachten:

$$\psi(x) := \int_{\mathbb{R}^n} H_\varepsilon(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} H_\varepsilon(y)f(x-y)dy.$$

Auf Grund der Theorie parameterabhängiger (Lebesgue-)Integrale und $\text{supp } H_\varepsilon \subset B_\varepsilon(0)$, $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$, folgt

$$\psi \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon) \subset C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Wörtlich wie im Beweis von Satz 3.2 erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta\psi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} H_\varepsilon(y)\Delta_x f(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} H_\varepsilon(y)\Delta_y f(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_y H_\varepsilon(y)f(x-y)dy - f(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_y H_\varepsilon(x-y)f(y)dy - f(x) \\ &= -f(x) + \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x,y)f(y)dy, \end{aligned}$$

wobei wir

$$K_\varepsilon(x,y) := \Delta_y H_\varepsilon(x-y)$$

gesetzt haben. Wir haben:

$$K_\varepsilon(x, y) = 0 \quad \text{falls} \quad |x - y| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{oder} \quad |x - y| \geq \varepsilon$$

und deshalb $K_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $|D_y^\alpha K_\varepsilon(x, y)| \leq C(\alpha, \varepsilon)$.

Wir betrachten nun beliebiges, aber festes $x_0 \in \Omega$ und fixieren $\delta < \frac{1}{2} \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$; $f \in C_0^\infty(B_\delta(x_0)) \subset C_0^\infty(\Omega_\delta)$ sei beliebig. Außerdem sei ε fixiert, ψ wie oben. Die schwache Formulierung der Laplace-Gleichung liefert, wobei u außerhalb Ω trivial durch 0 fortgesetzt wird:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} u(x) \Delta \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \left(-f(x) + \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x, y) f(y) dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(-u(y) + \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x, y) u(x) dx \right) dy. \end{aligned}$$

Es bezeichne $u_\varepsilon^*(y) := \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x, y) u(x) dx$, dann ist wieder nach der Theorie parameterabhängiger (Lebesgue-) Integrale

$$u_\varepsilon^* \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad u_\varepsilon^*|_{B_\delta(x_0)} \in L^2(B_\delta(x_0)).$$

Voraussetzungsgemäß ist $u|_{B_\delta(x_0)} \in L^2(B_\delta(x_0))$, wir haben für alle $f \in C_0^\infty(B_\delta(x_0))$ gezeigt:

$$0 = \int_{B_\delta(x_0)} f(y) (-u(y) + u_\varepsilon^*(y)) dy$$

Da $C_0^\infty(B_\delta(x_0))$ dicht in $L^2(B_\delta(x_0))$ liegt, folgt

$$-u + u_\varepsilon^* = 0, \quad u = u_\varepsilon^* \quad \text{in} \quad L^2(B_\delta(x_0)),$$

aber $u_\varepsilon^* \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Wir zeigen, dass u_ε^* in $B_\delta(x_0)$ klassisch harmonisch ist. Sei dazu $w \in C_0^\infty(B_\delta(x_0))$ beliebig:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{\text{Vor.}}{=} \int_{B_\delta(x_0)} (\Delta w(x)) u(x) dx \stackrel{u=u_\varepsilon^* \text{ f.ü.}}{=} \int_{B_\delta(x_0)} \underbrace{\Delta w(x)}_{\in C_0^\infty} \underbrace{u_\varepsilon^*(x)}_{\in C^\infty} dx \\ &\stackrel{\text{Gauß-primitiv}}{=} \int_{B_\delta(x_0)} w \Delta u_\varepsilon^*(x) dx. \end{aligned}$$

Wiederholung des Dichtheitsarguments zeigt $\Delta u_\varepsilon^* = 0$ in $B_\delta(x_0)$.

Indem man nun $\Omega = \bigcup \Omega_{\frac{1}{n}}$ ausschöpft und die Kompaktheit der $\overline{\Omega_{\frac{1}{n}}}$ ausnutzt, erhält man zunächst auf $\Omega_{\frac{1}{n}}$ und dann auf Ω die Behauptung. \square

Lösung mit Hilfe des Riesz'schen Darstellungssatzes

Wir rekapitulieren einige einfache Begriffe und Tatsachen aus der Funktionalanalysis. In diesem Unterabschnitt bezeichne \mathcal{H} stets einen reellen Hilbertraum, Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, Norm $\| \cdot \|$.

6.5 Definition. Ein lineares **Funktional** L ist eine lineare Abbildung $\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$. Dieses heißt **beschränkt**, falls ein $C \geq 0$ existiert derart, dass für alle $v \in \mathcal{H}$ gilt:

$$|L(v)| \leq C \cdot \|v\|.$$

Für beschränkte lineare Funktionale $L : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ erklärt man deren Norm durch:

$$\|L\| := \sup_{v \neq 0} \frac{|L(v)|}{\|v\|} \leq C.$$

Stetigkeit und Beschränktheit linearer Funktionale sind äquivalent.

6.6 Satz (Rieszscher Darstellungssatz). *Zu jedem beschränkten linearen Funktional $L : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert genau ein Element $u = u_L \in \mathcal{H}$, so dass:*

$$\forall v \in \mathcal{H} : \quad L(v) = \langle v, u_L \rangle.$$

Dabei gilt:

$$\|L\| = \|u_L\|.$$

Dieser Satz wird relativ direkt aus dem Projektionssatz gefolgert und erlaubt einen verblüffend einfachen Existenzbeweis für das Dirichletproblem (6.1). Dabei nehmen wir $\varphi = 0$ an, was zumindest in der Klasse relativ „guter“ Randdaten φ keine Einschränkung bedeutet. Ist etwa $\varphi \in H^2(\Omega)$ und $v \in H_0^1(\Omega)$ schwache Lösung von

$$-\Delta v = (\Delta \varphi + f) \in L^2(\Omega), \quad v|_{\partial\Omega} = 0,$$

so löst $u = v + \varphi \in H^1(\Omega)$ schwach

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u - \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

6.7 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ besitzt das Dirichletproblem*

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

genau eine schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ im folgenden Sinne:

$$\forall \psi \in H_0^1(\Omega) : \quad \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot \psi(x) dx, \quad u \in H_0^1(\Omega). \quad (6.6)$$

Es gibt eine Konstante $C = C(n, \text{diam } \Omega)$, so dass stets gilt:

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

(A-priori-Abschätzung, stetige Abhängigkeit von Daten.)

Beweis. Als Hilbertraum wählen wir H_0^1 mit Skalarprodukt

$$\langle \chi, \psi \rangle := \langle \chi, \psi \rangle_{H_0^1(\Omega)} := \int_{\Omega} \langle \nabla \chi, \nabla \psi \rangle dx,$$

vgl. auch Bemerkung 5.10. Wir betrachten das folgende durch f induzierte lineare Funktional:

$$H_0^1(\Omega) \ni \psi \mapsto L(\psi) = \int_{\Omega} f(x)\psi(x)dx.$$

Dieses ist beschränkt, da Ω beschränkt ist:

$$\begin{aligned} |L(\psi)| &\leq \int_{\Omega} |f(x)| \cdot |\psi(x)| dx \stackrel{\text{CSU}}{\leq} \|f\|_{L^2} \cdot \|\psi\|_{L^2} \\ &\stackrel{\text{Poincaré-Friedrichs}}{\leq} (C(n, \text{diam } \Omega) \cdot \|f\|_{L^2}) \|\psi\|_{H_0^1(\Omega)}; \end{aligned}$$

folglich ist $\|L\| \leq C \cdot \|f\|_{L^2}$. Zu jedem derartigen L (d.h. f) existiert nun gemäß dem Rieszischen Satz genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$, so dass $\forall \psi \in H_0^1(\Omega)$:

$$\langle \psi, u \rangle_{H_0^1(\Omega)} = L(\psi),$$

konkret:

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle dx = \int_{\Omega} \langle \nabla \psi, \nabla u \rangle dx = \int_{\Omega} f(x)\psi(x)dx,$$

d.h. (6.6) gilt. Dabei ist laut dem Rieszischen Satz

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|L\| \leq C(n, \text{diam } \Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

□

Der Satz von Lax-Milgram und allgemeine elliptische Randwertprobleme

Indem man den Satz von Riesz durch ein (mit moderatem Aufwand zu erhaltendes) allgemeineres funktionalanalytisches Hilfsmittel ersetzt, kann man schnell schwache Lösungen allgemeiner elliptischer Randwertprobleme

$$Lu = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \tag{6.7}$$

mit elliptischen Differentialoperatoren in **Divergenzform**

$$Lv = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} v_{x_j}) + \sum_{i=1}^n b_i v_{x_i} + cv \tag{6.8}$$

konstruieren. Dabei legen wir im Folgenden stets zu Grunde:

6.8 Voraussetzungen. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist ein reguläres Gebiet. Die Koeffizienten $a_{ij} = a_{ji}, b_i, c : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ sind messbar und beschränkt; $\forall x \in \bar{\Omega} : |a_{ij}(x)|, |b_i(x)|, |c(x)| \leq M, M > 0$ eine geeignete Konstante. Der Differentialoperator L ist gleichmäßig

elliptisch, d.h. es gibt Konstanten $0 < \lambda \leq \Lambda$ derart, dass für alle $x \in \bar{\Omega}$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2.$$

Schließlich seien die $b_i : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und es gelte:

$$\forall x \in \Omega : \quad c(x) - \frac{1}{2} \operatorname{div} b(x) \geq 0.$$

Letztere Bedingung ist nicht optimal, andererseits ist aber eine Vorzeichenbedingung an die Terme niedriger Ordnung unvermeidlich. Man vgl. Satz 2.13 und die Erläuterungen dazu.

Um schwache Lösungen für das Randwertproblem (6.7) zu definieren, nimmt man an, man hätte eine klassische Lösung von (6.7), multipliziert die Differentialgleichung mit einer beliebigen Testfunktion ψ und integriert partiell (Satz von Gauß).

6.9 Definition. Für den elliptischen Differentialoperator L gemäß (6.8) sei Voraussetzung 6.8 erfüllt. Sei $f \in L^2(\Omega)$. Dann heißt $u \in H^1(\Omega)$ **schwache Lösung** des Randwertproblems (6.7), falls gilt:

$$\begin{aligned} \forall \psi \in H_0^1(\Omega) : \quad & \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)\psi_{x_i}u_{x_j}) + \sum_{i=1}^n (\psi b_i(x)u_{x_i}) + c(x)\psi u \right) dx \quad (6.9) \\ & = \int_{\Omega} \psi(x)f(x), \quad u \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Wir referieren nun das adäquate funktionalanalytische Hilfsmittel, den Satz von Lax-Milgram als Verallgemeinerung des Rieszschen Darstellungssatzes; \mathcal{H} ist wieder ein reeller Hilbertraum.

6.10 Satz (Lax-Milgram). Sei $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform mit den folgenden Eigenschaften

- (a) B ist **beschränkt**, d.h. es gibt eine Konstante $C_1 \geq 0$ derart, dass für alle $v, w \in \mathcal{H}$ gilt:

$$|B(v, w)| \leq C_1 \|v\| \cdot \|w\|.$$

- (b) B ist **koerzitiv (positiv)**, d.h. es gibt eine strikt positive Konstante $C_2 > 0$ derart, dass für alle $v \in \mathcal{H}$ gilt:

$$B(v, v) \geq C_2 \|v\|^2.$$

Dann gibt es zu jedem beschränkten linearen Funktional $L : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ genau ein $u = u_L \in \mathcal{H}$, so dass für alle $v \in \mathcal{H}$ gilt:

$$B(v, u) = L(v).$$

Dabei gilt stets:

$$\|u\| \leq \frac{1}{C_2} \|L\|.$$

6.11 Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein reguläres (beschränktes) Gebiet, für den Differentialoperator L gemäß (6.8) sei die Voraussetzung 6.8 erfüllt.

Dann existiert zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ genau eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ vom Randwertproblem (6.7) in dem Sinne, dass (6.9) erfüllt ist. Es gibt eine Konstante $C = C(n, \text{diam } \Omega, \lambda)$ derart, dass stets (für alle f und entsprechendes u , C von f und u insbesondere unabhängig) gilt:

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2}.$$

(A-priori-Abschätzung, stetige Abhängigkeit von Daten.)

Beweis. Auf Grund von Definition 6.9 schwacher Lösungen liegt auf der Hand, dass wir H_0^1 als Hilbertraum mit $\|v\|_{H_0^1}^2 = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx$ und

$$B(\psi, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)\psi_{x_i}v_{x_j}) + \sum_{i=1}^n (\psi b_i(x)v_{x_i}) + c(x)\psi v \right) dx$$

zu wählen haben.

Beschränktheit von B.

$$|\nabla\psi \cdot (a_{ij}) \cdot \nabla v^T| \leq \Lambda |\nabla\psi| \cdot |\nabla v|$$

$$\begin{aligned} |B(\psi, v)| &\leq \int_{\Omega} \left(\Lambda |\nabla\psi| \cdot |\nabla v| + |\psi| M \sum_{i=1}^n |v_{x_i}| + M |\psi| |v| \right) dx \\ &\leq \Lambda \|\psi\|_{H_0^1} \cdot \|v\|_{H_0^1} + M\sqrt{n} \|\psi\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1} + M \|\psi\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\stackrel{\text{Poincaré-Friedrichs}}{\leq} (\Lambda + C_0 M \sqrt{n} + M C_0^2) \cdot \|\psi\|_{H_0^1} \cdot \|v\|_{H_0^1} \leq C_1 \|\psi\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} \end{aligned}$$

mit einer geeigneten Konstanten $C_1 = C_1(\Lambda, n, M, \text{diam } \Omega)$; dabei bezeichnet $C_0 = C_0(n, \text{diam } \Omega)$ die Konstante aus der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung.

Koerzitivität von B.

Da b_i stetig differenzierbar, haben wir nach Folgerung 5.3

$$b_i v \in H_0^1(\Omega), \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i v) = b_{i,x_i} v + b_i v_{x_i}.$$

Da $C_0^\infty(\Omega)$ definitionsgemäß dicht in $H_0^1(\Omega)$ liegt, kann man, aufbauend auf der Definition schwacher Differenzierbarkeit, in $H_0^1(\Omega)$ uneingeschränkt partiell integrieren. Also

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v b_i(x) v_{x_i} dx &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v (b_i v)_{x_i} dx - \int_{\Omega} (\text{div } b) v^2(x) dx \\ &= - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_{x_i} b_i v dx - \int_{\Omega} (\text{div } b) v^2(x) dx \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v b_i v_{x_i} dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\text{div } b) v^2(x) dx. \end{aligned}$$

Damit folgt: $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
 B(v, v) &= \int_{\Omega} \underbrace{\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) v_{x_i} v_{x_j} \right)}_{\geq \lambda |\nabla v|^2: \text{Vor. 6.8}} dx + \int_{\Omega} \underbrace{\left(c(x) - \frac{1}{2} \operatorname{div} b(x) \right)}_{\geq 0: \text{Vor. 6.8}} v^2(x) dx \\
 &\geq \lambda \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx = \lambda \|v\|_{H_0^1}^2, \quad C_2 = \lambda.
 \end{aligned}$$

Beschränktes lineares Funktional.

Wie in Satz 6.7: $L\psi = \int_{\Omega} \psi(x) f(x) dx, \quad \|L\| \leq C_0 \|f\|_{L^2}$

mit Poincaré-Friedrichs $C_0 = C_0(n, \operatorname{diam} \Omega)$. Der Satz von Lax-Milgram zeigt nun, dass es zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$ gibt, welches $\forall \psi \in H_0^1(\Omega) : B(\psi, u) = L(\psi) \Leftrightarrow (6.9)$ erfüllt. Dabei gilt:

$$\|u\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\lambda} \|L\| \leq \frac{C_0}{\lambda} \|f\|_{L^2}.$$

Eindeutigkeit.

Folgt ebenfalls aus dem Satz von Lax-Milgram. □

Teil II

Parabolische Probleme

Manches wird sich hier als recht ähnlich zum elliptischen Fall herausstellen. Da dieser sehr ausführlich behandelt wurde, beschränken wir uns in diesem Kapitel auf einige grundlegende Aspekte und verschieben Manches in die Übungen.

Insbesondere betrachten wir hier bzgl. der Ortsvariablen nur den ganzen Raum, was hier technisch wesentlich einfacher ist. Elliptische Ganzraumprobleme sind hingegen für $n = 1, 2$ problematisch, die Handhabung der Sobolev-Einbettungen wird heikel. In diesem Zusammenhang sollte man bedenken, dass elliptische Probleme möglichen Limeszuständen für unendliche Zeit bei parabolischen Anfangswertproblemen mit konstanter rechter Seite entsprechen.

In gewisser Hinsicht kann man parabolische Probleme als in einer – nämlich der Zeit– Koordinate degenerierte elliptische Probleme auffassen. Ein anderer Aspekt dieser Degeneration: Lösen **rückwärts in der Zeit** ist bei $u_t - \Delta u = 0$ i.A. **unmöglich**. Transformiert man $t \rightarrow -t$ so sind $u_t - \Delta u = 0$ für $t \leq 0$ und $u_t + \Delta u = 0$ für $t \geq 0$ äquivalent. Deshalb nennt man Letztere auch die Rückwärtswärmeleitungsgleichung, die gleichermaßen „schlecht gestellt“ ist.

7 Die Wärmeleitungsgleichung in \mathbb{R}^n

Bezeichnung. Sei $\ell \geq 2k$.

$$C^{k,\ell}((0, T) \times \mathbb{R}^n) = \{u : ((0, T) \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}; \forall j \in \{0, \dots, k\}, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit} \\ |\alpha| \leq \ell - 2j : D_t^j D_x^\alpha u \in C^0((0, T) \times \mathbb{R}^n) \text{ existieren}\}.$$

Dabei $T \in (0, \infty]$. Analog für Zeitintervalle $[0, T)$, $(0, T]$, $[0, T]$, Gebiete Ω statt \mathbb{R}^n , bzw. deren Abschluss $\bar{\Omega}$.

Cauchyproblem für die homogene Wärmeleitungsgleichung

Gegeben sei ein hinreichend glattes $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, gesucht ist $u \in C^{1,2}((0, \infty) \times \mathbb{R}^n) \cap C^0([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ (gedacht als Minimalanforderung, herausbekommen werden wir viel, viel mehr !!) als Lösung von

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{für } t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = \varphi(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (7.1)$$

Minimalanforderung an φ ist also: $\varphi \in C^0(\mathbb{R}^n)$.

Wie auch beim Laplace-Operator spielen hier singuläre Grund- oder Fundamentallösungen eine zentrale Rolle. Deren Herleitung soll hier auf einem heuristischen Niveau skizziert werden; heuristisch deshalb, weil die Fouriertransformation als Hilfsmittel hier zwar benutzt, aber nicht theoretisch fundiert werden soll.

Eine (neben $L^2(\mathbb{R}^n)$, wo es nur einige technische Detailprobleme gibt) geeignete Funktionenklasse ist z.B.

$$\mathcal{S} : = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : D^\alpha f \text{ fällt für } |x| \rightarrow \infty \text{ gegen } 0 \text{ schneller als jedes Polynom} \}.$$

Für $f \in \mathcal{S}$ definieren wir die Fouriertransformierte

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \xi, x \rangle} f(x) dx$$

und erhalten folgende grundlegenden Rechenregeln im Zusammenspiel mit der Differentiation:

$$\begin{aligned} \widehat{\partial_j f}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (-i\xi_j) e^{-i\langle \xi, x \rangle} f(x) dx \\ &= i\xi_j \widehat{f}(\xi); \\ \widehat{\Delta f}(\xi) &= -|\xi|^2 \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Das Fouriersche Umkehrtheorem, welches z.B. in \mathcal{S} und modifiziert auch in $L^2(\mathbb{R}^n)$ gültig ist, besagt:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi, x \rangle} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

schließlich kann man mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes (\rightarrow Funktionentheorie) und des Satzes von Fubini zeigen:

$$\text{Für } f(x) = \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right) \quad \text{ist} \quad \widehat{f}(\xi) = \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2}\right).$$

Gehen wir nun von einer Lösung u von

$$u_t - \Delta u = 0$$

in $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ aus, so ergibt die Betrachtung von t als Parameter und Fouriertransformation bzgl. der räumlichen Veränderlichen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(t, \xi) + |\xi|^2 \widehat{u}(t, \xi) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(t, \xi) = -|\xi|^2 \widehat{u}(t, \xi).$$

Betrachtet man nun ξ als Parameter, so bleibt eine gewöhnliche Differentialgleichung in t zu lösen! Wir geben

$$\widehat{u}(0, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \quad (\text{die Fouriertransformierte der } \delta\text{-Distribution})$$

als Anfangsdatum vor:

$$\begin{aligned}\widehat{u}(t, \xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \exp(-|\xi|^2 t); \\ u(t, x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(ix \cdot \xi) \exp(-|\xi|^2 t) d\xi \\ &\text{mit } \xi = \frac{1}{\sqrt{2t}} \zeta \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i \frac{x}{\sqrt{2t}} \cdot \zeta\right) \exp\left(-\frac{1}{2} |\zeta|^2\right) d\zeta \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left|\frac{x}{\sqrt{2t}}\right|^2\right) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).\end{aligned}$$

Damit haben wir in der Tat die Grundlösung der Wärmeleitungsgleichung gefunden:

7.1 Definition und Hilfssatz. Die Funktion $\gamma : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\gamma(t, x) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) \quad (7.2)$$

heißt **Fundamentallösung** oder **singuläre Grundlösung** der Wärmeleitungsgleichung. Für $t > 0, x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\gamma_t - \Delta\gamma = 0.$$

Beweis. Nachrechnen! → Übung. □

Durch das nachträgliche Verifizieren von (7.1) für γ ist der Mangel des Heuristischen bei der Bestimmung von γ weitgehend geheilt. Es bleibt die Diskussion und Verifikation der Tatsache, dass $\gamma \rightarrow \delta_0$ für $t \searrow 0$ gilt. Man beachte die Ähnlichkeit der Fundamentallösung mit den Glättungskernen aus dem Beweis des Weierstraßschen Approximationssatzes. Dort haben wir den Integralkern und das zu glättende Datum miteinander gefaltet; ganz ähnlich wie beim Laplace-Operator in Satz 3.2. Diese Ideen werden tatsächlich zum Erfolg führen, dazu s.u. Satz 7.2.

Bezeichnung.

$$\begin{aligned}C_b^0(\mathbb{R}^n) &:= \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ stetig und beschränkt}\}; \\ \text{für } f \in C_b^0(\mathbb{R}^n) &: \|f\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty.\end{aligned}$$

7.2 Satz und Definition. Wir definieren die **Wärmeleitungshalbgruppe**, indem wir für $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ und $t > 0, x \in \mathbb{R}^n$ setzen:

$$\begin{aligned}(e^{t\Delta}\varphi)(x) &:= (e^{-t(-\Delta)}\varphi)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(t, x-y)\varphi(y)dy \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) \varphi(y)dy.\end{aligned} \quad (7.3)$$

Dann ist

$$u(t, x) := (e^{t\Delta}\varphi)(x)$$

in $C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ und löst die homogene Wärmeleitungsgleichung in (7.1). Das Anfangsdatum φ in (7.1) wird im folgenden Sinne angenommen:

$$u(t, \cdot) \rightarrow \varphi \quad \text{lokal glm. für } t \searrow 0.$$

Setzt man also $u(0, x) := (e^{0\Delta}\varphi)(x) := \varphi(x)$, so ist $u \in C^0([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$. Es gilt die Abschätzung

$$\forall t > 0: \quad \|u(t, \cdot)\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq \|\varphi\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \quad (7.4)$$

In dieser Klasse, d.h. in $C_b^0([0, \infty) \times \mathbb{R}^n) \cap C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ ist die Lösung von (7.1) mit Anfangswertannahme wie oben eindeutig bestimmt. Außerdem gelten für die Ableitungen von u die folgenden Abschätzungen:

Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex, $k \in \mathbb{N}_0$; dann existiert eine Konstante $C = C(\alpha, k, n)$, so dass für alle $t > 0$ gilt:

$$\|D_x^\alpha D_t^k u(t, \cdot)\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C \cdot t^{-k - \frac{|\alpha|}{2}} \cdot \|\varphi\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \quad (7.5)$$

7.3 Bemerkungen. (a) Man beachte qualitativ und quantitativ (siehe (7.5)) den extrem glättenden Charakter der Wärmeleitungsgleichung. Das zeigt auch: wenn überhaupt, dann kann man die Rückwärtswärmeleitungsgleichung **bestenfalls** für C^∞ -Daten lösen. Lösungen existieren sogar nur für analytische Anfangsdaten, und dann nur lokal. Und selbst hierfür ist das Cauchyproblem *schlecht gestellt*.

(b) Bei im Unendlichen ggfs. stark anwachsenden Lösungen (stärker als exponentiell) geht die Eindeutigkeit i.A. verloren, vgl. DiBenedetto [DB, V.5.1]. „Randwerte im Unendlichen“ sind für die Eindeutigkeit erforderlich.

(c) Zum Begriff „Halbgruppe“: Das bedeutet, dass

$$\forall t, s \geq 0: \quad e^{(t+s)\Delta}\varphi = e^{t\Delta}(e^{s\Delta}\varphi); e^{(t+s)\Delta} = e^{t\Delta} \circ e^{s\Delta}$$

Zur rechten Seite: Man löst (7.1) mit Anfangsdatum φ bis zur Zeit s . $u(s, \cdot)$ nimmt man dann als Anfangsdatum und löst bis zur Zeit t , bzw., da (7.1) gegenüber Zeitverschiebungen invariant ist, auf $[s, s+t]$. So erhält man eine Lösung von (7.1) auf $[0, t+s]$. Wegen unseres Eindeutigkeitsresultats ist diese gleich $e^{(t+s)\Delta}\varphi$.

Beweis des Satzes 7.2.

„ $u \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$, Vertauschbarkeit von Integral und Ableitungen“

Sei $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ im Folgenden beliebig, aber fest. Für beliebiges, aber im Folgenden festes $R > 1$ reicht es, den Bereich

$$t \in \left[\frac{1}{R}, R \right], \quad |x| \leq R,$$

zu betrachten. Sei weiter $k_0 \in \mathbb{N}$ fest, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig mit $|\alpha| + 2k \leq 2k_0$. Um den Lebesgueschen Satz über parameterabhängige Integrale zur Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration auf $u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(t, x - y)\varphi(y)dy$ müssen wir für

$$|D_x^\alpha D_t^k \gamma(t, x - y)| |\varphi(y)|$$

eine integrierbare Majorante als Funktion in y finden, deren Wahl zwar von R, k_0, φ abhängen darf, aber ansonsten **unabhängig** von t und x erfolgen muss.

Zunächst beobachtet man, dass mit geeigneten Polynomen $P_{\alpha,k}$ gilt

$$D_x^\alpha D_t^k \gamma(t, x - y) = P_{\alpha,k}\left(\frac{1}{t}, x, y\right) \gamma(t, x - y) \quad (7.6)$$

Unter den getroffenen Annahmen findet man in Abhängigkeit von n, R, k_0 ein Polynom Q , so dass $\forall t \in [\frac{1}{R}, R], \forall x \in \overline{B_R(0)}, \forall y \in \mathbb{R}^n$:

$$|D_x^\alpha D_t^k \gamma(t, x - y)\varphi(y)| \leq Q(|y|) \cdot \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4R}\right) \|\varphi\|_{C^0}.$$

Für $|y| \leq 2R$ schätzen wir trivial ab

$$\exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4R}\right) \leq 1.$$

Für $|y| \geq 2R$ haben wir: $|x - y| \geq |y| - |x| \geq |y| - R \geq |y| - \frac{|y|}{2} = \frac{|y|}{2}$,

$$\exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4R}\right) \leq \exp\left(-\frac{|y|^2}{16R}\right).$$

Mit der Setzung

$$\tilde{\gamma}(y) = \begin{cases} 1, & |y| \leq 2R, \\ \exp\left(-\frac{|y|^2}{16R}\right), & |y| > 2R, \end{cases}$$

liefert

$$y \mapsto Q(|y|)\tilde{\gamma}(y)\|\varphi\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}$$

eine Majorante für den Integranden in (7.3), die wegen des exponentiellen Abklingens von $\tilde{\gamma}$ im Unendlichen integrierbar ist. Das zeigt $u \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ sowie in (7.3) die Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration.

„*u löst die Wärmeleitungsgleichung*“

Mit den soeben erledigten Vorarbeiten fällt dieses nun leicht:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) u(t, x) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(t, x - y)\varphi(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) \gamma(t, x - y)\varphi(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} 0 \cdot \varphi(y)dy = 0. \end{aligned}$$

„Supremumsabschätzung (7.4) für u “

Vorbereitend berechnen wir dazu für beliebiges $t > 0, x \in \mathbb{R}^n$ mit Hilfe der Substitution $y = x + 2\sqrt{t}\eta$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(t, x - y) dy &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4t}\right) dy \\ &= \frac{(4t)^{\frac{n}{2}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-|\eta|^2) d\eta = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\eta_1^2) d\eta_1\right)^n}_{=\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(t, x - y) dy = 1. \quad (7.7)$$

Damit erhält man nun für global beschränktes $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n : |u(t, x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(t, x - y) |\varphi(y)| dy \leq \|\varphi\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(t, x - y) dy \\ &\Rightarrow \forall t > 0 : \|u(t, \cdot)\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq \|\varphi\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

„Anfangswertannahme für $t \searrow 0$ “

Zu zeigen ist lokal glm. Konvergenz $u(t, \cdot) \rightarrow \varphi$. Wir beginnen mit einer auf (7.7) basierenden Beobachtung und der Substitution $y = x + 2\sqrt{t}\eta$:

$$\begin{aligned} u(t, x) - \varphi(x) &= u(t, x) - \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(t, x - y) \varphi(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(t, x - y) (\varphi(y) - \varphi(x)) dy \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-|\eta|^2) (\varphi(x + 2\sqrt{t}\eta) - \varphi(x)) d\eta. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Wir wählen $R_0 > 0$ beliebig aber fest, wir betrachten $|x| \leq R_0$, ferner sei o.B.d.A. $t \leq 1$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir bestimmen $R_1 > 0$ so, dass

$$\frac{2\|\varphi\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{|\eta| \geq R_1} \exp(-|\eta|^2) d\eta \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

und erhalten so aus (7.8):

$$|u(t, x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{|\eta| \leq R_1} \exp(-|\eta|^2) |\varphi(x + 2\sqrt{t}\eta) - \varphi(x)| d\eta. \quad (7.9)$$

Sei $K = \overline{B_{R_0+2R_1}}(0)$, diese Menge ist kompakt. Unter den gemachten Annahmen gilt: $|\eta| \leq R_1 \Rightarrow x, x + 2\sqrt{t}\eta \in K$. Auf K ist φ gleichmäßig stetig. Also existiert $\delta > 0$, so dass

$$\xi, \xi' \in K : \quad |\xi - \xi'| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |\varphi(\xi) - \varphi(\xi')| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7.10)$$

Sei zusätzlich $0 < t \leq \left(\frac{\delta}{2R_1}\right)^2$, dann ist $|x + 2\sqrt{t}\eta - x| = |2\sqrt{t}\eta| \leq 2|\eta| \frac{\delta}{2R_1} \leq \delta$, sofern $|\eta| \leq R_1$. Somit ergeben (7.9) und (7.10) für $0 < t \leq \min\left\{1, \left(\frac{\delta}{2R_1}\right)^2\right\}$ und $|x| \leq R_0$:

$$\begin{aligned} |u(t, x) - \varphi(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{|\eta| \leq R_1} \exp(-|\eta|^2) \frac{\varepsilon}{2} d\eta \\ &\stackrel{\text{vgl. (7.7)}}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Bemerkung. Ganz „nebenbei“ haben wir damit einen weiteren Beweis des Weierstraßschen Approximationssatzes gegeben! (Ohne diesen implizit irgendwo mit hereingesteckt zu haben!)

„Abschätzung für die Ableitungen von u “

Durch die Betrachtung erster und zweiter räumlicher Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} u(t, x) &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y_i - x_i}{2t} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) \varphi(y) dy \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(t, x) &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{(y_i - x_i)(y_j - x_j)}{4t^2} - \frac{\delta_{ij}}{2t}\right) \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) \varphi(y) dy \end{aligned}$$

kommt man auf die Vermutung, dass für $|\alpha| = m$ mit einem Polynom P_α vom Grade $\leq m$ gilt:

$$D_x^\alpha u(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} t^{-\frac{m}{2}} P_\alpha\left(\frac{y-x}{\sqrt{t}}\right) \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) \varphi(y) dy;$$

die Verifikation erfolgt durch eine einfache Induktion nach m . Damit folgt für $|\alpha| = m$ mit Hilfe der Substitution $y = x + 2\sqrt{t}\eta$:

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha u(t, x)| &\leq \frac{\|\varphi\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} t^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left|P_\alpha\left(\frac{y-x}{\sqrt{t}}\right)\right| \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) dy \\ &= \frac{\|\varphi\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}}{\pi^{\frac{n}{2}}} t^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |P_\alpha(2\eta)| \exp(-|\eta|^2) d\eta. \end{aligned}$$

Mit einem geeigneten Polynom \tilde{P}_m vom Grade m gilt für $|\alpha| \leq m$:

$$\begin{aligned} \|D_x^\alpha u(t, \cdot)\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} &\leq t^{-\frac{|\alpha|}{2}} \underbrace{\left(\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{P}_m(|\eta|) \exp(-|\eta|^2) d\eta\right)}_{C(n,m)} \|\varphi\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C(n, m) t^{-\frac{|\alpha|}{2}} \|\varphi\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Das ist Behauptung (7.5) für rein räumliche Ableitungen, d.h. $k = 0$. Hieraus und aus der Differentialgleichung

$$u_t - \Delta u = 0$$

erhält man direkt auch die Ableitungen für zeitliche und gemischte Ableitungen:

$$u_t = \Delta u, \quad u_{tt} = (\Delta u)_t = \Delta(u_t) = \Delta^2 u, \quad D_t^k u = \Delta^k u, \quad D_t^k D_x^\alpha u = D_x^\alpha \Delta^k u;$$

eine zeitliche Ableitung wirkt wie zwei räumliche Ableitungsordnungen. Damit zeigt (7.11):

$$\|D_t^k D_x^\alpha u(t, \cdot)\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, |\alpha|, k) t^{-\frac{2k+|\alpha|}{2}} \|\varphi\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}.$$

„Eindeutigkeit von u in C_b^0 “:

Dieser Punkt erfordert noch gründlichere Vorarbeiten zum parabolischen Maximumprinzip und wird deshalb erst unten in Folgerung 7.9 behandelt. \square

7.4 Bemerkungen. (a) Solange man die homogene Wärmeleitungsgleichung (7.1) – d.h. keine äußeren „Kräfte“ = Wärmequellen – betrachtet, wird die Lösung – unabhängig von der Qualität von φ – sofort beliebig glatt. Das ist ganz analog zur inneren Regularität z.B. bei der homogenen Laplace-Gleichung, vgl. Satz 3.4.

Sobald aber eine nichttriviale rechte Seite f hinzutritt, hat man ganz ähnliche Phänomene, wie wir sie im elliptischen Fall im Zusammenhang mit Bemerkung 4.14 und Satz 4.15 angesprochen haben. Dazu s.u. Satz 8.1.

(b) Unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Man betrachte $0 \not\equiv \varphi \geq 0$, $\text{supp } \varphi$ kompakt. Die Lösungsformel zeigt: $\forall t > 0 \quad \forall x : u(t, x) > 0$.

Das ist parallel zum elliptischen Fall, wo $-\Delta u = f$ in Ω , $u|_{\partial\Omega}, 0 \not\equiv f \geq 0$ auf Grund des starken Maximumsprinzip sofort $u > 0$ in Ω impliziert. Dieses Phänomen kontrastiert scharf zum hyperbolischen Fall, dazu s.u. 11.2, 12.7, 13.3. Auch bei „quasilinearen degenerierten“ parabolischen Problemen hat man u.U. endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Den Rest dieses Abschnitts widmen wir der noch offenen Eindeutigkeitsfrage für das Cauchyproblem (7.1).

Dazu müssen wir zunächst auf beschränkten Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ arbeiten. Sei $T \in (0, \infty]$ beliebig. Es bezeichne

$$\Omega_T := (0, T] \times \Omega$$

den Raum-Zeit-Zylinder und

$$P\Omega_T = (\{0\} \times \bar{\Omega}) \cup ((0, T] \times \partial\Omega)$$

dessen **parabolischen Rand**.

7.5 Satz (Schwach Maximumprinzip). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Für $u \in C^{1,2}(\Omega_T) \cap C^0(\bar{\Omega}_T)$ gelte $u_t - \Delta u \leq 0$ in Ω_T . Dann gilt:*

$$\sup_{\bar{\Omega}_T} u = \sup_{P\Omega_T} u.$$

Beweis. Es reicht, $T < \infty$ zu betrachten; hieraus folgt die Behauptung für $T = \infty$ durch einen einfachen Grenzübergang. Wir können also „max“ statt „sup“ schreiben. Das Vorgehen ist ganz ähnlich wie bei Satz 2.12 im elliptischen Fall, allerdings gestattet hier die Zeit ein technisch einfacheres Vorgehen. Für $\varepsilon > 0$ sei

$$u_\varepsilon(t, x) = u(t, x) - \varepsilon t,$$

dann ist in Ω_T : $u_{\varepsilon,t} - \Delta u_\varepsilon = -\varepsilon + u_t - \Delta u \leq -\varepsilon < 0$.

Wir zeigen, dass u_ε kein lokales Maximum in Ω_T haben kann. Wäre dieses nämlich in $(t_0, x_0) \in \Omega_T$ der Fall, so hätte man dort

$$\begin{aligned} \text{Hess } u_\varepsilon(t_0, x_0) &\leq 0, \quad \Delta u_\varepsilon(t_0, x_0) \leq 0, \quad u_{\varepsilon,t}(t_0, x_0) \geq 0 \\ \Rightarrow u_{\varepsilon,t}(t_0, x_0) - \Delta u_\varepsilon(t_0, x_0) &\geq 0, \text{ ein Widerspruch!} \end{aligned}$$

Das zeigt:

$$\left(\max_{\overline{\Omega_T}} u\right) - \varepsilon T \leq \max_{\overline{\Omega_T}} u_\varepsilon = \max_{P\Omega_T} u_\varepsilon \leq \max_{P\Omega_T} u.$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt $\max_{\overline{\Omega_T}} u \leq \max_{P\Omega_T} u$. Da „ \geq “ auf der Hand liegt, ist damit der Satz bewiesen. \square

Genauso zeigt man

7.6 Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Für $u \in C^{1,2}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega_T})$ gelte $u_t - \Delta u \geq 0$ in Ω_T . Dann:

$$\inf_{\overline{\Omega_T}} u = \inf_{P\Omega_T} u.$$

7.7 Folgerung (Eindeutigkeit beim Anfangsrandwertproblem). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Für $u \in C^{1,2}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega_T})$ gelte $u_t - \Delta u = 0$ in Ω_T , $u = 0$ auf $P\Omega_T$. Es folgt:

$$u \equiv 0 \text{ in } \overline{\Omega_T}.$$

Letzteres Resultat soll auf \mathbb{R}^n ausgedehnt werden. Dazu zeigen wir mittels geeigneter Vergleichsfunktionen zunächst das folgende Vergleichsprinzip, bei dem die Beschränktheitsvoraussetzung an die Lösung ganz wesentlich ist:

7.8 Satz. Für $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}_T^n) \cap C_b^0(\overline{\mathbb{R}_T^n})$ gelte $u_t - \Delta u \geq 0$ in \mathbb{R}_T^n , $u(0, \cdot) \geq 0$. Dann ist

$$u \geq 0 \text{ in } \mathbb{R}_T^n.$$

Beweis. O.B.d.A. sei $T < \infty$. Sei $\beta > 0$ so, dass $\frac{1}{4\beta} > T$. Wir betrachten für $t \leq T < \frac{1}{4\beta}$:

$$v(t, x) = (1 - 4\beta t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{\beta |x|^2}{1 - 4\beta t}\right).$$

Es ist

$$\begin{aligned}
v_t &= v \left(\binom{-n}{2} \frac{1}{1-4\beta t} (-4\beta) - \frac{\beta |x|^2}{(1-4\beta t)^2} (-4\beta) \right) \\
&= v \left\{ \frac{2n\beta}{1-4\beta t} + \frac{4\beta^2 |x|^2}{(1-4\beta t)^2} \right\} \\
v_{x_i} &= v \cdot \frac{2\beta x_i}{1-4\beta t} \\
v_{x_i x_i} &= v \left\{ \frac{4\beta^2 x_i^2}{(1-4\beta t)^2} + \frac{2\beta}{1-4\beta t} \right\} \\
\Rightarrow \quad v_t - \Delta v &= 0.
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir betrachten

$$u_\varepsilon := u + \varepsilon v.$$

Sicher ist

$$u_{\varepsilon,t} - \Delta u_\varepsilon \geq 0 \text{ in } \mathbb{R}_T^n, \quad u_\varepsilon(0, \cdot) \geq 0.$$

Da für jedes x : $t \mapsto v(t, x)$ wachsend ist, hat man

$$v(t, x) \geq v(0, x) \geq \exp(\beta |x|^2).$$

Da $u \in C_b^0(\overline{\mathbb{R}_T^n})$, kann man in Abhängigkeit von u, ε, β, T ein $\rho_0 > 0$ finden, so dass für $\rho > \rho_0$ mit $\Omega = B_\rho(0)$ gilt

$$\begin{aligned}
u_{\varepsilon,t} - \Delta u_\varepsilon &\geq 0 && \text{in } \Omega_T, \\
u_\varepsilon &\geq 0 && \text{auf } P\Omega_T.
\end{aligned}$$

Satz 7.6 zeigt $u_\varepsilon \geq 0$ in Ω_T ; mit $\rho \nearrow \infty$:

$$u_\varepsilon \geq 0 \text{ in } \mathbb{R}_T^n, \quad u \geq -\varepsilon v \text{ in } \mathbb{R}_T^n.$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt:

$$u \geq 0 \text{ in } \mathbb{R}_T^n.$$

□

Das liefert nun direkt die in Satz 7.2 behauptete Eindeutigkeit für (7.1) in Klassen beschränkter Funktionen:

7.9 Folgerung. Für $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}_T^n) \cap C_b^0(\overline{\mathbb{R}_T^n})$ gelte

$$\begin{aligned}
u_t - \Delta u &= 0 && \text{in } \mathbb{R}_T^n, \\
u(0, \cdot) &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Dann folgt:

$$u \equiv 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_T^n.$$

8 Das Cauchyproblem für die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

Für geeignete Daten $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ wollen wir versuchen, eine Lösung u des Cauchyproblems

$$\begin{cases} u_t(t, x) - \Delta u(t, x) = f(t, x) & \text{für } (t, x) \in \mathbb{R}_T^n = (0, T] \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = \varphi(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (8.1)$$

zu finden. Dabei ist $T > 0$.

Wie schon die Bezeichnung $e^{t\Delta}$ in Satz 7.2 andeutet, ist es sehr gewinnbringend, sich (auch bei hyperbolischen) Evolutionsgleichungen von der – natürlich technisch wesentlich einfacheren – Situation bei gewöhnlichen Differentialgleichungen leiten zu lassen. Sei $a < 0$ eine reelle Zahl, für einen Moment $\varphi \in \mathbb{R}$, wir betrachten das Anfangswertproblem

$$u'(t) - au(t) = f, \quad u'(0) = \varphi \quad (8.2)$$

mit einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Eine allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist gegeben durch $t \mapsto be^{at}$, eine spezielle Lösung erhält man durch den Ansatz „Variation der Konstanten“

$$v(t) = b(t)e^{at}.$$

Diese Funktion löst die Differentialgleichung genau dann, wenn

$$\begin{aligned} b'(t)e^{at} + ab(t)e^{at} - ab(t)e^{at} &= f(t) \\ \Leftrightarrow b'(t) &= e^{-at}f(t) \\ \Leftrightarrow b(t) &= b(0) + \int_0^t e^{-as}f(s)ds \\ \Leftrightarrow v(t) &= b(0)e^{at} + \int_0^t e^{a(t-s)}f(s)ds. \end{aligned}$$

Die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems (8.2) ist dann gegeben durch

$$u(t) = e^{at}\varphi + \int_0^t e^{a(t-s)}f(s)ds.$$

Indem man formal a durch Δ ersetzt und alle Funktionen als von (t, x) abhängig interpretiert, gelangt man auch für (8.1) zu einem zunächst formalen Lösungsansatz, der im Folgenden rigoros gerechtfertigt werden wird.

8.1 Satz. *Es bezeichne $e^{t\Delta}$ die Wärmeleitungshalbgruppe wie in Satz 7.2. Sei $\infty > T > 0$, $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$, $f \in C_b^0(\overline{\mathbb{R}_T^n})$ und so, dass für $t > 0$ die räumlichen partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existieren und dass $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C_b^0([\delta, T] \times \mathbb{R}^n)$ für alle $\delta \in (0, T]$.*

Dann ist

$$u(t, x) := (e^{t\Delta}\varphi)(x) + \int_0^t (e^{(t-s)\Delta}f(s, \cdot))(x)ds$$

in $C_b^0(\overline{\mathbb{R}_T^n}) \cap C^{1,2}(\mathbb{R}_T^n)$ und löst in der Tat das Cauchyproblem (8.1) für die inhomogene Wärmeleitungsgleichung mit rechter Seite f und Anfangsdatum φ . In dieser Klasse ist die Lösung eindeutig bestimmt.

Beweis. Zur Eindeutigkeit s. Folgerung 7.9. Wir brauchen uns also nur mit der Existenzaussage zu befassen. Auf Grund von Satz 7.2 und der Linearität der Wärmeleitungsgleichung reicht es, hier den Fall $\varphi \equiv 0$ zu behandeln.

Sei $\varepsilon_0 \in (0, T)$ beliebig, für $t \in [\varepsilon_0, T]$ und $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ sei

$$u_\varepsilon(t, x) = \int_0^{t-\varepsilon} (e^{(t-s)\Delta}f(s, \cdot))(x)ds.$$

Damit vermeiden wir den unangenehmen Zeitpunkt $s = t$, wo die gleichmäßigen Stetigkeits- und insbesondere die Differenzierbarkeitsaussagen zusammenbrechen. Der Integrand ist bzgl. (t, x) beliebig oft differenzierbar; für (t, x) aus einer relativ kompakten offenen Teilmenge von $[\varepsilon_0, T] \times \mathbb{R}^n$ und $s \leq t - \varepsilon$ sind alle Ableitungen gleichmäßig beschränkt. Wir haben $u_\varepsilon \in C^\infty([\varepsilon_0, T] \times \mathbb{R}^n)$ insbesondere also $u_\varepsilon \in C^{1,2}([\varepsilon_0, T] \times \mathbb{R}^n)$.

Wir zeigen nun, dass $u_\varepsilon \rightarrow u$ gleichmäßig auf $[\varepsilon_0, T] \times \mathbb{R}^n$ konvergiert:

$$\begin{aligned} u(t, x) - u_\varepsilon(t, x) &= \int_{t-\varepsilon}^t (e^{(t-s)\Delta}f(s, \cdot))(x) ds; \\ \|u(t, \cdot) - u_\varepsilon(t, \cdot)\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} &\leq \int_{t-\varepsilon}^t \|e^{(t-s)\Delta}f(s, \cdot)\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} ds \\ &\quad \text{Satz 7.2, Supremumsabschätzung (7.4)} \\ &\leq \int_{t-\varepsilon}^t \|f\|_{C^0([0, T] \times \mathbb{R}^n)} ds \leq \varepsilon \cdot \|f\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}_T^n})}. \end{aligned}$$

Diese Abschätzung ist gleichmäßig in $t \in [\varepsilon_0, T]$, deshalb folgt:

$$\|u - u_\varepsilon\|_{C^0([\varepsilon_0, T] \times \mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon \cdot \|f\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}_T^n})}.$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt die gleichmäßige Konvergenz, also die Stetigkeit für $t \geq \varepsilon_0$. Ganz analoge Argumente zeigen: u ist auch in $t = 0$ stetig,

$$u(0, \cdot) = 0, \quad \|u\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}_T^n})} \leq T \cdot \|f\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}_T^n})}, \quad (8.3)$$

also $u \in C_b^0([0, T] \times \mathbb{R}^n)$.

Wir zeigen nun ganz ähnlich, dass auf $[\varepsilon_0, T]$ die ersten räumlichen partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_j} u_\varepsilon$ für $\varepsilon \searrow 0$ eine gleichmäßige Cauchyfolge bilden. Seien $0 < \varepsilon \leq$

$\varepsilon' \leq \varepsilon_0$, dann gilt gleichmäßig in $t \in [\varepsilon_0, T]$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} u_\varepsilon(t, x) - \frac{\partial}{\partial x_j} u_{\varepsilon'}(t, x) &= \int_{t-\varepsilon'}^{t-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_j} (e^{(t-s)\Delta} f(s, \cdot)) (x) ds \\ \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} u_\varepsilon(t, \cdot) - \frac{\partial}{\partial x_j} u_{\varepsilon'}(t, \cdot) \right\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} &\leq \int_{t-\varepsilon'}^{t-\varepsilon} \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} (e^{(t-s)\Delta} f(s, \cdot)) \right\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} ds \\ &\stackrel{(7.5)}{\leq} C \cdot \int_{t-\varepsilon'}^{t-\varepsilon} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}_T^n})} ds \\ &\leq 2C \|f\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}_T^n})} \left(\sqrt{\varepsilon'} - \sqrt{\varepsilon} \right) \rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Somit haben wir, da ε_0 beliebig, $u \in C^{0,1}(\mathbb{R}_T^n)$. Ganz ähnlich erhält man auch $u \in C^{0,1}(\overline{\mathbb{R}_T^n})$ und auch

$$\|u_{x_j}\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}_T^n})} \leq C \cdot \sqrt{T} \|f\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}_T^n})}. \quad (8.4)$$

Würde man nun naiv weiter so verfahren, erhielte man für die zweite räumliche (und erste zeitliche) Ableitung die nicht integrierbare Singularität $(t-s)^{-1}$. Wir beobachten aber, dass für festes $0 < s < t$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} e^{(t-s)\Delta} f(s, \cdot)(x) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(t-s, x-y) f(s, y) dy \\ &\stackrel{\text{Satz 7.2}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_j} \gamma(t-s, x-y) f(s, y) dy \\ &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\frac{\partial}{\partial y_j} \gamma(t-s, x-y)}_{\text{schnell fallend für } y \rightarrow \infty} \underbrace{f(s, y)}_{\text{beschränkt für } y \rightarrow \infty (s>0)} dy \\ &\stackrel{\text{Satz von Gauß}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(t-s, x-y) \frac{\partial}{\partial y_j} f(s, y) dy \\ &= e^{(t-s)\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} f(s, \cdot) \right) (x). \end{aligned}$$

Seien nun $0 < \varepsilon \leq \varepsilon' \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$. Nun kann man analog zu oben fortfahren; für $t \in [\varepsilon_0, T]$ ist:

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u_\varepsilon(t, \cdot) - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u_{\varepsilon'}(t, \cdot) \right\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \int_{t-\varepsilon'}^{t-\varepsilon} \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \left(e^{(t-s)\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f(s, \cdot) \right) \right) \right\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} ds \\ &\leq C \cdot \int_{t-\varepsilon'}^{t-\varepsilon} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} f(s, \cdot) \right\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} ds \\ &\leq C \cdot \|f\|_{C^{0,1}([\frac{\varepsilon_0}{2}, T] \times \mathbb{R}^n)} \left(\sqrt{\varepsilon'} - \sqrt{\varepsilon} \right) \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Damit haben wir $u \in C^{0,2}(\mathbb{R}_T^n)$ und \int_0^t und Ableitungen vertauschen in diesem Sinne. Zur Kontrolle der zeitlichen Ableitungen benutzen wir die Lösungseigen-

schaften der Wärmeleitungshalbgruppe. Man beachte, dass bei u_ε selbst alle Vertauschungsprozesse uneingeschränkt möglich sind.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon(t, x) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{t-\varepsilon} e^{(t-s)\Delta} f(s, \cdot)(x) ds \\
&= e^{\varepsilon\Delta} f(t-\varepsilon, \cdot)(x) + \int_0^{t-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} (e^{(t-s)\Delta} f(s, \cdot))(x) ds \\
&\stackrel{\text{Satz 7.2.}}{=} e^{\varepsilon\Delta} f(t-\varepsilon, \cdot)(x) + \int_0^{t-\varepsilon} \Delta (e^{(t-s)} f(s, \cdot))(x) ds \\
&= e^{\varepsilon\Delta} f(t-\varepsilon, \cdot)(x) + \Delta u_\varepsilon(t, x). \tag{8.5}
\end{aligned}$$

Für $\varepsilon \searrow 0$ konvergiert der zweite Term gleichmäßig auf $[\varepsilon_0, T] \times \mathbb{R}^n$ gegen $\Delta u(t, x)$.

Bei der Diskussion des ersten Terms gehen wir ganz parallel wie beim Beweis der lokal gleichmäßigen Konvergenz für $t \searrow 0$ in Satz 7.2 vor. Wir beschränken uns für beliebiges, aber dann fixiertes $R_0 > 0$ auf $|x| \leq R_0$:

$$\begin{aligned}
&f(t, x) - e^{\varepsilon\Delta} f(t-\varepsilon, \cdot)(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(\varepsilon, x-y) (f(t, x) - f(t-\varepsilon, y)) dy \\
&= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-|\eta|^2) (f(t, x) - f(t-\varepsilon, x+2\sqrt{\varepsilon}\eta)) d\eta.
\end{aligned}$$

Sei $\tau > 0$ gegeben. Wir bestimmen $R_1 > 0$ so wie im Beweis von Satz 7.2, dass

$$\frac{2\|f\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}^n_T})}}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{|\eta| \geq R_1} \exp(-|\eta|^2) d\eta \leq \frac{\tau}{2}$$

und erhalten:

$$\begin{aligned}
&|f(t, x) - e^{\varepsilon\Delta} f(t-\varepsilon, \cdot)(x)| \\
&\leq \frac{\tau}{2} + \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{|\eta| \leq R_1} \exp(-|\eta|^2) |f(t, x) - f(t-\varepsilon, x+2\sqrt{\varepsilon}\eta)| dy.
\end{aligned}$$

Auf $[0, T] \times \overline{B}_{R_0+2R_1}(0)$ ist f gleichmäßig stetig (wir betrachten nur $\varepsilon \leq 1$). Wählt man ε klein genug, so hat man für $t \in [\varepsilon_0, T]$, $x \in \overline{B}_{R_0}$:

$$\forall \eta \in \overline{B}_{R_1} : \quad |f(t, x) - f(t-\varepsilon, x+2\sqrt{\varepsilon}\eta)| \leq \frac{\tau}{2},$$

es folgt

$$|f(t, x) - e^{\varepsilon\Delta} f(t-\varepsilon, \cdot)(x)| \leq \frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2} = \tau.$$

Das zeigt: Für $t \in [\varepsilon_0, T]$ konvergiert auch der erste Term der rechten Seite von (8.5) lokal gleichmäßig, und zwar gegen $f(t, x)$, so dass $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}^n_T)$, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\text{für } \varepsilon \searrow 0 : \quad &\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon(t, x) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} u(t, x), \\
&\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = f(t, x) + \Delta u(t, x).
\end{aligned}$$

□

9 Eine nichtlineare Wärmeleitungsgleichung

Wir kommen auf die Reaktions-Diffusions-Gleichung aus Beispiel 1.7 zurück: Gegeben sei eine geeignete Nichtlinearität $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sowie ein Anfangsdatum $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$. Gesucht ist $T > 0$ und $u \in C_b^0(\overline{\mathbb{R}_T^n}) \cap C^{1,2}(\mathbb{R}_T^n)$ als Lösung von

$$\begin{cases} u_t(t, x) - \Delta u(t, x) = f(u(t, x)) & \text{für } (t, x) \in \mathbb{R}_T^n, \\ u(0, x) = \varphi(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (9.1)$$

Als Modell-Nichtlinearität kann man etwa an

$$f(u) = |u|^{p-1} u, \quad p > 1,$$

denken. Im Vergleich mit (8.1) aus § 8 stellt man fest: die rechte Seite ist nun nicht mehr explizit als Funktion von (t, x) gegeben, sondern in Abhängigkeit von der gesuchten (!) Lösung u . Das Problem ist nun nichtlinear!

Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen kann man nun nicht mehr mit der Existenz einer Lösung für alle positiven Zeiten rechnen, sondern die Bestimmung eines Existenzintervalls $[0, T]$ wird Bestandteil des Problems. Ebenso wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen wird man aber die nichtlineare Lösungstheorie auf den linearen Lösungsformeln aufbauen.

Formulieren wir das Cauchyproblem (9.1) mit Hilfe der Formel der Variation der Konstanten aus Satz 8.1 (in geeigneten Funktionenräumen äquivalent) um, so erhalten wir

$$u(t, x) = (e^{t\Delta}\varphi)(x) + \int_0^t (e^{(t-s)\Delta} f(u(s, \cdot)))(x) ds. \quad (9.2)$$

Statt einer Lösungsformel wie im linearen Fall haben wir nun eine Fixpunktgleichung für u zu betrachten.

Idee: den Banachschen Fixpunktsatz verwenden (wie beim Beweis z.B. des Satzes von Picard-Lindelöf), den wir kurz in Erinnerung rufen:

9.1 Satz (Banachscher Fixpunktsatz). *Sei V ein Banachraum, $A \subset V$ eine abgeschlossene Teilmenge. Sei*

$$F : A \rightarrow A$$

eine strikte Kontraktion, d.h. es gibt ein $q < 1$, so dass für alle $u, v \in A$ gilt:

$$\|F(u) - F(v)\| \leq q \|u - v\|.$$

Dann besitzt F genau einen Fixpunkt $u_0 \in A$, so dass also

$$F(u_0) = u_0.$$

Inbesondere ist also F als Lipschitz-stetig vorausgesetzt!

Formulieren wir also einen abstrakten Rahmen gemäß diesem Satz für das Fixpunktproblem (9.2), das wir nun (an Stelle von (9.1)) betrachten wollen. Für geeignetes, noch zu fixierendes $T > 0$, wählen wir

$$V := V_T := C_b^0(\overline{\mathbb{R}_T^n}), \quad \|w\|_V = \|w\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}_T^n})}$$

als Banachraum. Seien $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ im Folgenden fest; als (nichtlineare) Abbildung definieren wir

$$w(t, x) := (Fv)(t, x) := (e^{t\Delta}\varphi)(x) + \int_0^t (e^{(t-s)\Delta} f(v(s, \cdot))) (x) ds. \quad (9.3)$$

Gemäß dem Beweis von Satz 8.1, dort insbesondere Abschätzung (8.3), und der Stetigkeit von f haben wir

$$F : V \rightarrow V.$$

Bei der Definition der Menge A ist der „Anfangswertanteil“ besonders in Betracht zu ziehen; die rechte Seite wirkt für kleines T untergeordnet.

Wir fixieren eine Konstante $C_1 > 0$, so dass $\|\varphi\|_{C^0} \leq C_1$ und wählen beliebiges $C_2 > 0$:

$$A := A_T := \{v \in V : \|v(t) - e^{t\Delta}\varphi\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \text{ für } t \in [0, T]\}. \quad (9.4)$$

Sicher ist $A \subset V$ abgeschlossen, nun ist $T > 0$ so (klein) zu wählen, dass

$$F : A \rightarrow A \quad \text{und dort eine strikte Kontraktion wird.}$$

Zu diesem Zwecke bezeichne

$$\begin{aligned} M_1 &:= \max_{|v| \leq C_1 + C_2} |f(v)|, \\ M_2 &:= \max_{|v| \leq C_1 + C_2} |f'(v)|. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Um $F(A) \subset A$ zu erreichen, betrachten wir für $v \in A$; man beachte: $v \in A \Rightarrow \|v(t)\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 + C_2$. Wir haben für alle $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \|Fv(t) - e^{t\Delta}\varphi\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} &= \left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(v(s)) ds \right\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta} f(v(s))\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} ds \stackrel{\text{Satz 7.2, (7.4)}}{\leq} \int_0^t \|f \circ v\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}_T^n})} ds \\ &\leq T \cdot M_1 \stackrel{!}{\leq} C_2, \quad \text{so dass} \quad Fv \in A, \end{aligned}$$

sofern

$$\boxed{T \leq \frac{C_2}{M_1}}. \quad (9.6)$$

gewählt wird. Unter Beachtung von (9.6) haben wir also: $F : A \rightarrow A$. Um auch noch die strikte Kontraktionseigenschaft zu erhalten, betrachten wir für $u, v \in A$, $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|Fv(t) - Fu(t)\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} &= \left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} (f(v(s)) - f(u(s))) ds \right\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \\ &\stackrel{\text{Satz 7.2, (7.4)}}{\leq} \int_0^t \|f(v(s)) - f(u(s))\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} ds \\ &\leq T \cdot M_2 \|u - v\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}_T^n})}. \end{aligned}$$

Wählt man zusätzlich zu (9.6) T so, dass

$$\boxed{T < \frac{1}{M_2}}, \quad (9.7)$$

dann hat man mit

$$q := TM_2 < 1,$$

dass

$$u, v \in A \quad \Rightarrow \quad \|F(v) - F(u)\|_V \leq q \|v - u\|_V.$$

Damit liefert der Banachsche Fixpunktsatz: Wählt man T gemäß (9.6) und (9.7), so haben wir für jedes Datum $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\varphi\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C_1$ ein

$$u \in A \subset C_b^0(\overline{\mathbb{R}_T^n}), \quad u \text{ löst Fixpunktgleichung (9.2).}$$

Man überlegt sich direkt: Für alle f , die dieselben Schranken M_1, M_2 einhalten, hat man dasselbe garantierte Existenzintervall.

9.2 Satz. *Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $C_1, C_2 > 0$ beliebige Konstanten. Weiter seien $M_1, M_2 > 0$ so, dass*

$$\max_{|v| \leq C_1 + C_2} |f(v)| \leq M_1, \quad \max_{|v| \leq C_1 + C_2} |f'(v)| \leq M_2. \quad (9.8)$$

Dann gibt es eine Zeit $T > 0$, die nur (über (9.6), (9.7), (9.8)) von C_1, C_2, M_1, M_2 abhängt, so dass gilt:

Für jedes $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\varphi\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C_1$ gibt es eine Lösung

$$u \in C_b^0(\overline{\mathbb{R}_T^n})$$

der Fixpunktgleichung (9.2); für diese gilt

$$\|u\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}_T^n})} \leq C_1 + C_2.$$

Außerdem haben wir $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}_T^n)$, und u löst das Cauchyproblem (9.1):

$$\begin{cases} u_t(t, x) - \Delta u(t, x) = f(u(t, x)) & \text{für } (t, x) \in \mathbb{R}_T^n, \\ u(0, x) = \varphi(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Beweis. Nur der letzte Teil bleibt noch zu zeigen. Dazu reicht es zu zeigen, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f \circ u \in \bigcap_{\varepsilon > 0} C_b^0([\varepsilon, T] \times \mathbb{R}^n)$$

existieren und dann Satz 8.1 anzuwenden. Fixpunktgleichung (9.2) lautet:

$$u(t, x) = (e^{t\Delta}\varphi)(x) + \int_0^t (e^{(t-s)\Delta} f(u(s, \cdot))) (x) ds.$$

Der erste Term ist für $t > 0$ ohnehin beliebig glatt, beim zweiten könnte man wie im Beweis von Satz 8.1 verfahren oder direkt auf den Lebesgueschen Konvergenzsatz abheben: Der Integrand ist bzgl. x auf $[0, t]$ differenzierbar, und

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} (e^{(t-s)\Delta} f(u(s, \cdot))) \right\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} &\leq C \cdot |t-s|^{-\frac{1}{2}} \|f(u(s, \cdot))\| \\ &\leq C \cdot M_1 \cdot |t-s|^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Diese Singularität ist aber in $s \in [0, t]$ integrierbar, und es folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} \in \bigcap_{\varepsilon > 0} C_b^0([\varepsilon, T] \times \mathbb{R}^n).$$

Wegen $\frac{\partial}{\partial x_j} f(u) = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}$ folgt auch

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f \circ u \in \bigcap_{\varepsilon > 0} C_b^0([\varepsilon, T] \times \mathbb{R}^n);$$

und mit Satz 8.1 folgt die Behauptung. \square

9.3 Bemerkung. Da wir mit stetig differenzierbarer rechter Seite arbeiten, kann man in $C_b^0(\overline{\mathbb{R}_T^n}) \cap C^{1,2}(\mathbb{R}_T^n) \cap \bigcap_{0 < \varepsilon < T} C_b^{0,1}([\varepsilon, T] \times \mathbb{R}^n)$ Äquivalenz von (9.1) und (9.2) und damit insgesamt Eindeutigkeit zeigen; Hilfsmittel ist das Gronwallsche Lemma. Damit liegt es auf der Hand, dass man

T_{max} als maximale Existenzzeit von u zu f, φ

wohldefinieren kann; $T_{max} = T_{max}(\varphi, f)$.

In der Regel wird $T_{max} < \infty$ sein. Gelingt es aber, eine Konstante $C_1 > 0$ zu finden, so dass für jede Lösung, solange sie existiert, stets gilt

$$|u(t, x)| \leq C_1, \tag{*}$$

so ist $T_{max} = \infty$. Der Beweis ist ganz ähnlich wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen: Man nehme T aus Satz 9.2. Wegen (*) kann man sukzessive auf Intervallen der Länge T lösen; diese intervallweise definierten Lösungen kann man zu einer Lösung insgesamt verkleben. Da man das Verfahren unbegrenzt wiederholen kann, gelangt man so für alle Zeiten $t > 0$ zu einer Lösung. (Man beachte, dass T in Satz 9.2 nur von C_1, C_2, M_1, M_2 abhängt.)

Ob man eine a-priori-Abschätzung wie (*) erbringen kann, hängt z.B. von der Anwendbarkeit des Maximumprinzips und damit davon ab, ob die Nichtlinearität

$$u \mapsto f(u)$$

z.B. eine geeignete Vorzeichenbedingung erfüllt. Ist etwa stets $u \cdot f(u) \leq 0$ (plus geeignete technische Bedingungen an φ), so hat man globale Existenz, während man bei der typischen Reaktions-Diffusions-Nichtlinearität

$$f(u) = |u|^{p-1} u$$

mit „blow-up“ in endlicher Zeit rechnen. Dazu vgl. man unten Beispiel 9.5.

9.4 Bemerkung. Ist z.B. $f(u) = |u|^{p-1} u$, $p > 1$, so hat man neben Kurzzeitexistenz noch ein weiteres Charakteristikum für semilineare Wärmeleitungsgleichungen in (9.1) in Ω und homogenen Randbedingungen:

Falls

$$\begin{cases} p > 1, & \Omega \text{ beschränkt,} \\ p > 1 + \frac{2}{n}, & \Omega = \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

so hat man bei hinreichend kleinen Anfangsdaten $\|(1 + |x|)^{2/(p-1)}\varphi(x)\|_{C^0} \leq \varepsilon_0$ **globale** Existenz von Lösungen.

Dazu zeigt man mit Hilfe des superlinearen Verhaltens von f nahe 0, dass die Lösung, so lange sie existiert, klein bleibt. Laut Bemerkung 9.3 hat man dann für alle Zeiten eine Lösung.

Wird $\|(1 + |x|)^{2/(p-1)}\varphi(x)\|_{C^0}$ hingegen groß, muss man mit blow up in endlicher Zeit rechnen, wie das folgende Beispiel zeigt.

9.5 Beispiel (Blow up in endlicher Zeit). Wir betrachten das semilineare Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= u^3 & \text{für } t > 0, x \in (0, \pi), \\ u(0, x) &= \varphi(x) & \text{für } x \in (0, \pi), \quad \text{Kompatibilitätsbed.: } \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0. \\ u(t, 0) &= u(t, \pi) = 0 & \text{für } t > 0. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Indem man φ ungerade nach $(-\pi, \pi)$ und dann 2π -periodisch nach \mathbb{R} fortsetzt, kann man aus Satz 9.2 lokale Existenz in der Zeit einer Lösung erschließen. Indem man auch $u(t, -x)$ und $u(t, x + 2\pi)$ betrachtet, so kann man mit dem (hier nicht bewiesenen) Eindeigkeitsresultat für (9.1) auch das Erfülltsein der Randbedingungen zeigen.

Wir wollen Anfangsdaten φ finden, für die die Lösung nach endlicher Zeit aufhört zu existieren, so dass also $T_{max} < \infty$ gilt. Dazu setzen wir voraus, dass

$$\varphi \geq 0, \quad \varphi \not\equiv 0.$$

Aus dem starken Maximumprinzip (ebenfalls nicht bewiesen) kann man folgern, dass

$$\forall t > 0, \forall x \in (0, \pi) : \quad u(t, x) > 0, \text{ solange } u \text{ existiert.} \quad (9.10)$$

Die entscheidende Größe wird

$$S(t) = \int_0^\pi u(t, x) \sin x dx \quad (9.11)$$

sein, wir wollen $S(t) \nearrow \infty$ in endlicher Zeit nachweisen. Dazu leiten wir eine gewöhnliche Differentialungleichung für $S(t)$ her, indem wir die Differentialgleichung aus (9.9) mit $\sin x$ testen:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi u(t, x)^3 \sin x dx &= \int_0^\pi u_t(t, x) \sin x dx - \int_0^\pi u_{xx}(t, x) \sin x dx \\ &= S'(t) + \int_0^\pi u_x(t, x) \cos x dx = S'(t) + \int_0^\pi u(t, x) \sin x dx \\ &= S'(t) + S(t). \end{aligned} \quad (9.12)$$

Ziel ist die Herleitung einer Differentialungleichung

$$S'(t) + \underbrace{S(t)}_{\text{dämpft}} \geq \varepsilon \underbrace{S^3(t)}_{\text{treibt}}.$$

Bei kleinen S erwarten wir Dominanz des linearen dämpfenden Terms, bei großen dagegen des treibenden nichtlinearen Terms und damit blow-up. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned} S(t)^3 &= \left(\int_0^\pi u(t, x) \sin x dx \right)^3 = \left(\int_0^\pi \underbrace{\left(u(t, x) \sin^{\frac{1}{3}} x \right)}_{p=3} \cdot \underbrace{\sin^{\frac{2}{3}} x}_{q=\frac{3}{2}} dx \right)^3 \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_0^\pi u(t, x)^3 \cdot \sin x dx \right) \cdot \left(\int_0^\pi \sin x dx \right)^2 \leq 4 \int_0^\pi u(t, x)^3 \sin x dx. \end{aligned}$$

Es folgt aus (9.12):

$$S'(t) + S(t) \geq \frac{1}{4} S^3(t). \quad (9.13)$$

Solange u existiert, ist wegen (9.10) $S(t) > 0$, und wir können aus (9.13) folgern:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{S'}{S^3} \geq \frac{1}{4} \left(1 - \frac{4}{S^2(t)}\right) \\
\Rightarrow \left(1 - \frac{4}{S^2}\right)' &\geq 2 \left(1 - \frac{4}{S^2}\right) \\
&\Rightarrow 0 \leq \left(1 - \frac{4}{S^2}\right)' - 2 \left(1 - \frac{4}{S^2}\right) = e^{2t} \left(e^{-2t} \left(1 - \frac{4}{S^2}\right)\right)' \\
&\Rightarrow 0 \leq \left(e^{-2t} \left(1 - \frac{4}{S^2}\right)\right)' \\
\Rightarrow 1 - \frac{4}{S^2(0)} &\leq e^{-2t} \left(1 - \frac{4}{S^2(t)}\right) \\
\Rightarrow 1 - \frac{4}{S^2(t)} &\geq e^{2t} \left(1 - \frac{4}{S^2(0)}\right).
\end{aligned}$$

Wir setzen nun voraus, dass

$$1 - \frac{4}{S^2(0)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad S(0) = \int_0^\pi \varphi(x) \sin x dx > 2. \quad (9.14)$$

Dann gilt nach endlicher Zeit $1 - \frac{4}{S^2(t)} \nearrow 1$, d.h. $S(t) \nearrow \infty$. Das ist der Fall für ein $t \leq T_{crit}$ mit

$$\begin{aligned}
1 &= \exp(2T_{crit}) \left(1 - \frac{4}{S^2(0)}\right) \\
\Leftrightarrow -2T_{crit} &= \log \left(1 - \frac{4}{S^2(0)}\right) \\
\Leftrightarrow T_{crit} &= \log \sqrt{\frac{S^2(0)}{S^2(0) - 4}}
\end{aligned}$$

Das bedeutet: Ist $\varphi \in C^0([0, \pi])$, $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$, $0 \not\equiv \varphi \geq 0$, so dass

$$\underline{\underline{\int_0^\pi \varphi(x) \sin x dx > 2}},$$

dann explodiert die zugehörige Lösung spätestens zur Zeit

$$\underline{\underline{T_{crit} = \log \sqrt{\frac{(\int_0^\pi \varphi(x) \sin x dx)^2}{(\int_0^\pi \varphi(x) \sin x dx)^2 - 4}}}},$$

so dass $T_{max}(\varphi) \leq T_{crit}(\varphi)$.

Teil III

Hyperbolische Probleme

10 Die einfachste partielle Differentialgleichung erster Ordnung

Trotz der Einfachheit des folgenden Problems und seiner Lösung wird dieses wichtige Einsichten in hyperbolische Gleichungen und die Ausbreitungsmechanismen von anfänglichen Störungen liefern.

Das Cauchyproblem für die lineare homogene Transportgleichung

Es sei an das Anfangswertproblem aus dem Modellbildungsabschnitt 1.2 erinnert. Gegeben sei ein konstanter Vektor $b \in \mathbb{R}^n$, eine geeignete Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ als Anfangsdatum. Gesucht ist $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ als Lösung des folgenden **Cauchyproblems**:

$$\begin{cases} u_t(t, x) + \langle b, \nabla u(t, x) \rangle = 0 & \text{für } (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = \varphi(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (10.1)$$

Wir wollen hier so vorgehen: Angenommen, es existiert bereits eine Lösung $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Daraus sollen notwendige Bedingungen an φ und die Gestalt von u (Darstellungsformel) hergeleitet werden, wobei direkt ein Eindeigkeitsresultat mit abfällt.

Wir erinnern an die Bedeutung von (10.1) aus der Herleitung: dieses Problem modelliert die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit b . Ist die Herleitung korrekt, so erwarten wir, dass die Lösung u für beliebiges $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ auf den Linien

$$\mathbb{R} \ni s \mapsto (t + s, x + sb) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad (10.2)$$

konstant ist. In der Tat gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} u(t + s, x + sb) & \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} u_t(t + s, x + sb) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(t + s, x + sb) b_i \\ & = u_t + \langle b, \nabla u \rangle \stackrel{(10.1)}{=} 0. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir notwendigerweise durch die Betrachtung von $s = 0$ und $s = -t$:

$$u(t, x) = u(t - t, x - tb) = u(0, x - tb) \stackrel{(10.1)}{=} \varphi(x - tb).$$

Für $t = 0$ sieht man außerdem, dass $u \in C^1$ zwingend

$$\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$$

erfordert.

10.1 Satz. Sei $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Dann besitzt das Anfangswertproblem (10.1) für die Transportgleichung mit konstanter Ausbreitungsgeschwindigkeit $b \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Diese ist durch die Formel

$$u(t, x) = \varphi(x - tb), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad (10.3)$$

gegeben.

Beweis. „Eindeutigkeit“: Herleitung von φ .

„Existenz“: Definiere u gemäß (10.3) und verifiziere (10.1). \square

Bemerkungen. Im Gegensatz zu parabolischen Problemen haben wir hier auch eine Lösung „rückwärts in der Zeit“ sowie endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Positive und negative Zeiten sind gleichberechtigt; die Funktion $(t, x) \mapsto u(-t, x)$ löst (10.1) mit $-b$, und das Vorzeichen von b spielt bei Satz 10.1 keine Rolle. Bei nichtlinearen Erhaltungsgleichungen können in Abhängigkeit von der Gestalt des Anfangsdatums für $t > 0$ und $t < 0$ verschiedene Effekte auftreten; dadurch wird aber die grundsätzliche Gleichberechtigung von $t > 0$ und $t < 0$ nicht aufgehoben.

Man beachte, dass Lösungsformel (10.3) auch für lediglich stetige Anfangsdaten Sinn macht. Man erhält dann $u \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, welches (10.1) im schwachen Sinne löst.

Die inhomogene Transportgleichung

Man denke an Teilchenquellen/-senken. Gegeben seien konstantes $b \in \mathbb{R}^n$ und geeignete Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Gesucht ist $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ als Lösung von

$$\begin{cases} u_t(t, x) + \langle b, \nabla u(t, x) \rangle = f(t, x) & \text{für } (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = \varphi(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (10.4)$$

Wir gehen wieder davon aus, dass bereits eine Lösung $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ vorliegt. Notwendigerweise ist dann $\varphi \in C^1$, $f \in C^0$.

Wie oben betrachten wir wieder die Lösung auf der Geraden (10.2):

$$\frac{d}{ds} u(t + s, x + sb) = u_t + \langle b, \nabla u \rangle \stackrel{(10.4)}{=} f(t + s, x + sb).$$

Immerhin reduziert sich so das Auflösen von (10.4) auf das direkte Integrieren einer gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} u(t, x) - u(0, x - tb) &= \int_{-t}^0 \frac{d}{ds} u(t + s, x + sb) ds \\ &= \int_{-t}^0 f(t + s, x + sb) ds \stackrel{\text{Subst. } s=\tau-t}{=} \int_0^t f(\tau, x - (t - \tau)b) d\tau, \end{aligned}$$

notwendigerweise gilt also

$$u(t, x) = \varphi(x - tb) + \int_0^t f(\tau, x - (t - \tau)b) d\tau;$$

die Ähnlichkeit mit der Formel der Variation der Konstanten aus Satz 8.1 ist unübersehbar.

Um im folgenden Satz Differenzierbarkeit von u erhalten zu können, müssen wir die Voraussetzungen an f noch verschärfen; wozu die Notwendigkeit außer im Fall $b = 0$ zunächst nicht unmittelbar auf der Hand liegt.

10.2 Satz. *Sei $b \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ so, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ existieren. Dann besitzt das Anfangswertproblem (10.4) für die inhomogene Transportgleichung mit konstanter Ausbreitungsgeschwindigkeit b genau eine Lösung $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Für diese gilt*

$$u(t, x) = \varphi(x - tb) + \int_0^t f(s, x - (t - s)b) ds. \quad (10.5)$$

Beweis. „Eindeutigkeit“: Herleitung von (10.5).

„Existenz“: Man definiere u gemäß (10.5). Da die $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existieren, ergibt die Anwendung der parameterabhängigen Riemann-Integrale auf relativ-kompakten (t, x) -Bereichen $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Außerdem ist unter Verwendung der Kettenregel bei der $\frac{\partial}{\partial t}$ -Differentiation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \langle b, \nabla u \rangle &= -\langle \nabla \varphi(x - tb), b \rangle + f(t, x) + \int_0^t \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, x - (t - s)b) \cdot (-b_i) ds \\ &\quad + \langle b, \nabla \varphi(x - tb) \rangle + \sum_{i=1}^n b_i \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, x - (t - s)b) ds \\ &= f(t, x). \end{aligned}$$

□

10.3 Bemerkung. Die Lösung u von (10.4) liegt im Punkte (t, x) fest, wenn f auf der Geraden

$$C_{(t,x)} = \{(s + t, x + sb) \quad : \quad s \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

bzw. genauer auf deren Teil mit $0 \leq -s \cdot \operatorname{sgn}(t) \leq t \cdot \operatorname{sgn}(t)$ und φ auf dem Schnittpunkt dieser Geraden mit $\{s = 0\} = \{0\} \times \mathbb{R}^n$ bekannt ist. Das steht im krassen Gegensatz zu Lösungen parabolischer Gleichungen, wo man alle Daten für $s \leq t$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ benötigt. (Hier endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit; unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit bei parabolischen Gleichungen.)

Man nennt die Geraden $C_{(t,x)}$ **Charakteristiken**. Dieses Konzept wird sich auch in verallgemeinerter Form bei nichtlinearen Erhaltungsgleichungen erster Ordnung als grundlegend erweisen: Es reduziert die partielle Differentialgleichung erster Ordnung auf eine Schar gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme. Dazu vgl. man unten § 15.

Man beachte auch: Eindeutigkeitsverhalten ist hier einfacher als bei parabolischen Gleichungen.

10.4 Beispiel. Zur Notwendigkeit der Differenzierbarkeitsbedingung an f in Satz 10.2. Wir betrachten dazu das Cauchyproblem:

$$\begin{cases} u_t + u_x = |t - x| & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = 0 & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (10.6)$$

Angenommen, wir hätten eine Lösung $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ von (10.6), so wäre diese gemäß der Herleitung von Satz 10.2 gegeben durch die Formel (10.5):

$$u(t, x) = \int_0^t |s - (x - (t - s))| ds = \int_0^t |x - t| ds = t|x - t|.$$

Diese Funktion ist aber für $t \neq 0$, $t = x$ nicht differenzierbar.
(Man beachte den Gegensatz zum regularisierenden Verhalten elliptischer Gleichungen.)