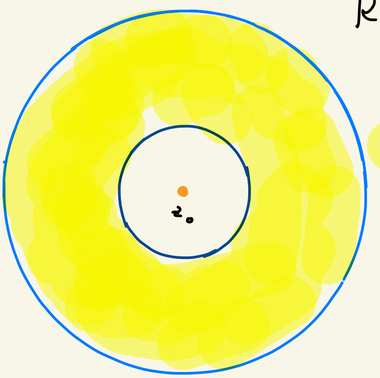


Ringgebiet

$R(z_0, \varrho_1, \varrho_2)$

$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \underline{b} \quad (*) \qquad \underline{\underline{A}} \in Mat(n, n, \mathbb{R})$

$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\tilde{x}} = \underline{0} \quad (*)_h$

Superpositionsprinzip

(i) Die Lsgen. von $(*)_h$ spannen einen lin. VR auf. $\underline{x}^{1,h}, \underline{x}^{2,h}$ Lsg. von $(*)_h$

$(\det \underline{\underline{A}} \neq 0)$ Lösungsraum $\tilde{L} = \{\underline{0}\}$

(ii) Zwei Lsgen von $(*)$ $\underline{z}^1, \underline{z}^2$

Satz 0.11 :

$$\| f \|_{\mathbb{L}_p(\Omega)} \leq \| \underline{\nabla} f \|_{\underline{\mathbb{L}}_p(\Omega)}$$

$$1 < p < \infty$$

Idee : $\underbrace{D^{\underline{\alpha}} f}$: $\| D^{\underline{\alpha}} f \|_{\mathbb{L}_p(\Omega)} \leq \| \underline{\nabla} D^{\underline{\alpha}} f \|_{\underline{\mathbb{L}}_p(\Omega)}$

$\| \underline{\alpha} \|_1 < m$

$$\| \underline{\alpha} + [\delta_{ik}] \|_1 = m \qquad C_0^\infty(\Omega)$$

$T \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^n)$; $T = T_f$, $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$\left| T_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{x}) \underbrace{\varphi(\underline{x})}_{\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} d\underline{x} \right| < \infty$$

$f \in L_1^{loc}$, T_f wohldef. Distribution vom Typ einer Fkt.

z.B. $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^n) \subset L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$

Distrib. vom Typ einer Fkt. nennt man reguläre Distribution

$$W_2^m(\mathbb{R}^n) \subset L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$$

2. Klasse : Singuläre Distrib.

haben Eigenschaft

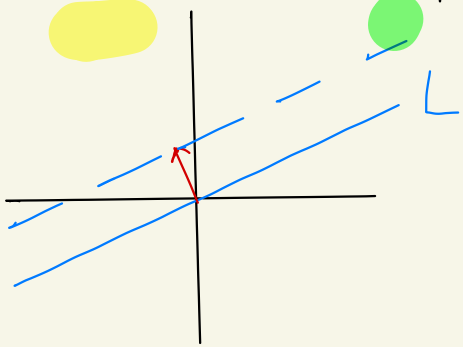
$\underline{z}^1 - \underline{z}^2 = \underline{x}$ ist Lsg. von $(*)_h$

(iii) Allgem. Lsg. von $(*)$

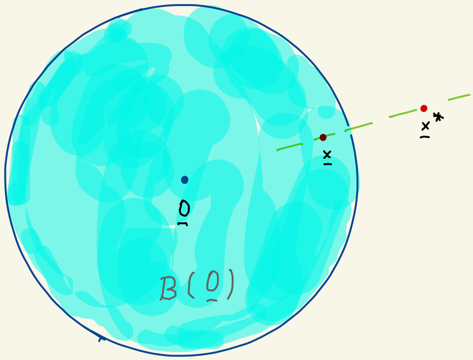
hat die Gestalt eines affinen Raumes:

$$M = \{ \underline{z} \in E^n : \underbrace{\underline{z} = \underline{z}^1}_{\text{spez. Lsg. von } (*)} + \underline{y} \text{ mit } \underline{y} \text{ - bel. Lsg. von } (*)_h \}$$

$M = \underline{z} = \underline{z}^1 + L$



Prinzip gilt analog für lin. gew. DGL k-ter Ordnung und lin. PDGL.



$$\underline{\Phi}(\underline{\xi}) \in \left[C^2(\Omega)\right]^n = \underline{C}^2(\Omega)$$

Diffeomorphismen

$$\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial \underline{\xi}} \cdot \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{\Phi}} = \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \frac{d\Phi_1}{d\Phi_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \frac{d\Phi_n}{d\Phi_n} \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial \underline{\xi}} \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{\Phi}}\right)^T = \left(\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{\Phi}}\right)^T \left(\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial \underline{\xi}}\right)^T = \underline{\underline{E}}$$

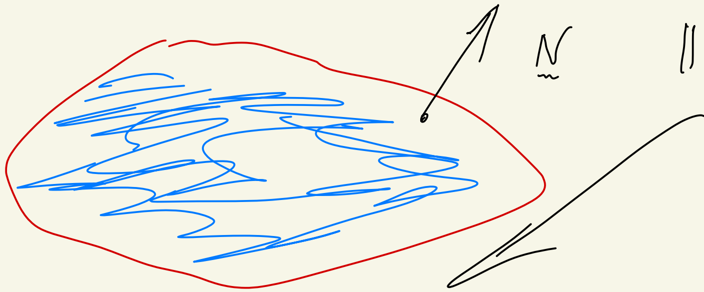
$$\underline{\underline{E}} = \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{\Phi}} \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial \underline{\xi}} \Rightarrow \left(\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial \underline{\xi}}\right)^T \left(\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{\Phi}}\right)^T = \underline{\underline{E}}$$

$$\underline{\underline{A}} = \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial \underline{\xi}}, \quad \underline{\underline{B}} = \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{\Phi}}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{E}}, \quad \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$$

$$\underline{\underline{G}} = \left(\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial \underline{\xi}}\right)^T \left(\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial \underline{\xi}}\right) = \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}$$

$$\underline{\underline{G}}^{-1}$$



$\underset{\sim}{N}$ $\quad \|\underset{\sim}{N}\|_{E^n}$

1. Art $\quad \int \rho(\underline{x})\, dO(\underline{x}) \quad$ 1. Art

$\|\underline{N}\|\, dt_1 \dots dt_{n-1} \qquad \underline{x} = x(t$

$$\int \underline{u}^T(\underline{x}) \cdot \overbrace{\underline{n}\, dO(\underline{x})} = \int \underline{u}^T d\underline{O}$$

$\underline{n} = \underline{N} \cdot \frac{1}{\|\underline{N}\|}$

2. Art.

$$-\frac{d^2}{dx^2} u(x) = \lambda u(x), \quad u(0) = u(\pi) = 0$$

$$w_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin(kx), \quad \lambda_k = k^2$$

$$\mathbb{L}_2(0,\pi) = \overline{\operatorname{span}\{w_k\}_{k=1}^{\infty}}$$

$$(*) \quad -\frac{d^2}{dx^2} u(x) = f(x), \quad u(0) = u(\pi) = 0$$

$$f \in C[0,\pi]$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k w_k(x), \quad f_k := (f, w_k)_{\mathbb{L}_2(0,\pi)}$$

$$= \int_0^{\pi} f(x)\, w_k(x)\, dx$$

Suchen nun Lsg. von $(*)$

in Gestalt von $\sum_{k=1}^{\infty} u_k w_k(x) = u(x)$

Einsetzen in $(*)$ liefert:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\, w_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 u_k\, w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k\, w_k(x)$$

$$(\cdot\, , w_j)_{L_2(0,\pi)}$$

$$(w_k, w_j)_{L_2(0,\pi)} = \delta_{kj}$$

$$u_j = \frac{1}{j^2} f_j \qquad \forall j = 1, \dots, \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} f_k\right) w_k(x) = u(x)$$

Sonst: F-Reihen $[-\pi, \pi)$

Systeme $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx\right\}_{k \in \mathbb{N}} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos lx\right\}_{l \in \mathbb{N}}$

$\cup \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos 0 \cdot x\right\}$

$L_2(-\pi, \pi)$

analog: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$

Sobolev-Räume

Räume mit verallgem. Ableitungen

$\Omega \subset \mathbb{E}^n$, Ω - Gebiet, beschränkt.

$$\mathbb{L}_p(\Omega) = \left(\left\{ [f] : \exists \int_\Omega |f|^p d\underline{x} < \infty \right) ; \; \|[f]\|_{L_p(\Omega)} = \sqrt[p]{\int_\Omega |f|^p d\underline{x}} \right)$$

$$= \left(L_p(\Omega), \|\cdot\|_{L_p(\Omega)} \right)$$

$$D^{\underline{\alpha}} f(\underline{x}) = \frac{\partial^{\|\underline{\alpha}\|_1}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} f(\underline{x})$$

$$\int_\Omega g(\underline{x}) \varphi(\underline{x}) d\underline{x} = (-1)^{\|\underline{\alpha}\|_1} \int_\Omega f(\underline{x}) D^{\underline{\alpha}} \varphi(\underline{x}) d\underline{x}$$

$\varphi(\underline{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$, $g(\underline{x}) \simeq D^{\underline{\alpha}} f(\underline{x})$

$\|\underline{\alpha}\|_1 \leq m \in \mathbb{N}$

$$\left\{ [f] \in \mathbb{L}_p(\Omega) : \exists [D^{\underline{\alpha}} f] \in \mathbb{L}_p(\Omega), \|\underline{\alpha}\|_1 \leq m \right\} = W_p^m(\Omega)$$

$$\|f\|_{W_p^m(\Omega)} := \left(\sum_{\underline{\alpha} : \|\underline{\alpha}\|_1 \leq m} \left(\| D^{\underline{\alpha}} f \|_{\mathbb{L}_p(\Omega)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Im $W_2^2(\Omega)$ ist $-\Delta$ wohldef.

weil $-\Delta f \in \mathbb{L}_2(\Omega)$

$f \in W_2^2(\Omega)$

$L_1^{loc}(\Omega)$ / $\Omega = \mathbb{R}^n$

L_1^{loc} : Lin. VR aller L-intb. Fkt. über jedem Kompaktum in Ω,

d.h. $\forall \tilde{\Omega}$ komp. und $\tilde{\Omega} \subset \Omega$

$\exists \int_{\tilde{\Omega}} |f(\underline{x})|^1 d\underline{x}$:

$\Omega \subset \mathbb{E}^n$ beschr. Gebiet „schön"

betrachten $u \in \mathbb{C}^m(\bar{\Omega})$, mit $\underline{\alpha}$:

$\|\underline{\alpha}\|_1 = m$, $m \in \mathbb{N}_0$

$\mathbb{C}^m(\bar{\Omega}) = \left(C^m(\bar{\Omega}), \|.\|_{\mathbb{C}^m(\bar{\Omega})} \right)$

$$\|u\|_{\mathbb{C}^m(\bar{\Omega})} = \sum_{\underline{\alpha}:\|\underline{\alpha}\|_1 \le m} \|D^{\underline{\alpha}} u\|_{\mathbb{C}^0(\bar{\Omega})}$$

$\beta \in (0,1)]$

$u \in C^m(\bar\Omega)$, β - fix

$$V = \{ u \in C^m(\bar\Omega) : \exists H_{m,\beta}(u) = \max_{\alpha : \|\alpha\|_1 = m} \sup_{x \neq y} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{\|x - y\|_{E^n}^\beta} \}$$

Setzen $V = C^{m,\beta}(\bar\Omega)$

$H_{m,\beta}$ - heißt Hölder-Konstante

Der Raum $C^{m,\beta}(\bar\Omega) = (C^{m,\beta}(\Omega), \|\cdot\|_{C^{m,\beta}(\bar\Omega)})$

heißt Hölder-Raum.

Setzen $\forall u \in C^{m,\beta}(\bar\Omega) : \|u\|_{C^{m,\beta}(\bar\Omega)} = \|u\|_{C^m(\bar\Omega)} + H_{m,\beta}(u)$

$\beta = 1$ Lipschitzraum

„Lipschitz-Sprung"

Hier $C^{m,1}(\bar\Omega) = C^{m+1}(\bar\Omega) \underset{\neq}{\supset} C^{m+1}(\bar\Omega)$

Interpolationstheorie

Sobolev - Slobodeckii

Ω - beschr., $p \in [1, \infty)$, $m \in \mathbb{N}_0$

$W_p^m(\Omega)$, $\Omega \subset E^n$, $p = 2$

Nehmen lin. VR $W_p^m(\Omega)$

$\underline{\alpha} : \|\underline{\alpha}\|_1 = m$

überprüfen Existenz von:

$$\underbrace{\int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^{\underline{\alpha}} u(\underline{x}) - D^{\underline{\alpha}} u(\underline{y})|^p}{\|\underline{x} - \underline{y}\|^{n+p\beta}} \, d\underline{x} \, d\underline{y}}_{\forall u \in W_p^m(\Omega)} = S_{\underline{\alpha}, m, p, \beta}(u)$$

β - fix. Sehen , $\beta \in (0,1)$

$$V^* = \{ u \in W_p^m(\Omega) : \exists S_{\underline{\alpha}, m, p, \beta}(u) \; \forall \underline{\alpha} : \|\underline{\alpha}\|_1 = m \}$$

Sehen $\forall u \in V^* = W_p^{m,\beta}(\Omega)$

$$\left(\|u\|_{W_p^{m,\beta}(\Omega)} \right)^p = \|u\|^p_{W_p^m(\Omega)} + \sum_{\underline{\alpha} : \|\underline{\alpha}\|_1 = m} S_{\underline{\alpha}, m, p, \beta}(u)$$

Anwendung: $W_2^1(\Omega)$

hat Spüroperator γ_0

$$\gamma_0 : W_2^1(\Omega) \longrightarrow W_2^{0,\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

Fourier - Transformation

$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ schnell fallende Fktn.

$$\tilde{\mathcal{F}}\varphi = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{e^{-i\underline{\xi}^T\underline{x}}}_{\text{unimod. Zahl}} \varphi(\underline{x})\, dx_1 \dots dx_n = (\tilde{\mathcal{F}}\varphi)(\underline{\xi})$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}^{-1}\varphi = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\underline{\xi}^T\underline{x}} \varphi(\underline{x})\, dx_1 \dots dx_n$$

- Aus Ableitungen werden Produkte
  Aus Produkten werden Ableitungen

Polynome, $\underline{x} \in \mathbb{F}^n$, $\underline{\alpha} \in (\mathbb{N}_0)^n$

$$\underline{x}^{\underline{\alpha}} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

(vgl. verallgem. Ableitungen)

Polynom m-ten Grades, $a_{\underline{\alpha}} \in \mathbb{C}$

$$P_m(\underline{x}) = \sum_{\underline{\alpha} : \|\underline{\alpha}\|_1 \le m} a_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}}$$

(Multiindex - schreibweise)

$$|P_m(\underline{x})| \le c\,(\underbrace{1 + \|\underline{x}\|_{E^n}}^{m})$$

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathbb{D}(\mathbb{R}^n)$$

$$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \supset \mathbb{D}(\mathbb{R}^n)$$

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{D}'(\mathbb{R}^n)$$

Temp. Distrib.

$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ – Distrib. mit Komp. Träger

„δ – Distribution"

$$\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

Def: Eine Abb. $S: \mathbb{H} \to \mathbb{H}_1$ heißt isom., wenn $\forall x, y \in \mathbb{H}$:
$(x, y)_{\mathbb{H}} = (Sx, Sy)_{\mathbb{H}_1}$
S heißt unitär, wenn $S\mathbb{H} = \mathbb{H}_1$

Satz: Die $\mathcal{F}$ – Trf. bildet $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^n)$ auf den $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^n)$ ab und ist unitär.

„Fixpkt"

$$f(\underline{x}) = \exp\left(-\frac{\|\underline{x}\|^2}{2}\right)$$

$$(\tilde{\mathcal{F}} f)(\underline{\xi}) = \exp\left(-\frac{\|\underline{\xi}\|^2}{2}\right)$$

Verbindung zwischen „gewichteten" Lebesgue-Räumen und Sobolev-Räumen:

$$W_2^m(\mathbb{R}^n), \quad p_m(\underline{x}) = \left(1 + \|\underline{x}\|^{2m}_{\mathbb{E}^n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(f, g)_{\mathbb{L}_{2,p}} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + \|\underline{x}\|^{2m}_{\mathbb{E}^n}\right) f(\underline{x})\, \overline{g}(\underline{x})\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$W_2^m(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \mathbb{L}_{2,p_m}(\mathbb{R}^n)$$

$$T : \mathbb{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{E}^1_{\mathbb{C}} \; (= \mathbb{C})$$

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{D}, \; \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}:$$

$$T(\beta_1 \varphi_1 + \beta_2 \varphi_2) = \beta_1 T\varphi_1 + \beta_2 T\varphi_2$$

$$\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \xrightarrow[\mathbb{D}]{} \varphi$$

Stetigk.

$$\{T\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \longrightarrow T\varphi$$

T – Distribution, $(D^{\underline{\alpha}} T)(\varphi) := (-1)^{\|\underline{\alpha}\|_1} T(D^{\underline{\alpha}} \varphi)$

$\mathbb{D}'(\mathbb{R}^n)$

Satz 0.11 :

$$\| f \|_{\mathbb{L}_p(\Omega)} \leq \| \underline{\nabla} f \|_{\underline{\mathbb{L}}_p(\Omega)}$$

$1 < p < \infty$

Idee : $\underbrace{D^{\underline{\alpha}} f}$: $\| D^{\underline{\alpha}} f \|_{\mathbb{L}_p(\Omega)} \leq \| \underline{\nabla} D^{\underline{\alpha}} f \|_{\underline{\mathbb{L}}_p(\Omega)}$

$\| \underline{\alpha} \|_1 < m$

$$\| \underline{\alpha} + [\delta_{ik}] \|_1 = m \qquad C_0^\infty(\Omega)$$

$T \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^n)$; $T = T_f$, $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$\left| T_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{x}) \underbrace{\varphi(\underline{x})}_{\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} d\underline{x} \right| < \infty$$

$f \in L_1^{loc}$, T_f wohldef. Distribution vom Typ einer Fkt.

z.B. $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^n) \subset L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$

Distrib. vom Typ einer Fkt. nennt man reguläre Distribution

$W_2^m(\mathbb{R}^n) \subset L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$

2. Klasse : Singuläre Distrib.

Bsp: $\delta_{\underset{\sim}{0}}$: $\delta_{\underline{0}}(\varphi) := \varphi(\underset{\sim}{0})$

Begriff: Träger einer Distribution. $\operatorname{supp} \delta = \{\underline{0}\}$

δ - Distrib. mit beschr. Träger

$$\tilde{f}(\delta_{\underline{0}}) = \frac{1}{\sqrt[2]{(2\pi)^n}} \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$$

$$\delta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$$

Wir haben einen lin. VR

Bezeichnung: $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Nullelement: $\mathcal{O}_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)}$:

$\mathcal{O}_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)}(\varphi) = 0$ - Zahl „0"

$$\mathcal{O}_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)} \cong f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$$

mit $f \equiv 0$ f.ü. in $\mathbb{R}^n$

<u>Einschränkung</u> von Distrib.

$\Omega, \Omega' \subset \mathbb{E}^n$ (messbar)

$\Omega \supset \Omega'$.

Die Distrib. T sei erklärt auf $\mathcal{D}(\Omega)$: $T(\varphi)$ sauber erklärt $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Schränken wir ein: $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$

Dann ist T auch Distrib. auf $\mathcal{D}(\Omega')$. Dann schreiben wir:

$T_{\Omega'}$ - für die Einschr. von T auf $\mathcal{D}(\Omega')$.

Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{E}^n$) und

$B_\varepsilon(\underline{x}) = \{ y \in \mathbb{E}^n : \| \underline{x} - y \|_{\mathbb{E}^n} < \varepsilon \}$

Wir können nun:

$T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ betrachten als:

$T_{B_\varepsilon(\underline{x})}$ im Einschränkungssinne.

Def: Träger einer Distrib. ($\Omega = \mathbb{R}^n$)

$$\mathrm{supp}_D\, T := \{ \underline{x} : T_{B_\varepsilon(\underline{x})} \neq 0_{\mathcal{D}'(B_\varepsilon(\underline{x}))} \;\; \forall \varepsilon > 0 \}$$

Bekannt: Träger einer Fkt.

$$\mathrm{supp}_F\, f := \{ \underline{x} : f(\underline{x}) \neq 0 \}$$

Bsp: $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$,

dann ist (vgl. die Fkt.

$f = 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} \neq \underline{q},\ q \in \mathbb{Q}^n$

$f(\underline{q}) = 1 \quad \forall \underline{q} \in \mathbb{Q}^n$)

$\operatorname{supp}_D T_f = \emptyset \subset \operatorname{supp}_F f = \mathbb{R}^n$

Standard - Eigenschaft:

$\operatorname{supp}_D T_f \subset \operatorname{supp}_F f$

Bsp: $\delta = \delta_{\{\underline{0}\}}$: $\delta(\varphi) = \varphi(\underline{0})$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Spaß: Triebel: $B_\varepsilon(\underline{0})$

$\operatorname{supp}_D \delta = \{\underline{0}\}$

$\delta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\delta(\varphi) = 0$

$\operatorname{supp} \varphi \not\ni \{\underline{0}\}$

Bsp: $f(\underline{x}) = 27 \quad \forall \underline{x} \in B_R(\underline{0})$

$f(\underline{x}) = 0 \quad \forall \underline{x} \notin B_R(\underline{0})$

Dann ist $T = T_f + \delta_{\{\underline{0}\}} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$

Bsp. $P_m(\underline{x}) \notin L_1(\mathbb{R}^n)$

aber über Kopplung

mit $\mathcal{F}$2d. $P_m(\underline{x}) \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$

$T_{P_m} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$\Omega \subset \mathbb{E}^n$: $\delta_{\{\underline{x}^0\}} = \delta_{\underline{x}^0}$ mit

$$\delta_{\underline{x}^0}(\varphi) := \begin{cases} \varphi(\underline{x}^0) & \text{bei } \underline{x}^0 \in \Omega \\ 0 & \text{bei } \underline{x}^0 \notin \Omega \end{cases}$$

Bezeichnung nach Bsp. 7.6

Script_PDE_ING.pdf

$$u(t,x) = \mathcal{U} = \frac{x(t)}{2}\left(\int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(s,y)\,dy\,ds + \left(u_0(x+t) + u_0(x-t)\right) + \int_{x-t}^{x+t} u_1(y)\,dy\right)$$

(vgl. VL Bem. 11.5)

$u_1 \in C^1(\mathbb{R}^1)$, $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^1)$, $\mathcal{F} \cong f \in L_1^{loc}(\bullet)$

„$\bullet = \mathbb{E}^2$, $\operatorname{supp} \mathcal{F} = \operatorname{supp} T_f \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^1$

$f \in C^1([0,\infty) \times \mathbb{R}^1)$ $\quad \mathcal{U}_0 \otimes \delta_0' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$

$\mathcal{U}_0 = T_{u_0}$

$\mathcal{U}_0 \cong u_0$, $\mathcal{U}_1 \cong u_1$, $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial t^2} - 1\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} = \mathcal{F} + \mathcal{U}_0 \otimes \delta_0' + \mathcal{U}_1 \otimes \delta_0$$

$t = 0$ $\quad \Box_{1,1}\mathcal{U}$ $\quad$ „Cauchy-Probl."

.....

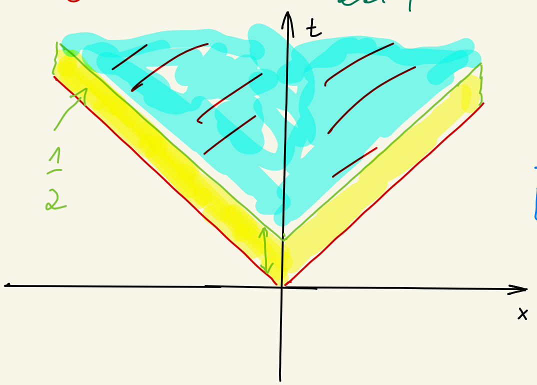
$\frac{1}{2}$ übersetzen in „Fundamentallsg."

$$G_1(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{bei } t \le \|x\|_{\mathbb{E}^1} \\ \frac{1}{2} & \text{bei } t > \|x\|_{\mathbb{E}^1} \end{cases}$$

$$\Box_{1,1} G_1(t,x) = \delta_{\{\underline{0}\}}, \quad \underline{0} \in \mathbb{E}^2$$

δ_0' – Ableitg. der $\delta_0 = \delta_{\{0\}}$ - Distrib.

$t = 0$, $\delta_0 \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^1_{\text{Zeit}})$



$G_1 \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^2)$

Raum - Dim. in „Ord" von

$n = 1 + 2m$, $m \in \mathbb{N}_0$

- Tensorprodukt von Distrib.

  $T \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^n)$, $S \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^k)$

  Erklären:

  $T \otimes S \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^{n+k})$ mit

  $(T \otimes S)(\varphi(\underline{x})\psi(y)) = T(\varphi(\underline{x}))S(\psi(y))$

  mit $\varphi \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^k)$

  Hier $T \otimes S = S \otimes T$ - ein(ein)deutig bestimmt, weil Linearkomb. von

$\varphi \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^n)$ $(\varphi_j \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^1))$

und $\psi \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^k)$ dicht liegen

in $\mathbb{D}(\mathbb{R}^{n+k})$.

Ableitung von $\delta_0 \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^1)$

Erklärung der Ableitung

wie bei part. Ableitungen

$$\delta_0'(\varphi(t)) = (-1)\,\delta_0\left(\frac{d\varphi}{dt}(t)\right)$$

Nun $\delta_{\{0\}} \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^2)$, $\varphi \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^2)$

$$(\Box_{1,1} G_1(t,x))\,\varphi = \int_{\mathbb{R}^2} G_1(\cdot,\cdot)(\Box_{1,1}\varphi)\,dt\,dx$$

$$= \varphi(0,0) = \delta_{\{0\}}\varphi .$$

vgl. Triebel S. 153.

Faltung von Distributionen

(... „Faltungsintegral")

Bekannt: Tensorprodukt: $S \otimes T = T \otimes S$

Nun $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^n)$

Trick: „Pseudo-Abschneidefkt."

Kugelschar: $\overline{B}_k(\underline{0}_{\mathbb{E}^{2n}})$, $k \in \mathbb{N}$

Wählen $\eta \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^{2n})$ mit $\eta = 1$ $\forall (\underline{x}, \underline{y}) \in \overline{B}_1(\underline{0})$

Erklären $\left\{\eta_k := \eta\left(\frac{1}{k}\underline{x}, \frac{1}{k}\underline{y}\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$

Ist nun (als Vorauss.)

$\forall \varphi \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^n)$ die Menge:

$$M = \left\{ (\underline{x}, \underline{y}) : \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix} \in \mathbb{E}^{2n},\ \underline{x} + \underline{y} \in \operatorname{supp} \varphi,\ \underline{x} \in \operatorname{supp} T,\ \underline{y} \in \operatorname{supp} S \right\} \in \mathbb{E}^{2n}$$

beschränkt, so wird Faltg. erklärt durch:

$$(T * S)(\varphi) := \lim_{k \to \infty} \Big(\varphi(\underline{x} + \underline{y}) \overbrace{(T \otimes S)\eta_k(\underline{x}, \underline{y})}^{(\circ)\text{ Produkt von Fkt. und Distr.}} \Big)$$

„$*$" Faltung $\overset{(\circ)}{:=} \underline{\underline{\lim_{k \to \infty} \Big((T \otimes S)\big(\varphi(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \eta_k(\cdot, \cdot)\big) \Big)}}$

Nun $\quad \delta_{\{0\}} * F = F$

$$\rightsquigarrow \text{Lsg. } u = G_1 * \overbrace{\left(F + u_0 \otimes \delta'_{\{0\}} + u_1 \otimes \delta_{\{0\}} \right)}$$

$$\Box_{1,1}\, u = \left(F + \dots u_1 \otimes \delta_{\{0\}} \right)$$

$$\Box_{1,1}\, G_1 = \delta_{\{0\}}$$

Hintergrund: $\quad \Box_{1,1} \big(\overbrace{G_1 * \{\dots\}}^{u} \big)$

$$= \left(\Box_{1,1} G_1 \right) * \{\dots\} = \delta_{\{0\}} * \{\dots\}$$

$$= F + u_0 \otimes \delta'_0 + u_1 \otimes \delta_0$$

Ist $\mathcal{U} \in D'(\mathbb{R}^2)$ mit supp $\mathcal{U} \subset \{(t,x)^T \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0\} = \overline{\mathbb{R}}^2_+$

so ex. Faltg. $T = \tilde{G}_1 * \mathcal{U}$ und es ist (65)

supp $T \subset \overline{\mathbb{R}}^2_+$.

T ist Lsg. von $\square_1 T = \mathcal{U}$. $(I\square_1)$

Ist hier $\mathcal{U}$ reg. Distrib., so gilt: d'Alembertsche Formel

$$T = T(t,x) = \tilde{G}_1 * \mathcal{U} = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^t \int_{-\tau}^{\tau} u(t-\tau, x-y)\,dy\,d\tau & \text{bei } t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

(♡♡)

reg. Distribution.

Bew: $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

$$(\square \tilde{G}_1)(\varphi) = \tilde{G}_1(\square\varphi) = \frac{1}{2}\left\{\int_{\mathbb{R}^1}\int_{|x|}^{\infty}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi\right)dt\,dx - \int_0^{\infty}\int_{-t}^{t}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,dx\,dt\right\}$$

Integrale einfach mit Fubini, so geschrieben, wie wir sie gebrauchen können!

$$= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^1}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(|x|,x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,t) - \frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,-t)\right)dt$$

HS-Diff-Int-Rechng. (t-Integr. ausgef.)

$$= -\frac{1}{2}\left[\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,x)\,dx + \int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,-x)\,dx + \int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,t)\,dt - \int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,-t)\,dt\right.$$

Subst. und Vert. der Int.-Grenzen

(I) + (III)

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{d}{dt}\varphi(t,t)\,dt}_{=\frac{1}{2}\varphi(0,0)} - \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{d}{dt}\varphi(t,-t)\,dt = \varphi(0,0) \quad \blacksquare$$

Innere Abl. in 4. Integral beachten!!!

Hauptsatz Diff-Int. also G_1 - Fundamental-Lsg.

Nun $\mathcal{U}$: supp $\mathcal{U} \subset \overline{\mathbb{R}}^2_+$. Überprüfen Existenz der Fltg:

$N > 0$. Fragen nach Beschränktheit der Menge: (vgl. auch Satz Faltung)

$$M_N = \{(t,\tau,x,y)^T \in \mathbb{R}^4 : \underbrace{\|(t,x)^T + (\tau,y)^T\|_{E^2}}_{=(t+\tau,\,x+y)^T} \leq N;\ (t,x)^T \in \text{supp}\,\tilde{G}_1;\ (\tau,y)^T \in \text{supp}\,\mathcal{U}\}$$

Betrachten zunächst Zeit: $\tau, t \geq 0$ lt. Vor. $\Rightarrow$ $0 \leq t,\tau \leq N$ auf M_N

$|t+\tau| \leq N$

Da $(t,x) \in$ supp $\tilde{G}_1$ und $t \leq N$ $\Rightarrow$ $|x| \leq N$

vgl. Def. von G_1

und schließlich $|y| \leq |x+y| + |x| \leq 2N$ $\Rightarrow$ M_N beschr.

$\Rightarrow$ Faltg. existiert.