Maß-und Integrationstheorie

Vorlesungsskriptum von Bernd Rummler WS 18/19

24. Januar 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Maßtheorie

1.1 Maß-Problem und einleitende Begriffe

Definition 1.1.1 (topologischer Raum). *$X \neq \emptyset$ sei eine nichtleere Grundmenge und $\mathfrak{P}(X)$ die Potenzmenge von X.*
Es sei τ ein nichtleeres Mengensystem, $\tau \subseteq \mathfrak{P}(X)$, mit den folgenden Eigenschaften:

(τi) $\emptyset, X \in \tau$

(τii) für alle $\{\mathscr{O}_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq \tau$, bei beliebiger Indexmenge I gilt: $\bigcup\limits_{\alpha\in I} \mathscr{O}_\alpha \in \tau$

(τiii) für alle $\{\mathscr{O}_j\}_{j=1}^N \subseteq \tau$ gilt: $\bigcap\limits_{j=1}^{N} \mathscr{O}_j \in \tau$

Wir nennen τ mit (τi)-(τiii) eine Topologie auf X und das geordnete Paar (X,τ) einen topologischen Raum.

Notation 1.1.2 (Punkte und Mengen im topologischer Raum).
(i) Die Elemente von τ nennt man offene Mengen.
(ii) $A \subseteq X$ heißt abgeschlossen in (X,τ) wenn $A^C \in \tau$, dabei bezeichnet A^C das Komplement von A bezüglich $X = \{x : x \in X \wedge x \notin B\}$.
(iii) A heißt Überdeckungs-kompakt, wenn aus jeder offenen Überdeckung $\{\mathscr{O}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ von A: $\{\mathscr{O}_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq \tau$; ein endliches Teilsystem: $\{\mathscr{O}_{\alpha_j}\}_{j=1}^N \subset \{\mathscr{O}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ausgewählt werden kann, welches A überdeckt,d.h. $A \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{N} \mathscr{O}_{\alpha_j}$
(iv) Die Elemente $x \in X$ nennt man Punkte von (X,τ).
(v) $U \in \mathfrak{P}(X)$ heißt Umgebung von x in (X,τ), wenn $\exists\, \mathscr{O} \subseteq \tau : x \in \mathscr{O} \subseteq U$: $U = U(x)$

Definition 1.1.3 (Hausdorffscher topologischer Raum). *Einen topologischen Raum (X,τ) für den zusätzlich das Hausdorffsche Trennungsaxiom :*

(τiv) $\forall x,y \in X; x \neq y$ gilt: $\exists \mathscr{O}_x, \mathscr{O}_y \in \tau : x \in \mathscr{O}_x \;\; y \in \mathscr{O}_y$ und $\mathscr{O}_x \cap \mathscr{O}_y = \emptyset$

gilt, nennt man einen Hausdorffschen topologischen Raum.

Beispiele 1.1.1 (topologische Räume).

(B1) Es sei $\tau = \{\emptyset, X\}$. Das Paar (X,τ) nennt man den chaotischer topologischen Raum und τ die chaotische Topologie.

(B2) Das Paar $(X,\mathfrak{P}(X))$, wobei $\mathfrak{P}(X)$ die Potenzmenge von X ist, bildet den diskreten topologischen Raum. $\tau = \mathfrak{P}(X)$ heißt die diskrete Topologie. Das Problem im diskreten topologischen Raum besteht darin, dass nur Folgen konvergieren können, welche ab einem endlichen Index gleich ihrem Grenzelement sind. Dazu nennt $\{x_j\}_{j=1}^\infty$ konvergent, wenn $\forall U = U(x) \exists j(U) : \forall j \geq j(U) : x_j \in U(x)$.
Für die diskrete Topologie gilt: $\{x\} \subseteq \tau$ ($\{x\} = U$), das heißt speziell: Es muss also gelten: $\forall j \geq j(\{x\}) : x_j = x$, womit nur 'konstante' Folgen konvergieren.

Geschichte und Maßproblem

- Lebesgue (1902):
  PROBLEM: Es soll jeder Menge $E \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^1)$, mit E beschränkt im $\mathbb{E}^1$, eine reelle Zahl $\mu(E) \in [0,\infty)$ (endlich!) zugeordnet werden, so dass:

  (i) Für kongruente Mengen E und E_1 sei $\mu(E) = \mu(E_1)$

  (ii) $\mu(\bigcup_{j=1}^{N} E_j) = \sum_{j=1}^{N} \mu(E_j)$ bei $\{E_j\}_{j=1}^N$ beschränkt, $\{E_j\}_{j=1}^N \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^1)$ und $\{E_j\}_{j=1}^N$ paarweise disjunkt, d.h. $E_j \cap E_k = \emptyset \quad \forall j \neq k$

  (iii) $\mu([0,1]) = 1$ (Dieses kann auch durch $\mu([0,1)) = 1$ ersetzt werden).

  Verschärfung:

  (ii)* $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$ bei $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ beschränkt, $\{E_j\}_{j=1}^\infty \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^1)$ und $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ paarweise disjunkt

  * Dieses Problem mit $(i),(ii)^*,(iii)$ ist nicht mal im $\mathbb{R}^1$ lösbar und mit $(i),(ii),(iii)$ nur bis $\mathbb{R}^2$, also:

- Verallgemeinerung in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{E}^n$
  PROBLEM: gesucht ist $\mu : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$, so dass:

  (i) Für jede Bewegung β (überführt Mengen in kongruente Mengen) $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gilt: $\mu(E) = \mu(\beta(E))$

  (ii) $\forall E,F \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ und $E \cap F = \emptyset : \mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$ (Additivität)

  (ii)* $\forall \{E_j\}_{j=1}^\infty \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ mit $E_j \cap E_k = \emptyset \quad \forall j \neq k$ (paarweise disjunkt) sei: $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$ (σ-Additivität)

  (iii) $\mu(\times_{j=1}^n [0,1)) = 1$ (Normierung für Einheitswürfel)

  $(i),(ii),(iii)$ beschreiben das Inhaltsproblem, $(i),(ii^*),(iii)$ das Maßproblem.
  * Das Inhaltsproblem ist für $n \geq 3$ unlösbar (1. Beweis von Hausdorff 1914). Aber es kommt sogar noch schlimmer:

  Satz 1.1.1 (Banach-Tarski-Theorem, 1924). *Sei $n \geq 3$. $A,B \subseteq \mathbb{E}^n$ mit $\mathring{A},\mathring{B} \neq \emptyset$. Dabei ist $\mathring{A}$ das Innere von A, also die Menge aller Punkte, zu denen eine offene Umgebung existiert, die ganz in A liegt.*
  Dann existieren paarweise disjunkte Mengen $\{C_j\}_{j=1}^N$ und Bewegungen $\{\beta_j\}_{j=1}^N$ (bei $\{\beta_j(C_j)\}_{j=1}^N$ paarweise disjunkt), so dass $A = \bigcup_{j=1}^{N} C_j$ und $B = \bigcup_{j=1}^{N} \beta_j(C_j)$.

  * Das Maßproblem ist nicht einmal in $\mathbb{R}^1$ lösbar. Bewiesen für $n = 1$ von Vitali 1904: (-allgemein gezeigt: 1924 von Banach und Tarski)

Satz 1.1.2 (Vitali,1904)**.** *Das Maßproblem* $(i),(ii)^*,(iii)$ *ist im* $\mathbb{R}^1$ *unlösbar.*

Beweis. Idee: Aufbau einer speziellen Menge
Es sei $\mathbb{Q}$ - die Menge der rationalen Zahlen, $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.
Damit ist auch die Menge $P_0 := \{p \in \mathbb{Q} : p \in [-1,1]\}$ - abzählbar. Des Weiteren sei $R := [-2,2)$ und $R_0 := [0,1)$ und $A(x) := \{y \in R_0 : x - y \in P_0\}$ die Äquivalenzklassen aller rellen Zahlen $y \in R_0 \subset \mathbb{R}$ mit nur rationaler Differenz zu einem Repräsentanten $x \in R_0$. Hier gilt offensichtlich , dass $A(x) = A(y) \Leftrightarrow y \in A(x)$. Speziell finden wir somit in $A(0)$ alle rationalen Elemente aus R_0.
Wir zeigen zunächst, dass zwei verschiedene Äquivalenzklassen disjunkt sind:
Sei also $A(x) \neq A(z)$ und es gäbe ein $y \in A(x) \cap A(z)$, dann gilt:
$y = x - p_1$ und $y = z - p_2$ mit $p_1, p_2 \in P_0$. Das heißt $x - z = p_2 - p_1$, also $z \in A(x)$. Dies ist aber ein Widerspruch zu $A(x) \neq A(z)$.
In jeder Äquivalenzklasse $A(x)$ sei x als Repräsentant von $A(x)$ nun fest gewählt. Dann ist $B_0 := \bigcup\limits_{\{A(x)\}} \{x\}$ eine überabzählbare Vereinigung disjunkter Punkt-Mengen. Das heißt B_0 ist eine Teilmenge von R_0. Es sei nun $k(p)$ eine Indexzuordnung $k : P_0 \to \mathbb{N}_0$. (Dies ist immer möglich, da P_0 abzählbar ist.) Weiter sei o.B.d.A. $k(0) = 0$.
Wir setzen $B_{k(p)} := \bigcup\limits_{\{A(x)\}} \{x + p\}\ \forall p \in P_0$. Hier ist $B_{k(p_1)} \cap B_{k(p_2)} = \emptyset\ \forall p_1 \neq p_2 \in P_0$ und die Mengen $B_{k(p)}$ sind kongruent zu $B_0\ \forall p \in P_0$.
Nehmen wir nun an: das Maßproblem im $\mathbb{R}^1$ sei lösbar.
Dann liefert die Normierung und (ii):

$$\mu(R_0) = |R_0| = 1 \text{ und } \mu(R) = |R| = 4.$$

Nach Konstruktion ist $B_{k(p)} \subseteq R \quad \forall p \in P_0$.
Wegen (i) (Kongruenzeigenschaft) gilt $\forall p \in P_0 : \quad \mu(B_{k(p)}) = \mu(B_0)$.
Des Weiteren ist $\bigcup\limits_{p \in P_0} B_{k(p)} \subseteq R$ eine abzählbare Vereinigung disjunkter Mengen.

Wegen $(ii)^*$ und (ii) gilt

$$\begin{aligned}\mu(\bigcup_{p \in P_0} B_{k(p)}) &= \sum_{k(p)=0}^{\infty} \mu(B_{k(p)}) \stackrel{(ii)}{=} \mu((\bigcup_{p \in P_0} B_{k(p)} \setminus R_0) \cup R_0) \\ &= \mu(\bigcup_{p \in P_0} B_{k(p)} \setminus R_0) + \mu(R_0) \geq 1,\end{aligned}$$

wobei $\mu(R_0) = 1$ und $\mu(\bigcup\limits_{p \in P_0} B_{k(p)} \setminus R_0) \geq 0$.

Andererseits gilt mit (ii): $\quad 4 = \mu(R) = \mu(R \setminus \bigcup\limits_{p \in P_0} B_{k(p)}) + \mu(\bigcup\limits_{p \in P_0} B_{k(p)})$,

bei $\mu(R \setminus \bigcup\limits_{p \in P_0} B_{k(p)}) \geq 0$.

Also: $\quad 4 = \mu(R) \geq \sum\limits_{k(p)=0}^{\infty} \mu(B_{k(p)}) \stackrel{(ii)}{=} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mu(B_0)$.

Folglich ist $\mu(B_0) = 0$, da sonst $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mu(B_0)$ divergiert. Das ist aber ein Widerspruch zu $\sum\limits_{k(p)=0}^{\infty} \mu(B_{k(p)}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mu(B_0) \geq 1$.
Also ist das Maßproblem im $\mathbb{R}^1$ nicht lösbar. □

1.2 Mengenalgebra, Maße, Messbarkeit

Definition 1.2.1 (Mengenalgebra)**.** *Sei X eine nichtleere Grundmenge und sei $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ ein nichtleeres System von Teilmengen von X. Dann heißt $\mathfrak{A}$ Mengenalgebra über X, wenn:*

$$\begin{array}{lrcl} (i) & A \in \mathfrak{A} & \Rightarrow & A^C \in \mathfrak{A} \\ (ii) & A, B \in \mathfrak{A} & \Rightarrow & (A \cup B) \in \mathfrak{A} \end{array}$$

Schreibweise: $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(X)$

Definition 1.2.2 (σ-Algebra)**.** *Eine Mengenalgebra $\mathfrak{A}(X)$ heißt σ-Algebra über X, wenn:*

$$(iii) \qquad \{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}(X) \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}(X)$$

Hilfsschreibweise für die σ-Algebra: $\mathfrak{A}(X) = \mathfrak{A}^{(\sigma)}(X)$

Beispiele 1.2.1. *Sei X eine beliebige Menge. Dann ist das System $\mathfrak{A} = \{\emptyset, X\}$ die kleinste und $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(X)$ die größte σ-Algebra über X.*

Folgerung 1.2.1. *Sei $\mathfrak{A}(X)$ eine Mengenalgebra. Dann gilt*

(i) $X \in \mathfrak{A}(X)$

(ii) $\emptyset \in \mathfrak{A}(X)$

(iii) $A, B \in \mathfrak{A}(X) \Rightarrow (A \cap B) \in \mathfrak{A}(X)$

Beweis. Zu (i): Da wegen $A \in \mathfrak{A}(X)$ auch $A^C \in \mathfrak{A}(X)$ ist, erhalten wir
$A \cup A^C = X \in \mathfrak{A}(X)$.
(ii) gilt, da $\emptyset = X^C \in \mathfrak{A}(X)$ und Aussage (iii) folgt aus $(A \cap B) = (A^C \cup B^C)^C$. □

Satz 1.2.2 (Erzeugungssatz)**.** *Der Durchschnitt beliebig vieler Mengenalgebren (bzw. σ-Algebren) über X ist wieder eine Mengenalgebra (bzw. σ-Algebra) über X.*

Beweis. Es sei $\{\mathfrak{A}_{\alpha}^{(\sigma)}(X)\}_{\alpha \in I}$ System von Mengenalgebren (σ-Algebren) über X, mit Indexmenge I. Des Weiteren sei $\mathfrak{A}_{(\sigma)}(x) := \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathfrak{A}_{\alpha}^{(\sigma)}(X)$.
Um zu zeigen, dass $\mathfrak{A}_{(\sigma)}(x)$ eine Mengenalgebra (bzw. σ-Algebra) ist, müssen wir die Axiome aus der Definition prüfen.

(i) $A \in \mathfrak{A}(X) \Rightarrow A \in \mathfrak{A}_{\alpha}(X) \quad \forall \alpha \in I \Rightarrow A^C \in \mathfrak{A}_{\alpha}(X) \quad \forall \alpha \in I$
$\Rightarrow A^C \in \mathfrak{A}(X)$

(ii) $A, B \in \mathfrak{A}(X) \Rightarrow A, B \in \mathfrak{A}_\alpha(X) \quad \forall \alpha \in I \Rightarrow (A \cup B) \in \mathfrak{A}_\alpha(X) \quad \forall \alpha \in I$
$\Rightarrow (A \cup B) \in \mathfrak{A}(X)$

(iii) $\{A_j\}_{j=1}^\infty \in \mathfrak{A}^\sigma(X) \Rightarrow \{A_j\}_{j=1}^\infty \in \mathfrak{A}_\alpha^\sigma(X) \quad \forall \alpha \in I$
$\Rightarrow \bigcup\limits_{j=1}^\infty A_j \in \mathfrak{A}_\alpha^\sigma(X) \quad \forall \alpha \in I \Rightarrow \bigcup\limits_{j=1}^\infty A_j \in \mathfrak{A}^\sigma(X)$

□

Definition 1.2.3 (Durchschnitts-Algebren)**.** *Es sei $S \subseteq \mathfrak{P}(X)$ mit S ist nichtleer. Wir bezeichnen mit:*

$$\mathfrak{A}(S) = \bigcap_{\mathfrak{A}_\alpha(X) \supseteq S} \mathfrak{A}_\alpha(X)$$

die von S erzeugte Mengenalgebra. Analog, durchgeführt mit σ-Algebren, erhält man die von S erzeugte σ-Algebra:

$$\sigma(S) = \bigcap_{\mathfrak{A}_\alpha^\sigma(X) \supseteq S} \mathfrak{A}_\alpha^\sigma(X) = \mathfrak{A}_\alpha^{o(\sigma)}(X)$$

Definition 1.2.4 (additive Mengenfunktion)**.** *Sei $\mathfrak{A}(X)$ eine Mengenalgebra über X und $\Phi : \mathfrak{A}(x) = D(\Phi) \to \overline{\mathbb{R}}$ bzw. $\overline{\mathbb{R}} \times i\overline{\mathbb{R}}$ mit $\overline{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup (-\infty, \infty) \cup \{\infty\}$. Die Abbildung Φ heißt additive Mengenfunktion, wenn $\forall A, B \in \mathfrak{A}(X)$, mit $A \cap B = \emptyset$, $\Phi(A \cup B) = \Phi(A) + \Phi(B)$ gilt.*

Definition 1.2.5 (σ-additive Mengenfunktion)**.** *Eine additive Mengenfunktion Φ heißt σ-additive Mengenfunktio wenn (zusätzlich) für alle Mengenfolgen $\{A_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathfrak{A}(X)$ von paarweise disjunkten Mengen $A_j \cap A_k = \emptyset \, \forall j, k \in \mathbb{N} : j \neq k$ mit $\bigcup\limits_{j=1}^\infty A_j \in \mathfrak{A}(X)$ gilt:*

$$\sum_{j=1}^\infty \Phi(A_j) = \Phi(\bigcup_{j=1}^\infty A_j)$$

Definition 1.2.6 (Inhalt über $\mathfrak{A}(X)$)**.**
Gilt für die additive Mengenfunktion $\Phi : \mathfrak{A}(X) \to [0, \infty]$, dann heißt Φ ein Inhalt über $\mathfrak{A}(X)$.
Schreibweise: $\Phi = \lambda$
Gilt für X zusätzlich $\lambda(X) < \infty$, so nennt man λ einen endlichen Inhalt.

Definition 1.2.7 (Prä-Maß)**.** *Ein σ-additiver Inhalt λ wird auch Prä-Maß genannt.*
Gilt für den σ-additiven Inhalt λ :
$\exists \{A_j\}_{j=1}^\infty \subseteq \mathfrak{A}(X)$ und $A_j \subseteq A_{j+1} \quad \forall j = 1, 2, \ldots$ (isotone Mengenfolge) und
$X = \bigcup\limits_{j=1}^\infty A_j$ mit $\lambda(A_j) < \infty \quad \forall j \in \mathbb{N}$, dann heißt λ σ-endlich.

Definition 1.2.8 (messbaren Raum, Maß, Maßraum)**.**
Das Paar $\{X, \mathfrak{A}^{(\sigma)}(X)\}$ nennt man einen messbaren Raum.
Ein σ-additiver Inhalt λ (Prä-Maß) auf einer σ-Algebra heißt ein Maß. : Schreibweise: $\Phi = \lambda = \mu$
Das Tripel $[X, \mathfrak{A}^\sigma(X), \mu]$ heißt Maßraum über X.

Folgerung 1.2.3. *(a)* $\Phi(\emptyset) = 0$, *da* $\emptyset$ *disjunkt zu sich selbst ist, muss gelten:*

$$\Phi(\emptyset) = 2\Phi(\emptyset).$$

(b) Ist $\Phi(A)$ *endlich und* $A \subseteq B, \quad A, B \in \mathfrak{A}$, *dann:*

$$\Phi(B \setminus A) = \Phi(B) - \Phi(A)$$

Falls λ*-Inhalt so folgt daraus die Monotonie:*

$$\lambda(A) \leq \lambda(B) \quad A, B \in \mathfrak{A} \quad A \subseteq B$$

(c) Für λ*-Inhalt gilt die Subadditivität:*

$$\forall A, B \in \mathfrak{A} : \lambda(A \cup B) \leq \lambda(A) + \lambda(B)$$

Definition 1.2.9 (Limes superior und Limes inferior)**.**
Vorgegeben sei bei $X \neq \emptyset$ *die Mengenfolge* $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{P}(X)$. *Wir erklären mit*

$$\overline{\lim_{j \to \infty}} A_j := \{x \in X : x \in A_j \text{ für unendlich viele Indizes } j\}$$

den Limes superior und mit

$$\underline{\lim}_{j \to \infty} A_j := \{x \in X : \exists j_0(x) \in \mathbb{N} : \forall j \geq j_0(x) : x \in A_j\}$$

den Limes inferior.
Limes superior und Limes inferior bezeichnen Elemente von $\mathfrak{P}(X)$. *Die obigen Grenzwerte berechnet man durch*

$$\overline{\lim}_{j \to \infty} A_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k$$

und

$$\underline{\lim}_{j \to \infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} A_k.$$

Offenbar gilt:

$$\underline{\lim}_{j \to \infty} A_j \subseteq \overline{\lim}_{j \to \infty} A_j.$$

Im Falle: $\underline{\lim}_{j \to \infty} A_j = \overline{\lim}_{j \to \infty} A_j$ *schreiben wir auch:*

$$\lim_{j \to \infty} A_j = \underline{\lim}_{j \to \infty} A_j = \overline{\lim}_{j \to \infty} A_j \in \mathfrak{P}(X).$$

Definition 1.2.10 (Spezielle Mengenfolgen)**.** *Eine Mengenfolge* $\{A_j\}_{j=0}^{\infty}$ *heißt isoton (monoton aufsteigende Mengenfolge), wenn* $A_j \subseteq A_{j+1}$, $\forall j$.
Es gilt dann

$$\lim_{j \to \infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

Die Mengenfolge $\{A_j\}_{j=0}^{\infty}$ heißt antiton (monoton fallende Mengenfolge), wenn $A_j \supseteq A_{j+1}$, $\forall j$.
Es gilt dann

$$\lim_{j\to\infty} A_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$$

Definition 1.2.11 (Montones System)**.** *Ein nichtleeres System S von Teilmengen von X heißt monotones System (monotone Klasse), wenn für alle $\{A_j\}_{j=0}^{\infty}$ isoton bzw. antiton gilt*

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j \in S \text{ für } \{A_j\}_{j=0}^{\infty} \text{ isoton bzw. } \bigcap_{j=0}^{\infty} A_j \in S \text{ für } \{A_j\}_{j=0}^{\infty} \text{ antiton.}$$

Bemerkung 1.2.1 (Durchschnitt monotoner Systeme)**.** *Analog zum Satz über die Durchschnittsalgebra kann man zeigen, dass der Durchschnitt beliebig vieler monotoner Systeme, welche ein vorgegebenes Mengensystem $\mathfrak{M}$ enthalten, wieder ein monotones System bildet. Im Folgenden werde der Durchschnitt aller monotoner Systeme, die $\mathfrak{M}$ enthalten, mit $\mathfrak{m}(\mathfrak{M})$ bezeichnet.*

DIES FÜHRT UNS ZU DER FOLGENDEN ANWENDUNG:

Bemerkung 1.2.2. *Jede monotone Mengenalgebra $\mathfrak{A}(X)$ ist σ-Algebra über X.*

Satz 1.2.4. *Ist $\mathfrak{M} := \mathfrak{A}(X) = S$ eine Mengenalgebra über X, dann gilt sogar: $\sigma(S) = \sigma(\mathfrak{M}) = \mathfrak{m}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{m}(S)$, also in expliziter Schreibweise: $\sigma(\mathfrak{A}(X)) = \mathfrak{m}(\mathfrak{A}(X))$*

Beweis. Wir werden zuerst zeigen, dass $\mathfrak{m}(\mathfrak{M})$ eine σ-Algebra ist. Da wir wissen, dass jede monotone Mengenalgebra eine σ-Algebra ist (Bemerkung 1.2.1), reicht es die Eigenschaften einer Mengenalgebra nachzuweisen.
Zu (i): Sei $\mathfrak{C} = \{A \in \mathfrak{m}(\mathfrak{M}) \,|\, A^c \in \mathfrak{m}(\mathfrak{M})\}$ ein monotones System. Die Monotonie gilt, da aus $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{C}$ und $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ (somit auch $A_1^c, A_2^c, \ldots \in \mathfrak{C}$ und $A_1^c \supseteq A_2^c \supseteq \ldots$) folgt, dass

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{m}(\mathfrak{M}) \text{ und } \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathfrak{m}(\mathfrak{M}).$$

Also $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{C}$. Genauso zeigt man, dass für $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{C}$ und $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ auch $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{C}$. Da $\mathfrak{C} \supseteq \mathfrak{M}$, gilt wegen der Definition von $\mathfrak{m}(\mathfrak{M})$ auch $\mathfrak{C} \supseteq \mathfrak{m}(\mathfrak{M})$. Da aber auch $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{m}(\mathfrak{M})$, haben wir $\mathfrak{C} = \mathfrak{m}(\mathfrak{M})$. D.h. aus $A \in \mathfrak{m}(\mathfrak{M})$ folgt $A^c \in \mathfrak{m}(\mathfrak{M})$.
Zu (ii): Wir definieren für jedes $B \in \mathfrak{m}(\mathfrak{M})$ das System

$$\mathfrak{V}_B = \{A \in \mathfrak{m}(\mathfrak{M}) \,|\, A \cup B \in \mathfrak{m}(\mathfrak{M})\} \subseteq \mathfrak{m}(\mathfrak{M}).$$

Das System $\mathfrak{V}_B$ ist ein monotones System, da für $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{V}_B$ mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ gilt $A_1 \cup B$, $A_2 \cup B, \ldots \in \mathfrak{m}(\mathfrak{M})$ und $A_1 \cup B \subseteq A_2 \cup B \subseteq \ldots$, also

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cup B) = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cup B \in \mathfrak{m}(\mathfrak{M}).$$

Somit ist $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \in \mathfrak{V}_B$. Analog zeigt man, dass $(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) \in \mathfrak{V}_B$ gilt, für $A_1, A_2, ... \in \mathfrak{V}_B$ mit $A_1 \supseteq A_2 \supseteq ...$. Da $\mathfrak{M}$ eine Algebra ist, gilt für $B \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{V}_B \supseteq \mathfrak{M}$ und, da $\mathfrak{V}_B$ ein monotones System ist, auch $\mathfrak{V}_B \supseteq \mathfrak{m}(\mathfrak{M})$. Also

$$\mathfrak{V}_B = \mathfrak{m}(\mathfrak{M}). \qquad (*)$$

Sei $B \in \mathfrak{m}(\mathfrak{M})$ und $C \in \mathfrak{M}$. Wegen Gleichung $(*)$ gilt $\mathfrak{V}_C = \mathfrak{m}(\mathfrak{M})$, d.h. $B \cup C = C \cup B \in \mathfrak{m}(\mathfrak{M})$, also $C \in \mathfrak{V}_B$. Demzufolge bleibt Gleichung $(*)$ auch für $B \in \mathfrak{m}(\mathfrak{M})$ gültig, was gleichzeitig impliziert:

$$A, B \in \mathfrak{m}(\mathfrak{M}) \Longrightarrow A \cup B \in \mathfrak{m}(\mathfrak{M}).$$

Folglich ist $\mathfrak{m}(\mathfrak{M})$ eine Mengenalgebra, somit auch σ-Algebra. Dann folgt aus $\mathfrak{m}(\mathfrak{M}) \supseteq \mathfrak{M}$, dass $\mathfrak{m}(\mathfrak{M}) \supseteq \sigma(\mathfrak{M})$. Da jede σ-Algebra monoton ist und $\sigma(\mathfrak{M}) \supseteq \mathfrak{M}$, gilt auch $\sigma(\mathfrak{M}) \supseteq \mathfrak{m}(\mathfrak{M})$. Also $\mathfrak{m}(\mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{M})$.

□

Definition 1.2.12 (Wahrscheinlichkeitsraum)**.**
Gilt für den Maßraum $[X, \mathfrak{A}^{(\sigma)}(X), \mu]$ die Eigenschaft: $\mu(X) = 1$ (Normierung), dann nennen wir $[X, \mathfrak{A}^{(\sigma)}(X), \mu]$ einen Wahrscheinlichkeitsraum.

Bemerkung 1.2.3. *Es sei $[X, \mathfrak{A}^{(\sigma)}(X), \mu]$ ein Maßraum und $0 < \mu(X) < \infty$, also ein endliches Maß. Dann liefert $\mu_1(E) := \frac{\mu(E)}{\mu(X)} \quad \forall E \in \mathfrak{A}^{(\sigma)}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit $\mu_1(X) = 1$ und $[X, \mathfrak{A}^{(\sigma)}(X), \mu_1]$ ist der dazugehörige Wahrscheinlichkeitsraum. D.h. jedes endliche Maß kann zur Konstruktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes genutzt werden.*

Günstig als Eigenschaft von Erzeugern ist eine Halbringstruktur:

Definition 1.2.13 (Halbring). *Ein nichtleeres Mengensystem $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{P}(X)$ heißt Halbring, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(i) $\emptyset \in \mathfrak{H}$

(ii) $A, B \in \mathfrak{H} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{H}$

(iii) $A, B \in \mathfrak{H} \Rightarrow \exists \{C_j\}_{j=1}^{N}$ *paarweise disjunkt mit* $C_j \in \mathfrak{H}$, $\forall j = 1 \ldots N$, *so dass gilt*

$$A \setminus B = \bigcup_{j=1}^{n} C_j.$$

Definition 1.2.14 (Intervall-Bereich, Menge der Intervallbereiche).
Ein Intervall-Bereich I über dem $\mathbb{R}^n$ ist die endliche Vereinigung halboffener, achsenparalleler Quader
$I = \bigcup_{j=1}^{N} [\underline{a}_j, \underline{b}_j) = \bigcup_{j=1}^{N} Q_j$ *mit* $[\underline{a}_j, \underline{b}_j) := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : a_k^j \leq x_k < b_k^j,\ \forall\, k = 1 \ldots n\}$*, wobei jede Koordinate in einem vorgegebenem Intervall liegt. Zugelassen sei hier auch* $a_k^j = -\infty$ *für* $j \in \{1, \ldots, N\}$ *und* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *sowie* $I = \emptyset$*. Die Gesamtheit aller oben definierten Mengen I nennt man die Menge $I_{\mathbb{R}^n}$ der Intervallbereiche. Das System $I_{\mathbb{R}^n}$ bildet eine Mengenalgebra über $\mathbb{R}^n$ und wird von dem Halbring aller halboffener Quader erzeugt, also* $\mathfrak{A}(\mathfrak{H}) = I_{\mathbb{R}^n}$ ($I_{\mathbb{R}^1} \cong I_{[-\infty,\infty)}$)*.*

Definition 1.2.15 (Borelsche σ-Algebra). *Wir erklären mit* $\mathfrak{B}^n = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(I_{\mathbb{R}^n})$ *die Borelsche σ-Algebra des $\mathbb{R}^n$. Die Elemente $E \in \mathfrak{B}^n$ nennt man Borelmengen.*
Ist $A \subset X$ und $\mathfrak{A}^{(\sigma)}(X)$ eine σ-Algebra über X, dann ist das System

$$\mathfrak{A}_A^{(\sigma)}(A) := \{E = A \cap B :\ B \in \mathfrak{A}^{(\sigma)}(X)\}$$

eine σ-Algebra auf (über) A und wird als Spuralgebra bezeichent.

Satz 1.2.5 (Satz über die Borelsche σ-Algebra). *Die Algebra $\mathfrak{B}^n$ ist die kleinste σ-Algebra, welche*

(i) alle offenen Mengen des $\mathbb{E}^n$

(ii) alle abgeschlossenen Mengen des $\mathbb{E}^n$

(iii) alle offenen Quader $\widetilde{Q} = (\underline{a}, \underline{b})$ des $\mathbb{E}^n$

(iv) alle abgeschlossenen Quader $\widetilde{Q} = [\underline{a}, \underline{b}]$ des $\mathbb{E}^n$

enthält.

Beweis. Wir wollen uns darauf beschränken (i) zu zeigen.
Sei A eine beliebige nichtleere offene Menge des $\mathbb{E}^n$. Des Weiteren sei A beschränkt.
Mit q_ν^0 bezeichnen wir alle achsenparallenen Quader der Länge $\frac{1}{2^0} = 1$ mit $q_\nu^0 \subset A$, $A^0 = \bigcup_{\nu=1}^{N(0)} q_\nu^0 \subset A$, wobei $N(0)$ die Anzahl der Quader $q_\nu^0 \subset A$ ist.
Für $j \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit q_ν^j alle (halboffenen) Quader der Kantenlänge $\frac{1}{2^j}$ mit $q_\nu^j \subset A$ und $\bigcup_{\nu=1}^{N(j)} q_\nu^j =: A^j \subset A$.

Offensichtlich gilt $A^j \subset A, \quad \forall j = 1, 2, \ldots$, also $\bigcup_{j=1}^{\infty} A^j \subset A$.

Jetzt stellt sich die Frage: Gilt auch $\bigcup_{j=1}^{\infty} A^j = A$?

Dazu nehmen wir an, dass $A \neq \bigcup_{j=1}^{\infty} A^j$, d.h. es existiert ein $\underline{x}^* \in A$ mit $\underline{x}^* \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} A^j$. Weil A offen ist, ist $\underline{x}^*$ innerer Punkt von A, also existiert eine Umgebung $U(\underline{x}^*) \subset A$. Nach der Konstruktion unsere obigen Folge existiert damit eine Intervallschachtelung $\{q^j_{\underline{x}^*}\}_{j=1}^{\infty} \supset \underline{x}^*$, wobei hier nicht angenommen wird, dass $q^j_{\underline{x}^*}$ Teilmenge von A sei. Nach dem Intervallschachtelungsprinzip existiert ein $q^{j^*}_{\underline{x}^*} \subset U(\underline{x}^*) \subset A$. Dies ist aber ein Widerspruch zu $\underline{x}^* \notin \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A^j$. □

Beispiel 1.2.2 (Beispiele von Maßen und Prämaßen)**.**

(B1) Der Lebesguesche-Inhalt auf dem $\mathbb{R}^1$:
Sei $\mathfrak{A}(\mathbb{R}^1) = I_{\mathbb{R}^1} = D(\lambda_L)$ mit $\lambda_L : I_{\mathbb{R}^1} \to [0,\infty]$. Konkret:

- $\lambda_L(\emptyset) = 0$
- $\lambda_L(A) = b - a \quad \forall A = [a,b)$ *mit* $-\infty < a < b < \infty$
- $\lambda_L(A) = \infty \quad \forall A \in \{[-\infty,\infty),[-\infty,b),[a,\infty)\}$ *bei* $-\infty < a,b < \infty$

Damit erhalten wir $\lambda_L(A) = \lambda_L(\bigcup\limits_{j=1}^{N}[a_j,b_j)) = \sum\limits_{j=1}^{N} \lambda_L([a_j,b_j))$ für $\{[a_j,b_j)\}_{j=1}^{N}$ paarweise disjunkte Intervalle. Also ist λ_L ist σ-additiv und σ-endlicher Inhalt auf $I_{\mathbb{R}^1}$.

(B2) Als nächstes erklären wir das Dirac-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$ und damit den Diracschen Maßraum $[\mathbb{R}^n,\mathfrak{B}^n,\mu_D]$. Wobei das Maß μ_D wie folgt definiert ist:

$$\mu_D : \mathfrak{B}^n \to [0,\infty]$$
$$\mu_D(E) := \begin{cases} 1 & \textit{bei } \underline{0} \in E \\ 0 & \textit{bei } \underline{0} \notin E. \end{cases}$$

Nachweis der Maßeigenschaften:

- $\mu_D(\emptyset) = 0$
- μ_D *ist ein additives Maß, da bei zwei disjunkten Mengen die $\underline{0}$ höchstens in einer liegt*
- *selbes Argument für σ-Additivität.*

Damit ist μ_D ein σ-additiver Inhalt auf einer σ-Algebra, also ein Maß. Es wird das Dirac-Maß genannt.

(B3) Zählmaß des $\mathbb{R}^n$:
Sei $\mu_Z : \mathfrak{B}^n \to [0,\infty)$ mit

$$\mu_Z(E) := \begin{cases} \sum\limits_{\{\underline{a}_j \in E\}} 1 & \textit{bei: } \exists\, j^* : \underline{a}_{j^*} \in E \\ 0 & \textit{für } \underline{a}_j \notin E \quad \forall j = 1,\dots,N, \end{cases}$$

Für alle Mengen $E = \{\underline{a}_j\}_{j=1}^{N}$ mit $\underline{a}_j \in \mathbb{R}^n$ und $\underline{a}_j \neq \underline{a}_k$ bei $j \neq k$.
Dann ist $[\mathbb{R}^n,\mathfrak{B}^n,\mu_Z]$ ein Maßraum.

(B4) *Verallgemeinerung von λ_L:*
Es sei die Abbildung $\varphi : \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^1$ mit φ vorgegeben, mit φ ist monoton wachsend und linksseitig stetig. Des Weiteren sei $\varphi(-\infty)$ definiert. Zum Beispiel durch $\varphi(-\infty) = \lim\limits_{t\to-\infty} \varphi(t)$.(Dies muss definiert werden, da nur linksseitige Stetigkeit vorausgesetzt wird.) Offensichtlich ist $\varphi(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t)$. Weiterhin seien auch $\varphi(-\infty) = -\infty$ und $\varphi(\infty) = \infty$ zugelassene Werte.
Es sei $\mathfrak{A}(\mathbb{R}^1) = I_{\mathbb{R}^1}$ und für alle $E \in I_{\mathbb{R}^1}$ mit $E \neq \emptyset$ sei

$$\lambda_\varphi(E) := \sum_{j=1}^{N(E)} (\varphi(b_j) - \varphi(a_j)),$$

wobei $E = \bigcup\limits_{j=1}^{N(E)} [a_j, b_j)$ mit $\{[a_j, b_j)\}_{j=1}^{N(E)}$ paarweise disjunkt. Es gelte weiter: $\lambda_\varphi(\emptyset) = 0$. Dann ist λ_φ ein σ-endlicher, σ-additiver Inhalt auf $I_{\mathbb{R}^1}$.
Folglich gilt dann für $\varphi(x) = x$, dass $\lambda_\varphi = \lambda_L$ ist.
Man nennt λ_φ auch den Lebesgue-Stieltjes-Inhalt auf $I_{\mathbb{R}^1}$ zu der Funktion φ.
Für σ-Endlichkeit ist notwendig, dass φ in einem Intervall der Gestalt $[-\infty, a)$ und $[b, \infty)$ echt monoton ist.
Anmerkung:
Die Funktion φ kann aus dem vorgegebenem λ_φ rekonstruiert werden. (Ü.A.) Da $(\varphi(b_j) + c) - (\varphi(a_j) + c) = \varphi(b_j) - \varphi(a_j)$ gilt, ist die Funktion bis auf eine Konstante eindeutig.

(B4(D)) *Dirac-Inhalt λ_D auf $I_{\mathbb{R}^1}$:*
Wir definieren die sogenannte Heaviside-Funktion:

$$\varphi_H(x) := \begin{cases} 1 & \text{bei } x > 0 \\ 0 & \text{bei } x \leq 0. \end{cases}$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass λ_D ein Inhalt auf $I_{\mathbb{R}^1}$ ist, denn:

$$\lambda_D(\emptyset) = 0$$

$$\lambda_D([-1,1)) = \varphi_H(1) - \varphi_H(-1) = 1 - 0 = 1$$

$$\lambda_D([-10,-1)) = \varphi_H(-1) - \varphi_H(-10) = 0 - 0 = 0$$

$$\lambda_D([1,2)) = \varphi_H(2) - \varphi_H(1) = 1 - 1 = 0$$

(B5(L-S)) *Nun konstruieren wir einen Inhalt auf $I_{\mathbb{R}^n}$. Es sei $E = \times_{j=1}^n [a_j, b_j)$.*
Dann setzen wir mit $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ aus (B4)

$$\lambda_{\{\varphi_j\}_{j=1}^n}(E) = \prod_{j=1}^n (\varphi_j(b_j) - \varphi_j(a_j))$$

und

$$\lambda_{\{\varphi_j\}_{j=1}^n}(\emptyset) := 0.$$

Somit erhalten wir für $\varphi_j(x_j) = x_j$, $\forall j = 1...n$, den Lebesqueschen-Inhalt auf dem $I_{\mathbb{R}^n}$. (Volumen der Quader). Wir werden ihn im Folgenden auch mit $\lambda_L^{(n)}$ bezeichnen.

Ziel: Messbarkeit von Abbildungen und Substitution

Dazu seien X,Y nichtleere Mengen und eine Abbildung $f : X \to Y$ vorgegeben.
Des Weiteren sei f zunächst surjektiv, d.h. $D(f) = X$ und $R(f) = W(f) = Y$.
Es sei $S \subset \mathfrak{P}(Y)$ mit S nichtleer; z.B. $S = \mathfrak{A}(Y)$ oder $S = \mathfrak{A}^\sigma(Y)$.

Definition 1.2.16 (Vollständiges Urbild)**.** *Für $A \in S$ erklären wir die Menge: $f^{-1}(A) := \{x \in X : f(x) \in A\}$. Wir nennen $f^{-1}(A)$ das vollständige Urbild der Menge A unter der Abbildung f. Mit $f^{-1}(S) := \{B \in \mathfrak{P}(X) : B = f^{-1}(A) \quad A \in S\}$ bezeichnen wir das vollständige Urbild des Mengensystems S.*

Satz 1.2.6 (Abbildungssatz)**.** *Ist $\mathfrak{A}$ eine Mengen-(σ)-Algebra über Y, so ist $f^{-1}(\mathfrak{A})$ eine Mengen-(σ)-Algebra über X.*

Beweis. Überprüfung der Axiomatik:

(i) Es sei $B \in f^{-1}(\mathfrak{A})$. Dann existiert eine Menge $A \in \mathfrak{A}(Y)$ mit $B = f^{-1}(A)$. Da $\mathfrak{A}(Y)$ eine Mengenalgebra ist, ist auch $A^{C_Y} \in \mathfrak{A}(Y)$ und somit $f^{-1}(A^{C_Y}) \in f^{-1}(\mathfrak{A})$. Aus der Surjektivität folgt nun $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(A^{C_Y}) = \emptyset_X$. Also ist wegen $B^{C_X} = (f^{-1}(A))^{C_X} = f^{-1}(A^{C_Y})$ auch $B^{C_X} \in f^{-1}(\mathfrak{A}(Y))$.

(ii) Es seien $B_1, B_2 \in f^{-1}(\mathfrak{A}(Y))$. Also existieren zwei Mengen $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}(Y)$ mit $B_1 = f^{-1}(A_1)$ und $B_2 = f^{-1}(A_2)$. Aus den Eigenschaften von $\mathfrak{A}$ folgt nun $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{A}(Y)$ und somit $f^{-1}(A_1 \cup A_2) \in f^{-1}(\mathfrak{A}(Y))$.
Die Definition des vollständigen Urbildes liefert uns jetzt

$$f^{-1}(A_1 \cup A_2) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2) = B_1 \cup B_2 \quad \in f^{-1}(\mathfrak{A}(Y)).$$

Folglich ist $\mathfrak{A}$ eine Mengenalgebra.

(iii) Induktive Anwendung der Argumentation aus (ii) zeigt, dass bei $\mathfrak{A}(Y)$ σ-Algebra auch $f^{-1}(\mathfrak{A}(Y))$ eine σ-Algebra ist. □

Folgerung 1.2.7 (*zum* Abbildungssatz)**.** *:*

(i) Rechengesetz:
Sei $B \in f^{-1}(\mathfrak{A})$ und es gelte $B = f^{-1}(A)$ mit $A \in \mathfrak{A}$. Dann ist $B^C = f^{-1}(A^C)$ die zu B komplementäre Menge.
Es sei weiter $\{B_j\}_{j=1}^\infty \in f^{-1}(\mathfrak{A}^\sigma)$ mit $B_j = f^{-1}(A_j)$, $A_j \in \mathfrak{A}$. Für die Vereinigung gilt dann

$$\bigcup_{j=1}^\infty B_j = \bigcup_{j=1}^\infty f^{-1}(A_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right).$$

(ii) Sei S ein beliebiges nichtleeres Mengensystem und $\sigma_Y(S)$ die von S erzeugte σ-Algebra über Y, dann ist $\quad \sigma_X(f^{-1}(S)) = f^{-1}(\sigma_Y(S))$.

Bemerkung 1.2.4. *Die Einschränkung $Y = R(f)$ ist oft hinderlich. Deshalb sei nun $\emptyset \neq R(f) \neq Y$ und $R(f) \subset Y$ und die Algebra $\mathfrak{A}$ Mengen- bzw. σ-Algebra ersetzt durch die Spuralgebra $\mathfrak{A}_{R(f)}(Y)$ bzw. $\mathfrak{A}^{\sigma}_{R(f)}(Y)$. Dann fassen wir f als Einschränkung von f in dem Sinne auf, dass $f : X \to R(f)$ abbildet. Folglich ist der Abbildungssatz auch in diesem Fall anwendbar.*
Konkret bedeutet dies $f^{-1}(y) = \emptyset \quad \forall y \notin R(f)$

Definition 1.2.17 (Äußeres Maß)**.** *Sei $X \neq \emptyset$ und $\mu^* : \mathfrak{P}(X) \to [0,\infty]$. Dann heißt μ^* äußeres Maß auf $\mathfrak{P}(X)$, wenn gilt*

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) $\mu^*(E) \leq \mu^*(F) \quad \forall E,F \in \mathfrak{P}(X)$ *mit* $E \subseteq F$ *(Monotonie)*

(iii) $\mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j) \quad \forall \{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{P}(X)$ *(Subadditivität)*
Hier kann $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j)$ *auch bestimmt divergieren.*

Bemerkung 1.2.5. *Ein äußeres Maß muss nicht additiv sein, denn sei $X \neq \emptyset$ und*

$$\mu^*(E) := \begin{cases} 1 & \text{bei } E \neq \emptyset \\ 0 & \text{bei } E = \emptyset. \end{cases}$$

Bei $X \neq \{b\}$ ist μ^* nicht additiv, denn $\mu^*(\{a,b\}) = 1 \quad \{a\} \cup \{b\} = \{a,b\} \quad a \neq b$ und $\mu^*(\{a,b\}) = \mu^*(\{a\}) = \mu^*(\{b\}) = 1$, aber $\mu^*(\{a,b\}) = 1 < 2 = \mu^*(\{a\}) + \mu^*(\{b\})$. Damit ist die Additivität verletzt. Dennoch ist μ^* ein äußeres Maß, denn:

(i) Gilt wegen der Definition von μ^*.

(ii) Die Monotonie folgt direkt aus:

- $E = F = \emptyset : \quad \mu^*(\emptyset) = 0 \leq 0 = \mu^*(\emptyset) \quad E \subset F$
- $E = \emptyset; F \neq \emptyset : \quad \mu^*(\emptyset) = 0 \leq 1 = \mu^*(F) \quad E \subset F$
- $E \neq \emptyset; F \neq \emptyset : \quad \mu^*(E) = 1 \leq 1 = \mu^*(F).$

(iii) Wird analog zur Monotonie gezeigt. Denn $\mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = 1$, falls mindestens eine Menge $E_j \neq \emptyset$ und somit $\mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j)$.

Definition 1.2.18 (Von λ induziertes äußeres Maß)**.** *Es sei $X \neq \emptyset$, $\mathfrak{A}(X)$ eine Mengenalgebra über X und λ ein σ-additiver Inhalt auf $\mathfrak{A}(X)$. Wir definieren die Abbildung $\mu^* = \mu^*_{\lambda} : \mathfrak{P}(X) \to [0,\infty]$ durch*

$$\mu^*_{\lambda}(E) := \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j) \quad \forall \{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}(X); \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \supset E \right\}.$$

Wir nennen μ^*_{λ} das von λ induziertes äußeres Maß.

Bemerkung 1.2.6. *Die $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ nach oben nennt man das System der Überdeckungen von E durch Elemente von $\mathfrak{A}(X)$.*

Satz 1.2.8 (Inhalts-Fortsetzungssatz). *Die oben definierte Abbildung μ_λ^* ist ein äußeres Maß auf $\mathfrak{P}(X)$.*

Beweis. **(a)** Fortsetzungseigenschaft: zu zeigen ist: $\forall A \in \mathfrak{A}(X) : \mu_\lambda^*(A) = \lambda(A)$
(ab jetzt λ bei μ^* weglassen).
Beachte Definition von μ^*:

$$\mu^*(A) = inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j) \forall \{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}(X) \text{ mit } \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \supset A\}$$

Nun ist $A \subset A$, d.h. : $\mu^*(A) \leq \lambda(A)$ (#) ($A_1 = A, A_j = \varnothing$ $\forall$ j ≥ 2)
Andererseits gilt für beliebige Überdeckung $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}(X)$ von A :
$\lambda(A) = \lambda(A \cap (\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j))$. Wir erhalten aus $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ das System paarweise disjunkter Mengen $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ vermittels: $B_k := A_k \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_j$ für $k \geq 2, B_1 = A_1$; mit $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$. und

$$\Rightarrow \lambda(A) = \lambda(A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)) = \lambda(A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j)) = \lambda(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A \cap B_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A \cap B_j)$$

(λ war σ-additiv):
$\leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda(A \cap A_j) \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j)$ da $\quad A_j \supset (A \cap A_j) \supset (A \cap B_j)$
(wegen Monotonie eines Inhaltes)

$$\Rightarrow \lambda(A) \leq \mu^*(A)(und(\#) : \lambda(A) \geq \mu^*(A)) \Rightarrow \lambda(A) = \mu^*(A) \forall A \in \mathfrak{A}(x).$$

(b) Zu zeigen: μ^* ist äußeres Maß. (Überprüfen der Axiome:)

(i) nach **(a)** ist $\varnothing \in \mathfrak{A}(X) : \lambda(\varnothing) = \mu^*(\varnothing) = 0$

(ii) Seien nun E,F $\in \mathfrak{P}(X)$mit $E \subset F$. Nun sei $\{B_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}(X)$ Überdeckung von F, d.h.: $E \subset F \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$ (Also auch eine Überdeckung von E), besser betrachtet als:
$\left\{ \{B_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A} : F \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j \right\} \subset \left\{ \{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A} : E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \right\}$
Das heißt: $\mu^*(E) = inf\{ \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j)\} \leq inf\{ \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda(B_j)\} = \mu^*(F)$.

(iii) Seien $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{P}(X)$. Zunächst eine Fallunterscheidung:
gilt für ein j: $\mu^*(E_j) = \infty \Rightarrow \mu^*(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j) = \infty \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j) = \infty$. Damit ist alles in diesem

Fall gezeigt.
Können nun voraussetzen, dass $\mu^*(E_j) < \infty \, \forall j \in \mathbb{N}$. Hier ist $\forall j \in \mathbb{N}$:

$$\mu^*(E_j) = inf\left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \lambda(A_{jl}) \text{ mit } \{A_{jl}\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}(x) \text{ und } \bigcup_{l=1}^{\infty} A_{jl} \supset E_j \right\}$$

D.h. $\{A_{jl}\}_{j,l=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}$ ist Überdeckung von $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} A_{jl}$.
Konstruieren nun eine spezielle Überdeckungsfolge zu beliebigem $\varepsilon > 0$:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \lambda(A_{jl}) - \mu^*(E_j) < \frac{\varepsilon}{2^j} \quad \forall j = 1,2,...$$

(Geometrische Reihe $\rightarrow \varepsilon$ ausklammern $\rightarrow$ Summe = 1).
Wir geben nun $\{A_{jl}\}_{j,l=1}^{\infty}$ diese Zusatzeigenschaft. Damit erhalten wir:

$$\mu^*(E) \leq \sum_{l,j=1}^{\infty} \lambda(A_{jl}) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \lambda(A_{jl}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j) + \varepsilon \cdot \underbrace{1}_{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2}$$

Da ε beliebig: Subadditivitätseigenschaft ist erfüllt:
$\Rightarrow \mu^*$ ist äußeres Maß.

$\square$

Folgerung 1.2.9. *Aus jedem σ-additivem Inhalt kann ein äußeres Maß erzeugt werden.*

Definition 1.2.19 (Messbare Mengen)**.** *Es sei μ^* ein äußeres Maß auf $\mathfrak{P}(X)$. Dann nennen wir eine Menge $E \in \mathfrak{P}(X)$ messbare (oder μ^*-messbare) Menge, wenn für alle $B \in \mathfrak{P}(X)$ die folgende Gleichung erfüllt ist*

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap E) + \mu^*(B \cap E^C).$$

Satz 1.2.10 (Caratheodory, DIE σ-ALGEBRA DER MESSBAREN MENGEN)**.**
Es bezeichne $\mathfrak{A}_{\mu^*}(X) = \{E \in \mathfrak{P}(X)$ mit E ist μ^*-messbar $\} \subset \mathfrak{P}(X)$ das System aller μ^*-messbaren Teilmengen von X. Dann ist $\mathfrak{A}_{\mu^*}(X)$ eine σ-Algebra über X und die Einschränkung von μ^* auf $\mathfrak{A}_{\mu^*}(X)$, d.h. $\mu^* = \mu : \mathfrak{A}_{\mu^*}(X) \rightarrow [0,\infty]$, ist ein Maß auf $\mathfrak{A}_{\mu^*}(X)$.

Beweis. (i) $\varnothing, X \in \mathfrak{A}_{\mu^*}(X)$, denn $\forall B \in \mathfrak{P}(X)$ gilt:

$$\mu^*(B) = \underbrace{\mu^*(B \cap \varnothing)}_{=0} + \mu^*(B \cap X),$$

d.h. $\varnothing$ und X sind messbar. Also sind $\varnothing, X \in \mathfrak{A}_{\mu^*}(X)$.

(ii) Es sei $\mu^*(E)=0$. Dann ist $E\in\mathfrak{A}_{\mu^*}(X)$, denn aus der Monotonie folgt für alle $B\in\mathfrak{P}(X)$, dass $B\cap E\subset E$ ist und damit

$$0\le\mu^*(E\cap B)\le\mu^*(E)=0$$

$$\mu^*(B)=\mu^*((B\cap E)\cup(B\cap E^C))\le\mu^*(B\cap E)+\mu^*(B\cap E^C).$$

Da $E^C\cap B\subset B$ ist, also $\mu^*(E^C\cap B)\le\mu^*(B)$ gilt, folgt daraus

$$\mu^*(B)=\mu^*(E\cap B)+\mu^*(E^C\cap B).$$

Das bedeutet E ist messbar.

(iii) Dass auch $E^C\in\mathfrak{A}_{\mu^*}(X)$ gilt, kann man sofort aus der Definition ablesen:

$$\mu^*(B)=\mu^*(B\cap E)+\mu^*\left(B\cap E^C\right)=\mu^*\left(B\cap E^C\right)+\mu^*\left(B\cap\left(E^C\right)^C\right).$$

(iv) Seien $E,F\in\mathfrak{A}_{\mu^*}$. Dann ist zu zeigen, dass auch $E\cup F\in\mathfrak{A}_{\mu^*}$.
Da E und F messbare Mengen sind, gilt für alle $B\in\mathfrak{P}(X)$

$$\mu^*(B)=\mu^*(E\cap B)+\mu^*(E^C\cap B)\quad\text{ und }\ \mu^*(B)=\mu^*(F\cap B)+\mu^*(F^C\cap B).$$

Dies liefert uns

$$\begin{aligned}
\mu^*(B) &= \mu^*(E\cap B)+\mu^*(E^C\cap B)\\
&= \mu^*(E\cap F\cap B)+\mu^*(E\cap F^C\cap B)+\mu^*(E^C\cap B)\\
&= \mu^*((E\cap F)\cap B)+\\
&\quad +\mu^*((E\cap F^C\cap B)\cup\underbrace{(E\cap E^C\cap B))}_{=\varnothing}+\\
&\qquad\qquad +\mu^*((E^C\cap E^C\cap B)\cup(E^C\cap F^C\cap B))\\
&= \mu^*(E\cap F\cap B)+\mu^*(B\cap\underbrace{(E^C\cup F^C)}_{(E\cap F)^C}).
\end{aligned}$$

Also ist $E\cap F\in\mathfrak{A}_{\mu^*}$ und somit auch $E^C\cap F^C\in\mathfrak{A}_{\mu^*}$. Anwendung von (iii) zeigt das Gesuchte

$$(E^C\cap F^C)^C=E\cup F\in\mathfrak{A}_{\mu^*}.$$

(v) Es seien $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}\subset\mathfrak{A}_{\mu^*}$ mit $E_j\cap E_k=\varnothing\;\forall j\neq k$. Aus (iv) wissen wir, dass $E_1\cup E_2\in\mathfrak{A}_{\mu^*}$ ist. Die Messbarkeit von $E_1\cup E_2$ liefert für alle $B\in\mathfrak{P}(X)$

$$\begin{aligned}
\mu^*(B\cap(E_1\cup E_2)) &= \mu^*(B\cap(E_1\cup E_2)\cap E_1)+\mu^*(B\cap(E_1\cup E_2)\cap E_1^C)\\
&= \mu^*(B\cap E_1)+\mu^*(B\cap E_2),
\end{aligned}$$

weil $B\cap E_1\cap E_1^C=\varnothing$ und $B\cap E_2\cap E_1^C=B\cap E_2$ sind.
Durch vollständigen Induktion erhalten wir:

$$\mu^*(B\cap(\bigcup_{j=1}^{k}E_j))=\sum_{j=1}^{k}\mu^*(B\cap E_j)\quad\text{mit}\quad\bigcup_{j=1}^{k}E_j\in\mathfrak{A}_{\mu^*}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mu^*(B) &= \mu^*(B\cap(\bigcup_{j=1}^{k} E_j)) + \mu^*(B\cap(\bigcup_{j=1}^{k} E_j)^C) \\
&\geq \mu^*(B\cap(\bigcup_{j=1}^{k} E_j)) + \mu^*(B\cap(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^C) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \mu^*(B\cap E_j) + \mu^*(B\cap(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^C).
\end{aligned}$$

Wir fassen das Ergebnis nochmal zusammen:

$$\mu^*(B) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B\cap E_j) + \mu^*(B\cap(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^C) \qquad (\#)$$

Man nutze die Subadditivität von μ^*:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B\cap E_j) + \mu^*(B\cap(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^C) &\geq \mu^*(B\cap(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)) + \mu^*(B\cap(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^C) \\
&\geq \mu^*(B)
\end{aligned}$$

Mit (#) erhalten wir nun:

$$\begin{aligned}
\mu^*(B) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B\cap E_j) + \mu^*(B\cap(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^C) \\
&= \mu^*(B\cap(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)) + \mu^*(B\cap(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^C)
\end{aligned}$$

Also ist $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$. Mit $B = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$ ergibt sich

$$\mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j) \qquad (*).$$

An dieser Stelle wenden wir einen Trick an. Es sei $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} F_j = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j \subset \mathfrak{A}_{\mu^*}$, wobei die Mengen $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$-paarweise disjunkt seien. Die $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ werden bei vorgegebenen $\{F_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}_{\mu^*}$ wie folgt definiert

$$E_1 = F_1 \text{ und } E_k := F_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} F_j, \quad \forall k \geq 2.$$

Damit liefert die obige Überlegung, dass $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ eine σ-Algebra ist und μ^* ist ein Maß auf $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ mit $\mu^*(\varnothing) = 0$ und $(*)$.

□

Bemerkung 1.2.7 (Lebesgue-Maß)**.** *Erklärt man den Lebesgueschen σ-Inhalt λ_L auf $I_{\mathbb{R}^n}$ durch $\lambda_L(\emptyset) := 0$ und*

$$\lambda_L(I) := \begin{cases} \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j), \text{ falls } I = [\underline{a}, \underline{b}) \text{ beschränkt} \\ \infty, \qquad \text{falls } I \text{ unbeschränkt,} \end{cases}$$

dann nennen wir das mit Hilfe von λ_L erzeugte äußeres Maß $\mu_L^* = \mu_{\lambda_L}^*$, mit $D(\mu_L^*) = \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ das Lebesguesche äußere Maß.

Das Mengensystem $\mathfrak{A}_{\mu_L^*}(\mathbb{R}^n)$ nennt man die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen und das Maß $\mu_L^* := \mu_L : \mathfrak{A}_{\mu_L^*}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ das Lebeguesche Maß.

Laut Definition ist $\mathfrak{B}^n = \sigma(I_{\mathbb{R}^n})$. Weil $\mathfrak{A}_{\mu_L^*}$ σ-Algebra mit $\mathfrak{A}_{\mu_L^*} \supset I_{\mathbb{R}^n}$ ist, gilt offenbar:

$$\sigma(I_{\mathbb{R}^n}) = \bigcap_{\mathfrak{A}^\sigma(\mathbb{R}^n) \supset I_{\mathbb{R}^n}} \mathfrak{A}^\sigma(\mathbb{R}^n) \quad \subset \mathfrak{A}_{\mu_L^*}(\mathbb{R}^n)$$

Das heißt: Jede Borel-Menge ist Lebesgue-messbar.
Die Einschränkung von μ_L auf $\mathfrak{B}^n = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ ist somit ein Maß auf $\mathfrak{B}^n$ und $[\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n, \tilde{\mu_L}]$ ($\tilde{\mu_L}(A) := \mu_L(A)\ \forall A \in \mathfrak{B}^n$) ist ein Maßraum.

$[\mathbb{R}^n, \mathfrak{A}_{\mu_L}, \mu_L]$ ist Maßraum nach Satz 1.2.8, 1.2.10 und Folgerung 1.2.9.

1.3 Vollständige Maße, Hahnscher Fortsetzungssatz, Approximation Lebesgue-messbarer Mengen

Erinnerung: $\lambda - \sigma-$Inhalt auf $\mathfrak{A}(X)$-Mengenalgebra, μ_λ^*- äußeres Maß auf $\mathfrak{P}(X)$, welches mit λ konstruiert wurde. (Stichwort: Infimum)

Satz 1.3.1 (Hahnscher Fortsetzungssatz)**.** *Es sei $\lambda - \sigma$-endlicher σ-Inhalt auf einer Mengenalgebra $\mathfrak{A}(X)$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Maß $\tilde{\mu_\lambda}$ auf der σ-Algebra $\sigma(\mathfrak{A}(X))$ mit $\tilde{\mu_\lambda}(A) = \lambda(A) \quad \forall A \in \mathfrak{A}(X)$.*

Bemerkung 1.3.1. *Zwei Maße μ und γ auf $\{X, \mathfrak{A}^{(\sigma)}(X)\}$ sind gleich: $\mu \underset{\mathfrak{A}^{(\sigma)}(X)}{=} \gamma$, wenn $\mu(E) = \gamma(E) \quad \forall E \in \mathfrak{A}^{(\sigma)}(X)$.*

Bemerkung 1.3.2. *Die Forderung λ ist σ-endlich ist für die Einzigkeit der Fortsetzung notwendig und hinreichend. Ist λ nicht σ-endlich, so kann es verschiedene Fortsetzungen von λ auf $\sigma(\mathfrak{A}(X))$ geben.*

Beweis. (Satz 1.3.1) [KONSTRUKTION:]
Sei μ_λ^* das aus λ konstruierte äußere Maß auf $\mathfrak{P}(X)$. Wir zeigen $\mathfrak{A}_{\mu_\lambda^*} \supset \sigma(\mathfrak{A}(X))$.
(Dann wird einfach μ_λ^* auf $\sigma(\mathfrak{A}(X)) \subset \mathfrak{A}_{\mu_\lambda^*}$ eingeschränkt).
Wir brauchen also nur zeigen, dass $\mathfrak{A}(X) \subset \mathfrak{A}_{\mu_\lambda^*}(X)$ gilt .
Es sei dazu $B \in \mathfrak{P}(X)$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert dann $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ als Überdeckung von B: $\{A_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathfrak{A}(X)$, $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \supset B$, mit $\quad \sum_{j=1}^\infty \lambda(A_j) < (\leq) \quad \mu_\lambda^*(B) + \varepsilon \quad .$

(Vgl. Def.: $\mu_\lambda^*(E) = \inf\{\sum\limits_{=1}^{\infty} \lambda(A_j) : \forall \{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}(X)$ mit $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \supset E\}, \forall E \subset \mathfrak{P}(X))$

(Wir können hier sogar $\mu_\lambda^*(B) < \infty$ voraussetzen, sowie auch endliche Überdeckungssysteme : $\{A_j\}_{j=1}^{N}$ verwenden.)

Es sei nun $A \in \mathfrak{A}(X)$, dann erhalten wir mit oben die Überdeckungssysteme : $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ von $B \cap A$ und $\{A_j \cap A^C\}_{j=1}^{\infty}$ von $B \cap A^C$.

Die Subadditivität von μ_λ^* liefert:

$\mu_\lambda^*(B) \leq \mu_\lambda^*(B \cap A) + \mu_\lambda^*(B \cap A^c) \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j \cap A) + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j \cap A^c)$

$= \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j \cap (A \cup A^C)) < (\leq) \quad \mu_\lambda^*(B) + \varepsilon \quad (\forall j \in \mathbb{N} : \lambda(A_j \cap A) + \lambda(A_j \cap A^c) = \lambda(A_j))$

Da $\varepsilon > 0$ bel.: $\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) = \mu^*(B)$, das heißt $A \in \mathfrak{A}(X)$ ist messbar.

$\Rightarrow \mathfrak{A}(X) \subset \mathfrak{A}_{\mu_\lambda^*}(X)$ und damit $\sigma(\mathfrak{A}(X)) = \sigma(\mathfrak{A}(X)) \cap \mathfrak{A}_{\mu_\lambda^*}(X)$, $\sigma(\mathfrak{A}(X)) \subset \mathfrak{A}_{\mu_\lambda^*}(X)$

Damit gilt: $\tilde{\mu}_\lambda : \sigma(\mathfrak{A}(X)) \to [0,\infty]$ mit $\tilde{\mu}_\lambda(E)$ ist $\forall E \in \sigma(\mathfrak{A}(X))$ ein Maß auf $\sigma(\mathfrak{A}(X))$ mit den geforderten Eigenschaften.

[EINZIGKEIT:] Für die Nutzung monotoner Systeme in Verbindung mit σ-Inhalten oder Maßen formulieren wir:

a) $\tilde{\lambda}$ ist σ-Inhalt über $\tilde{\mathfrak{A}}(X) \Leftrightarrow \forall \; \{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ mit $A_j, \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \tilde{\mathfrak{A}}(X)$ (Mengenalgebra) und $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ isoton, gilt: $\lim\limits_{j\to\infty} \tilde{\lambda}(A_j) = \tilde{\lambda}(\lim\limits_{j\to\infty} A_j) = \tilde{\lambda}(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j)$

b) Für antitone $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}, \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j, A_j \in \tilde{\mathfrak{A}}(X)$, bei $\tilde{\lambda}(A_j) < \infty$ für ein $j \in \mathbb{N}$, erhält man hier die Stetigkeitsaussage: $\quad \lim\limits_{j\to\infty} \tilde{\lambda}(A_j) = \tilde{\lambda}(\lim\limits_{j\to\infty} A_j) = \tilde{\lambda}(\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j)$

Erinnerung: Bei $\mathfrak{A}(X)$ Mengenalgebra war $\sigma(\mathfrak{A}(X)) = \mathfrak{m}(\mathfrak{A}(X))$ (als Durchschnitt aller monotoner Systeme, die $\mathfrak{A}$ enthalten).

Es seien nun $\tilde{\mu}_\lambda$ und $\tilde{\nu}$ zwei Fortsetzungen von λ auf $\sigma(\mathfrak{A}(X))$. Im Sinne der Fortsetzung von λ finden wir sofort: $\tilde{\mu}(A) = \tilde{\nu}(A) = \lambda(A) \quad \forall A \in \mathfrak{A}(X)$.

Betrachten wir nun das Mengensystem: $\quad \mathfrak{M} := \{E \in \sigma(\mathfrak{A}(X)) : \tilde{\mu}(E) = \tilde{\nu}(E)\} \supset \mathfrak{A}(X)$.

Nun sei zunächst $\lambda(X) = \tilde{\mu}_\lambda(X) = \tilde{\nu}(X) < \infty$.

Dann existieren $\forall\{E_j\}_{j=1}^\infty \subset \sigma(\mathfrak{A}(X))$, mit $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ isoton oder antiton und $E = \lim_{j\to\infty} E_j$ separat Dank der Stetigkeit von $\tilde{\mu}$ bzw. $\tilde{\nu}$ die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{j\to\infty} \tilde{\mu}_\lambda(E_j) = \tilde{\mu}_\lambda(\lim_{j\to\infty} E_j) = \tilde{\mu}_\lambda(E) \qquad \text{und} \qquad \lim_{j\to\infty} \tilde{\nu}_\lambda(E_j) = \tilde{\nu}_\lambda(\lim_{j\to\infty} E_j) = \tilde{\nu}_\lambda(E).$$

Nun seien die $\{E_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathfrak{M}$, d.h. speziell $\tilde{\nu}(E_j) = \tilde{\mu}_\lambda(E_j) \quad \forall j = 1,\ldots$
Das bedeutet: $\tilde{\mu}(E = \lim_{j\to\infty} E_j) = \tilde{\nu}(E = \lim_{j\to\infty} E_j)$, also $\lim_{j\to\infty} E_j \in \mathfrak{M}$.
(Einzigkeit des Grenzwertes im $\mathbb{E}^1$).
Damit ist also $\mathfrak{M}$ selbst ein monotones System und $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{m}(\mathfrak{A}(X))$, d.h. es gilt:
$\tilde{\mu}(E) = \tilde{\nu}(E) \forall E \in \sigma(\mathfrak{A}(X)) = \mathfrak{m}(\mathfrak{A}(X))$, Schreibweise $\tilde{\mu} = \tilde{\nu}$.
(Die Endlichkeit von λ benötigte man hier nur für antitone Mengenfolgen.)
Nun sei λ σ-endlich $\Leftrightarrow$ $\exists X_j \in \mathfrak{A}(X) : \{X_j\}_{j=1}^\infty$ paarw. disjunkt und $X = \bigcup_{j=1}^\infty X_j$ bei $\lambda(X_j) < \infty \ \forall j \in \mathbb{N}$
Es seien nun wieder $\tilde{\mu}_\lambda$ und $\tilde{\nu}$ zwei Fortsetzungen von λ auf $\sigma(\mathfrak{A}(X))$.
Wir betrachten „Spur"-Maße und „Spur"-Algebren ($\sigma-$).
Man erkläre $\tilde{\mu}_j(E) = \tilde{\mu}(E \cap X_j)$ und $\tilde{\nu}_j(E) = \tilde{\nu}(E \cap X_j) \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall E \in \sigma(\mathfrak{A}(X))$
mit $\tilde{\nu}_j(X) = \tilde{\mu}_j(X) = \lambda(X \cap X_j) < \infty$
Damit erhalten wir schließlich $\forall E \in \sigma(\mathfrak{A}(X))$:
$\tilde{\mu}(E) = \sum_{j=1}^\infty \tilde{\mu}(E \cap X_j) = \sum_{j=1}^\infty \tilde{\mu}_j(E) = \sum_{j=1}^\infty \tilde{\nu}_j(E) = \sum_{j=1}^\infty \tilde{\nu}(E \cap X_j) = \tilde{\nu}(E)$.
Damit ist die Einzigkeit gezeigt, denn es gilt $\tilde{\nu}(E) = \tilde{\mu}(E) \quad \forall E \in \sigma(\mathfrak{A}(X))$.

□

Definition 1.3.1 (Vollständiges Maß). *μ sei Maß auf der $\sigma-$Algebra $\mathfrak{A}(X)$.*
μ heißt vollständiges Maß auf $\mathfrak{A}(X)$, wenn $\forall N \in \mathfrak{P}(X)$ mit $\exists A \in \mathfrak{A}(X)$ mit $N \subset A$ und $\mu(A) = 0$ gilt: $\quad N \in \mathfrak{A}(X)$ und $\mu(N) = 0$.

Satz 1.3.2 (Maß-Vervollständigung). *Es sei $[X, \mathfrak{A}(X), \mu]$ Maßraum.*
Dann ist das System $\overline{\mathfrak{A}(X)}^\mu$ mit
$\overline{\mathfrak{A}(X)}^\mu :=$
$\{E \cup N : E \in \mathfrak{A}(X)$ *und zu* $N \in \mathfrak{P}(X) \quad \exists A \in \mathfrak{A}(X)$ *so dass* $N \subset A$ *mit* $\mu(A) = 0\}$
σ-Algebra über X und $\overline{\mu} : \overline{\mathfrak{A}(X)}^\mu \to [0,\infty]$ mit $\overline{\mu}(E \cup N) := \mu(E) \quad \forall E \cup N \in \overline{\mathfrak{A}(X)}^\mu$ ist ein vollständiges Maß auf $\overline{\mathfrak{A}(X)}^\mu$.

Beweis. (i) $\overline{\mathfrak{A}}^\mu$ ist σ-Algebra, denn bei
$E_{N_j} := E_j \cup N_j$ und $N_j \subset A_j \in \mathfrak{A}(X) : \mu(A_j) = 0 \, \forall j \in \mathbb{N}$ gilt:
$(E_{N_j})^c = E_j^c \cap N_j^c = E_j^c \cap (A_j^c \cup A_j \backslash N_j) = \underbrace{(E_j^c \cap A_j^c)}_{\in \mathfrak{A}(X)} \cup \underbrace{(E_j^c \cap A_j \backslash N_j)}_{\subset A_j} \in \overline{\mathfrak{A}}^\mu$.
Erhalten nun $\bigcup_{j=1}^\infty E_{N_j} = (\bigcup_{j=1}^\infty E_j) \cup (\bigcup_{j=1}^\infty N_j) = E \cup N$ mit $E = \bigcup_{j=1}^\infty E_j \in \mathfrak{A}(X)$,
$\bigcup_{j=1}^\infty N_j \in \mathfrak{P}(X)$, $\bigcup_{j=1}^\infty N_j \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathfrak{A}(X)$ bei $0 \leq \mu(\bigcup_{j=1}^\infty A_j) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j) = 0$

(nutzen Monotonie)
$\Rightarrow N = \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}(X)$ mit $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = 0 \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j \cup N_j) = E \cup N \in \overline{\mathfrak{A}}^{\mu}$

(ii) Überprüfen korrekte Def. von $\overline{\mu}$: Annahme $E_{N_1} = E_{N_2}$ analog oben, dann gilt:
$E_j \subseteq E_k \cup N_k \subseteq E_k \cup A_k, \forall (j,k) = (1,2),(2,1)$
$\Rightarrow \mu(E_j) \leq \overline{\mu}(E_{N_k}) \leq \mu(E_k) \Rightarrow \overline{\mu}(E_{N_1}) = \overline{\mu}(E_{N_2})$

(iii) $\overline{\mu}$ auf $\overline{\mathfrak{A}}^{\mu}$ ist vollst. Maß (vgl. Def.)

□

Bemerkung 1.3.3. $\mathfrak{A}(X) \subseteq \overline{\mathfrak{A}(X)}^{\mu}$ *(Dies entsteht rein formal bei $N = \emptyset$.)*

Folgerung 1.3.3 (Vervollständigung)**.** *Ist λ ein σ-endlicher σ-Inhalt auf einer Mengenalgebra $\mathfrak{A}(X)$, dann gilt:*

$$\mathfrak{A}_{\mu_{\lambda^*}}(X) = \overline{\sigma(\mathfrak{A}(X))}^{\tilde{\mu}_\lambda}$$

Hier bezeichnet μ_{λ^*} das mittels λ konstruierte äußere Maß auf $\mathfrak{P}(X)$ und $\tilde{\mu}_\lambda$ die eindeutige Fortsetzung von λ auf $\sigma(\mathfrak{A}(X))$.

Beweis.
$\mathfrak{A}_{\mu_\lambda^*}$ ist eine σ-Algebra (Satz 1.2.10) und nach dem Beweisteil (ii) des Satzes von Caratheodory (Satz 1.2.10) folgt aus $\mu_\lambda^*(E) = 0$ die Messbarkeit von E, also $E \in \mathfrak{A}_{\mu_\lambda^*}$.
Auf Grund der Monotonie des äußeren Maßes gilt zudem $\forall N \subset E : N \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$
(weil $\mu_\lambda^*(N) \leq \mu_\lambda^*(E) = 0$)

(a) Es seien nun $E, A \in \sigma(\mathfrak{A})$ und $N \subset A : \tilde{\mu_\lambda}(A) = 0 \Rightarrow E \cup N \in \overline{\sigma(\mathfrak{A})}^{\tilde{\mu}}$, andererseits gilt:
$\tilde{\mu_\lambda}(A) := \mu_\lambda^*(A)$
$\Rightarrow$ (mit oben) $N \in \mathfrak{A}_{\mu_\lambda^*}$ und $E \cup N \in \mathfrak{A}_{\mu_\lambda^*}$, d.h. $\overline{\sigma(\mathfrak{A})}^{\tilde{\mu_\lambda}} \subset \mathfrak{A}_{\mu_\lambda^*}$.

(b) Es sei nun $E \in \mathfrak{A}_{\mu_\lambda^*}(X)$. Setze o.E.d.A zunächst $\mu^*(E) < \infty$ voraus. Nun arbeiten wir wieder mit Überdeckungen weiter (vgl. Def. von μ_λ^*).
Wir wählen $\{A_j^{(k)}\}_{j=1}^{\infty}$ mit $\{A_j^{(k)}\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}(X) \forall k = 1,2,...$ und $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^{(k)}$ bei
$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j^{(k)}) \leq \mu_\lambda^*(E) + \frac{1}{k} \quad \forall k = 1,2...$
Setzen $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^{(k)} \in \sigma(\mathfrak{A}(X))$. Nach unserer Konstruktion gilt: $E \subset A$, d.h.

$$\mu_\lambda^*(E) \leq \mu_\lambda^*(A) \leq \mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^{(k)}) \leq \mu_\lambda^*(E) + \frac{1}{k} \quad \forall k = 1,2,...$$

Bei $k \to \infty : \mu_\lambda^*(E) = \mu_\lambda^*(A)$ sowie $\mu_\lambda^*(A \setminus E) = \mu_\lambda^*(A) - \mu_\lambda^*(E) = 0$.
Also $A \setminus E \in \mathfrak{A}_{\mu_\lambda^*}$.
Wenden nun den gleichen Trick auf: $A \setminus E$ an:

$A \setminus E \subset B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j^{(k)}$ mit $B \in \sigma(\mathfrak{A})$ und $A \setminus E \subset B$ mit $\mu^*(B) = \mu^*(A \setminus E) = 0$.

Zeigen noch: E hat die Standardgestalt von $\overline{\sigma(\mathfrak{A}(X))}^{\tilde{\mu}_\lambda}$: $\quad ((A \setminus E) \cap B^C) = \emptyset)$

$$E = (E \cap B^C) \cup (E \cap B) = ((A \setminus E) \cap B^C) \cup (E \cap B^C) \cup (E \cap B) = \underbrace{(A \cap B^C)}_{\in \sigma(\mathfrak{A})} \cup \underbrace{(E \cap B)}_{\subset B}$$

Dabei ist $E \cap B \subset B \in \sigma(\mathfrak{A})$ mit $\tilde{\mu}_\lambda(B) = \mu_\lambda^*(B) = 0$ also $E \in \overline{\sigma(\mathfrak{A}(X))}^{\tilde{\mu}_\lambda}$.

□

Bemerkung 1.3.4 (Vervollständigung). *Ist λ ein σ-endlicher σ-Inhalt auf der Mengenalgebra $\mathfrak{A}(X)$ und μ vollständiges Maß auf $\mathfrak{C}(X) \supset \mathfrak{A}(X)$ mit $\mu(A) = \lambda(A) \quad \forall A \in \mathfrak{A}(X)$, dann gilt: $\mathfrak{C}(X) \supset \mathfrak{A}_{\mu_{\lambda^*}}(X)$ und $\forall E \in \mathfrak{A}_{\mu_{\lambda^*}}(X) : \mu_{\lambda^*}(E) = \mu(E)$. (Beweis evident)*

Bemerkung 1.3.5 (Lebesgue). *Das Lebesguesche Maß μ_L ist offensichtlich ein vollständiges Maß auf der σ-Algebra der L-messbaren Mengen $\mathfrak{A}_{\mu_L}(\mathbb{R}^n)$.*

Satz 1.3.4 (Approximationssatz in $\mathfrak{A}_{\lambda_L}(\mathbb{R}^n)$).
$\forall E \in \mathfrak{A}_{\lambda_L}(\mathbb{R}^n)$ und $\forall \varepsilon > 0$ existiert

1. *eine offene Menge G mit $G \in \tau_{\mathbb{E}^n}$ und $E \subset G$ wobei $\mu_L(G \setminus E) < \varepsilon$*
2. *eine abgeschlossene Menge F mit $F \subset E$ und $\mu_L(E \setminus F) < \varepsilon$*

Beweis. (Approximationssatz in $\mathfrak{A}_{\mu_L}(\mathbb{R}^n)$)

(i) $\mathfrak{B}^n = \sigma(I_{\mathbb{R}^n}) \subset \mathfrak{A}_{\mu_L}(\mathbb{R}^n)$ und
jede offene Menge ist Borelmenge (Satz 1.2.5): $\forall$ G $\in \tau_{\mathbb{E}^n} \subset \mathfrak{B}^n$

(a) E sei beschränkt, $E \in \mathfrak{A}_{\mu_L}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig.
Weil E $\in \mathfrak{A}_{\mu_l} \to \exists \{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset I_{\mathbb{R}^n}$:
$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \supset$ E und $A_j = [\underline{a}^j, \underline{b}^j)$ und $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_L(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_L(A_j) < \mu_L(E) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$.
Nun verschieben wir jede 'linke' Intervall-Grenze $\underline{a}^j$ nach 'links' zu einem $\tilde{\underline{a}}^j$ mit: $\tilde{a}_k^j < a_k^j \forall k = 1, 2, ..., n$, so dass:$\tilde{A}_j = (\tilde{\underline{a}}^j, \underline{b}^j) \supset A_j$ und

$$\mu_L(\tilde{A}_j) \leq \mu_L(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \qquad (\#)$$

Setzen $G := \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{A}_j \in \tau_{\mathbb{E}^n}$. Mit $(*)$ und (#) erhalten wir:

$$\mu_L(G) = \mu_L(\bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{A}_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_L(\tilde{A}_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_L(A_j) + \frac{\varepsilon}{2} < \mu_L(E) + \varepsilon$$

Weil $\mu_L(E) < \infty$ und μ_L - Maß, folgt:

$$\mu_L(G \setminus E) = \mu_L(G) - \mu_L(E) < \varepsilon$$

(b) E-sei unbeschränkt, $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ mit $\{X_j\}_{j=1}^{\infty} \subset I_{\mathbb{R}^n}$,
$\{X_j\}_j$-paarweise disjunkt mit $\lambda_L(X_j) < \infty \, \forall j = 1, 2, ...$
Setzen $\forall j \in \mathbb{N}$: $E_j := E \cap X_j$ und denken uns nun nach Schritt (a) hierzu die offenen Mengen G_j konstruiert.
Die G_j mit: $G_j = (\bigcup_{l=1}^{\infty} \tilde{A}_l) \cap X_j$ sind relativ offen - das heißt: offen in der Unterraumtopologie $\tau_{\mathbb{E}^n|X_j}$.
Wir wählen die $\{\tilde{A}_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ so, dass $\mu_{L|X_j}(G_j \setminus E_j) = \mu_{L|X_j}(G_j) - \mu_{L|X_j}(E_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}$
$\Rightarrow$Aufsummation liefert: $G := \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j \in \tau_{\mathbb{E}^n}$ und schließlich :

$$\mu_L(G \setminus E) = \mu_L(G \setminus (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)) < \varepsilon.$$

(i) gezeigt

(ii) Nach (i) existiert ein G, so dass für die Menge $E^C \in \mathfrak{A}_{\mu_L}$ gilt:
$\mu_L(G \setminus E^C) < \varepsilon$ mit $G \supset E^C$.
Die Menge $F := G^C$ ist abgeschlossen und $F = G^C \subset E$, also:

$$\mu_L(G \setminus E^C) = \mu_L(G \cap E) = \mu_L(E \setminus G^C) = \mu_L(E \setminus F) < \varepsilon$$

□

Definition 1.3.2 (fast überall Äquivalenz)**.**
$[X, \mathfrak{A}, \mu]$ *- Maßraum und* $x \in X$ *sei ein Punkt von* X*. Eine von* x *abhängige Aussage* $\mathscr{A}(x)$ *gilt fast überall auf einer Menge* $E \in \mathfrak{A}(X)$*, wenn* $\forall x \in E$ *gilt:* $\mathscr{A}(x)$ *ist entscheidbar und* $E_{\neg\mathscr{A}} := \{x \in E : \mathscr{A}(x) \text{ ist falsch }\} \in \mathfrak{A}$ *und* $\mu(E_{\neg\mathscr{A}}) = 0$.
Zwei auf E definierte Funktionen f und g: $f, g : E \to (Y, \tau_y)$ *(mit* (Y, τ_y) *Hausdorffsch) heißen äquivalent, wenn* $f(x) = g(x)$ *fast überall auf E gilt.* *Schreibweise:* $f \sim_E g$

Bemerkung 1.3.6. $\{X, \mathfrak{A}(X)\}$ *messbarer Raum. Alle auf* $\{X, \mathfrak{A}(X)\}$ *erklärten Maße bilden einen additiven Maßkegel, d.h. alle Konstrukte der Gestallt:* $\gamma = \alpha\mu + \beta\nu$ *mit* $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ *und* μ, ν *Maße auf* $\{X, \mathfrak{A}(X)\}$ *sind Maße auf* $\{X, \mathfrak{A}(X)\}$.

1.4 Messbare Abbildungen

Erinnerung an Abbildungssatz(Satz 1.2.6) und Bemerkung 1.2.4:
$f : X \to Y \quad D(f) = X; W(f) = R(f) \subset Y$ mit $\{Y, \mathfrak{C}(Y)\}$ messbarer Raum
(d.h. $\mathfrak{C}(Y)$ ist σ-Algbra) $\Rightarrow \mathfrak{A}(X) = f^{-1}(\mathfrak{C}(Y))$ ist σ-Algbra über X.

Dabei kann man offensichtlich allein mit der Spuralgebra $\mathfrak{C}_{R(f)}(Y)$ auf $R(f) \subset Y$ arbeiten, d.h. $\mathfrak{A}(X) = f^{-1}(\mathfrak{C}_{R(f)}(R(f)))$.
Der Wertevorrat kann also als neuer Raum Y gewählt werden.

Definition 1.4.1 (Messbare Abbildungen)**.**
Die surjektive Abbildung

$$f : \{X, \mathfrak{A}(x)\} \to \{Y, \mathfrak{C}(Y))\}$$

heißt $\mathfrak{C} - \mathfrak{A}$*-messbar, wenn* $\forall C \in \mathfrak{C}(Y)$ *gilt, dass* $f^{-1}(C) \in \mathfrak{A}(X)$ *ist.*

Bemerkung 1.4.1. *Y und $\mathfrak{C}(Y)$ können laut der obigen Vorüberlegungen über die Spuralgebra immer so gewählt werden, dass f surjektiv ist.*

Bemerkung 1.4.2. *Eine messbare Abbildung ($\mathfrak{C} - \mathfrak{A}$-messbar) muss also die Eigenschaft $f^{-1}(\mathfrak{C}(Y)) \subset \mathfrak{A}(X)$ haben.*
Die Messbarkeit von Abbildungen ist zunächst völlig unabhängig von einem vorgegebenen Maße z.B. μ auf $\{X, \mathfrak{A}(X)\}$ erklärt.

Satz 1.4.1 (Verkettungssatz)**.**
Es seien $\{X, \mathfrak{A}(X)\}, \{Y, \mathfrak{C}(Y)\}, \{Z, \mathfrak{D}(Z)\}$ messbare Räume und
$f : \{X, \mathfrak{A}(X)\} \to \{Y, \mathfrak{C}(Y)\}$ *sowie* $g : \{Y, \mathfrak{C}(Y)\} \to \{Z, \mathfrak{D}(Z)\}$
f sei $\mathfrak{C} - \mathfrak{A}$-messbar und g sei $\mathfrak{D} - \mathfrak{C}$-messbar, dann ist die Abbildung
$g \circ f = \{X, \mathfrak{A}(X)\} \to \{Z, \mathfrak{D}(Z)\}$ $\mathfrak{D} - \mathfrak{A}$*-messbar.*

Beweis.

$$(g \circ f)^{-1}(\mathfrak{D}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathfrak{D}))$$

mit $g^{-1}(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{C}$ und somit $f^{-1}(g^{-1}(\mathfrak{D})) \subset \mathfrak{A}$ □

Satz 1.4.2 (Bildmaßsatz)**.**
Die Abbildung $f : [X, \mathfrak{A}, \mu] \to \{Y, \mathfrak{C}\}$ sei messbar. Dann ist auf $\{Y, \mathfrak{C}\}$ ein Maß ν erklärt durch:

$$\nu(C) := \mu(f^{-1}(C)) \qquad \forall C \in \mathfrak{C}$$

Bezeichnung: $\nu := f(\mu)$ heißt Bildmaß von μ unter der Abbildung f.
Bei der Verkettung zweier meßbarer Funktionen g und f (analog zum Verkettungssatz): $g \circ f : \{X, \mathfrak{A}\} \to \{Z, \mathfrak{D}\}$ gilt offensichtlich:

$$(g \circ f)(\mu) = g(f(\mu))$$

Beweis.
Zeigen $\sigma-$Additivität: $\{C_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{C}$ $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$ - Folge paarweiser disjunkter Mengen.
$\Rightarrow \{f^{-1}(C_j)\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}$ ist wieder Folge paarweiser disjunkter Mengen

$$\Rightarrow \nu(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j) := \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(C_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(f^{-1}(C_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(C_j)$$

Noch zu zeigen: Transitivität
Sei $D \in \mathfrak{D}$, dann gilt:

$$((g \circ f)(\mu))(D) = \mu(f^{-1}(g^{-1}(D))) = g(f(\mu))(D)$$

□

Definition 1.4.2 ((Borel-)messbar). *Die reellwertige Funktion* $f : \{X, \mathfrak{A}\} \to \{\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}^1\}$ *heißt (Borel-)messbar, wenn* $f^{-1}(B) \in \mathfrak{A} \quad \forall B \in \mathfrak{B}^1$

Bemerkung 1.4.3. *Völlig analog kann man die Lebesgue-Messbarkeit definieren. Dabei muss der Urbildraum dann ein Maßraum mit vollständigem Maß sein. Ebenso formuliert man die (Borel-)Messbarkeit auf Spur-Räumen, d.h. für* $\{X, \mathfrak{A}\}$ *wird* $\{E, \mathfrak{A}_E\}$ *verwandt.(Oft benutzt man hier:* $E \in \mathfrak{A}$*.)*

Satz 1.4.3 (BMF1). f *sei reellwertige Funktion nach oben.* f *ist genau dann messbar, wenn* $\forall a \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$E(f < a) := f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathfrak{A}$$

(dabei ist $a = \infty$ *erlaubt)*

Beweis. „$\Leftarrow$“ Intervalle bilden zusammen mit $\emptyset$ erzeugenden Halbring $\mathfrak{H}$ und $\sigma(\mathfrak{H}) = \mathfrak{B}^1$. Nach Voraussetzung ist $f^{-1}(\mathfrak{H}) \subset \mathfrak{A} \Rightarrow \sigma(f^{-1}(\mathfrak{H})) \subset \mathfrak{A}(X)$ (Abbildungssatz (Satz 1.2.6))
“$\Rightarrow$“ Trivial. □

Folgerung 1.4.4 (BMF2). *Satz 1.4.3 kann völlig analog formuliert werden, wenn man mit den Mengen*
$E(f \leq a) := f^{-1}([-\infty, a])$, $E(f > a) := f^{-1}((a, \infty])$ *sowie* $E(f \geq a) := f^{-1}([a, \infty])$ *arbeitet.*

Beweis. 1.Idee: Die Systeme $[-\infty, a] \quad \ldots$ sind als Halbring $\mathfrak{H}$ „Erzeuger“ von $\mathfrak{B}^1$.
2.Idee: $E(f \leq a) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E(f < a + \frac{1}{k})$, Rest analog! □

Satz 1.4.5 (BMF3). *Die Funktionen f und g seien messbar und* $c \in \mathbb{R}$ *sei Parameter. Dann sind die Funktionen*

$$f \pm g, c \cdot f, f \cdot g, \frac{f}{g}$$

messbar. (Letzteres mit Zusatzvoraussetzung: $g(x) \neq 0 \forall x \in X$*)*
Die Fälle $\infty - \infty$ *und* $\frac{\infty}{\infty}$ *seien hier ausgeschlossen.*

Beweis. (i) $(f+g)$, z.Z. ist $E(f+g < a) \in \mathfrak{A}(X)$
Betrachte $(f+g)(x) \quad \forall x \in X$ (punktweise). Dann gilt:
$f(x) + g(x) < a \Leftrightarrow \exists\, q \in \mathbb{Q}$, so dass $f(x) < q$ und $g(x) \leq a - q$:
Damit erhält man: $E(f+g < a) = (\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (E(f < q) \cap E(g \leq a - q))) \in \mathfrak{A}$

(ii) $(c \cdot f)$ bei $c \in \mathbb{R}^1$: Fallunterscheidung:

a) $c > 0 : E(f < a) \in \mathfrak{A} \Rightarrow E(f < \frac{a}{c}) \in \mathfrak{A} \Leftrightarrow E(c \cdot f < a) \in \mathfrak{A}$

b) $c = 0 : E(c \cdot f = 0 < a) = \emptyset \in \mathfrak{A} \quad \forall a \in (-\infty, 0]$
$E(c \cdot f = 0 < a) = X \in \mathfrak{A} \quad \forall a \in (0, \infty)$

c) $c < 0$: wie in Pkt. a) mit $E(f > \frac{a}{c}) \in \mathfrak{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}^1$

(iii) $(f-g)$, hier ist $-g$ messbar nach (ii) und Rest nach (i).

(iv) (f^2) $\quad \forall a : a \leq 0$ gilt: $E(f^2 < a) = \emptyset \in \mathfrak{A}$
$\forall a > 0 : E(f^2 < a) = E(f < \sqrt{a}) \cap E(f > -\sqrt{a}) \in \mathfrak{A}$

(v) $(f \cdot g)$, $f \cdot g = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$ mit oben messbar.

(vi) $(\frac{1}{g})$: z.B. $E(\frac{1}{g} < a) \overset{a,g>0}{=} E(\frac{1}{a} < g) \in \mathfrak{A}$ (Rest: Falldiskussion)

(vii) $(\frac{f}{g})$ messbar, weil $\frac{1}{g}$ messbar und (v)

□

Satz 1.4.6 (BMF4). *Ist f messbar, so gilt dies auch für die Funktion $|f|$ und den Positiv-/ Negativanteil von f: $f_+(x) := \max(f(x), 0)$ $f_-(x) := \max(-f(x), 0)$.*

Bemerkung 1.4.4. *Hier gilt offensichtlich: $f_+(x) + f_-(x) = |f(x)|$, $f_+(x) - f_-(x) = f(x)$*

Beweis. (Satz 1.4.6) [vgl. Bew. von Satz 1.4.5]
$(E(f_+ < 0) = \emptyset$, $(\forall a < 0$ analog)
Nun $a > 0 : E(f_+ < a) = E(f < 0) \cup E(f = 0) \cup E(f < a) = E(f < a) \in \mathfrak{A}$ □

Satz 1.4.7 (BMF5). *Es sei $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ eine Folge messbarer Funktionen. Dann sind die Funktionen (punktweise, also $\forall x \in X$ erklärt) $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$, $\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k$, $\overline{\lim}_{k\to\infty} f_k$, $\underline{\lim}_{k\to\infty} f_k$ und, wenn dieser existiert: $\lim_{k\to\infty} f_k$ messbar. (Sinnvoll sind hier immer auch fast überall Endlichkeitsforderungen, also Endlichkeitsforderung f.ü. auf X, $[X, \mathfrak{A}, \mu]$ z.B. Maßraum.)*

Beweis. Übungsaufgabe Serie 5

(i) Die Funktion $f(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$ ist messbar:
Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f : E \to \mathbb{R}$ $(E \subset \mathbb{R})$. Wir betrachten

$$E(f(x) > a) := f^{-1}((a, \infty)) \cap E$$

$f(x)$ ist genau dann größer als a, falls ein k existiert mit $f_k(x) > a$. Es ist

$$E(f(x) > a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_k(x) > a).$$

Da alle f_k messbar sind und $E(f_k(x) > a)$ Elemente einer σ-Algebra (nach Def.) sind, ist $E(f(x) > a)$ auch Element der σ-Algebra und $f(x)$ messbar.

(ii) Die Funktion $f(x) = \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k$ ist messbar:
Nach (i) ist $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$ messbar. Damit ist auch $-\sup_{k\in\mathbb{N}}(-f_k)$ messbar. Wegen

$$f(x) = \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k = -\sup_{k\in\mathbb{N}}(-f_k)$$

ist auch $f(x)$ messbar.

(iii) Die Funktion $f(x) = \overline{\lim_{k\to\infty}} f_k$ ist messbar.
Es ist
$$\overline{\lim_{k\to\infty}} f_k = \overline{\lim_{k\to\infty}}(\sup\{f_k, f_{k+1}, \ldots\}) := \lim_{k\to\infty} s_k.$$
Nach (i) ist s_k für jedes k messbar. Die Folge s_k ist monoton fallend in jedem Punkt des Definitionsbereichs der f_k. Deshalb ist
$$\lim_{k\to\infty} s_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} s_k.$$
Da $\inf_{k\in\mathbb{N}} s_k$ nach (ii) messbar ist, ist auch $\lim_{k\to\infty} s_k = \overline{\lim_{k\to\infty}} f_k$ messbar.

(iv) Die Funktion $f(x) = \underline{\lim_{k\to\infty}} f_k$ ist messbar.
Die Behauptung folgt mit (iii) und
$$\underline{\lim_{k\to\infty}} f_k = -\overline{\lim_{k\to\infty}}(-f_k).$$

(v) Falls $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k$ existiert, ist $f(x)$ messbar.
Falls $f(x)$ existiert ist
$$f(x) = \overline{\lim_{k\to\infty}} f_k = \underline{\lim_{k\to\infty}} f_k.$$
Dann ist $f(x)$ nach (iii) und (iv) messbar.

□

Satz 1.4.8 (BMF6)**.** *Eine komplexwertige Funktion* $f : \{X, \mathfrak{A}\} \to \{\mathbb{C}, \mathfrak{B}^{2\star}\}$ *ist genau dann messbar, wenn auch* $\mathrm{Re}(f)$ *und* $\mathrm{Im}(f) : \{X, \mathfrak{A}\} \to \{\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}^1\}$ *messbar sind.*
$\mathfrak{B}^{2\star}$ *ist hier die kleinste* σ*-Algebra, welche* $\mathfrak{H}^\star = \{\emptyset, \{[-\infty, a) \times i[-\infty, b)\}_{a,b\in\mathbb{R}}\}$ *enthält.*

Beweis. f sei messbar $\Rightarrow \mathrm{Re}(f)$,$\mathrm{Im}(f)$ messbar nach Verkettungssatz,
denn $\mathrm{Re}(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ und $\mathrm{Im}(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sind stetige Funktionen (vgl. Bsp. (B1)).
Andererseits erweitert man die Messbarkeit von $c \cdot f$ auf $i \cdot c \cdot f$, $f = \mathrm{Re}(f) + i \cdot \mathrm{Im}(f)$ □

Beispiele 1.4.1 (Beispiele für messbare Funktionen)**.**

(B1) $f : \{\mathbb{R}^n, \mathfrak{A}_{\mu_L}\} \to \{\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}^1\}$ *mit* f *ist stetig*

Beweis. Das Urbild von offenen Mengen bei stetigen Abbildungen ist offen und damit aus $\mathfrak{A}_{\mu_L}$ □

(B2) Es sei $\{X, \mathfrak{A}\}$ *messbarer Raum und* $\chi_E(x)$ *die charakteristische Funktion von* $E \in \mathfrak{A}$*, dann ist* $\chi_E(x)$ *messbar mit* $E(\chi_E(x) < 1) = E^C$ *und* $E(\chi_E(x) \leq a) = X$ *bei* $a \geq 1$

(B3) **Definition 1.4.3** (Allgemeine Treppenfunktion)**.** $\{X, \mathfrak{A}\}$ *sei messbarer Raum. Die Funktion* $f(x) := \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \chi_{E_j}(x)$ *mit* $E_j \in \mathfrak{A}$ *und* $\alpha_j \in \mathbb{R}$ *(bzw.* $\mathbb{C}$*)* $\forall j = 1 \ldots N$ *nennen wir einfache oder Treppenfunktion.*

Nach dem Satz 1.4.5 ist jede Treppenfunktion messbar.

Satz 1.4.9 (BMF7 : Approximation messbarer Funktionen mit Treppenfunktionen)**.**
Jede messbare Funktion mit $D(f) = E \in \mathfrak{A}$ (bei $\{X, \mathfrak{A}\}$ messbarer Raum) kann als punktweiser Grenzwert einer Folge von Treppenfunktionen dargestellt werden.

Beweis. Denken wir an f_+ und f_- so genügt es, die Aussage für nichtnegative Funktionen zu zeigen: Sei also $f \geq 0$ auf X, $\{X, \mathfrak{A}\}$ messbarer Raum und f ist messbar.
Wir erklären nun eine Folge von Treppenfunktionen $\{t_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ durch

$$t_k(x) = \sum_{j=1}^{k \cdot 2^k} \frac{j-1}{2^k} \chi_{E(\frac{j-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{j}{2^k})}(x) + k \cdot \chi_{E(k \leq f(x))}(x)$$

Dann ist $\forall x : f(x) < \infty : 0 \leq f(x) - t_k(x) < \frac{1}{2^k}$ und
$\forall x : f(x) = \infty$: bestimmte Divergenz. □

1.5 Konvergenzbegriff für messbare Funktionen in Maßräumen

Definition 1.5.1 (Konvergenz und Cauchy-Folgen)**.**
$[X, \mathfrak{A}, \mu]$ sei Maßraum und $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ sei Folge messbarer Funktionen.

i) Gilt $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$ pktw. f.ü., so schreiben wir $\{f_j\}_{j=1} \underset{f.ü.}{\longrightarrow} f$ und sagen die Folge der $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ konvergiert fast überall (f.ü.) gegen f.

ii) $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ heißt fast überall (f. ü.)-Cauchy-Folge, wenn $\forall \varepsilon > 0$, $\exists j_0(\varepsilon)$, so dass $\forall j,k \geq j_0(\varepsilon)$ $|f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon$ punktweise f.ü. gilt. (Hier gilt $j_0(\varepsilon) = j_0(\varepsilon, x)$)

iii) Ist $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ f.ü. Cauchy-Folge und gilt f.ü: $j_0(\varepsilon, x)$ ist unabhängig von x, so sprechen wir von einer fast überall gleichmäßigen Cauchy-Folge. Dies nennt man auch $L_\infty(X, \mathfrak{A}, \mu)$-Konvergenz.

iv) Die Folge $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ konvergiert gegen eine messbare Funktion f dem Maße nach, wenn $\forall \varepsilon > 0$ gilt,

$$\lim_{j\to\infty} \mu(E(|f_j - f| \geq \varepsilon)) = 0$$

Schreibweise $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \underset{\mu}{\rightarrow} f$.

v) $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ heißt μ-Cauchy-Folge wenn $\forall \varepsilon, \delta > 0$ ein $j_0(\varepsilon, \delta)$ existiert, so dass

$$\mu(E(|f_k - f_j| \geq \varepsilon)) \leq \delta \qquad \forall j,k \geq j_0(\varepsilon, \delta)$$

.

Bemerkung 1.5.1. *iv) und v) kann man analog für $A \subset \mathfrak{A}$ formulieren: d.h. wir gehen in den Maßraum $[A, \mathfrak{A}_{|A}, \mu_{|A}]$.*

Bemerkung 1.5.2. *Für f.ü.-Aussagen bedarf es nur einer festen Menge $\tilde{E}$, auf welcher die Aussage verletzt sein darf, während bei der Konvergenz dem Maße nach mit jedem $j \in \mathbb{N}$ diese Mengen wechseln könnten.*

Satz 1.5.1 (Maß Konvergenz 1 (MK1) (Vergleich der Konvergenzarten))**.**
Sei $[X, \mathfrak{A}, \mu]$ Maßraum, und $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ Folge messbare Funktionen. (Bei $[X, \mathfrak{A}, \mu]$ als nicht vollständigem Maßraum, forden wir zusätzlich die Messbarkeit von f !)

i) *Aus $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \underset{f.ü.}{\longrightarrow} f \Rightarrow \{f_j\}_{j=1}^{\infty} \underset{\mu_{|A}}{\longrightarrow} f \quad \forall A \in \mathfrak{A} : \mu(A) < \infty$*

ii) *Jede f.ü. Cauchy-Folge ist auch (vgl. i) eine $\mu_{|A}$-Cauchy-Folge ($\forall A \in \mathfrak{A} : \mu(A) < \infty$)*

iii) *Ist $\{f_j\}_{j\geq 1} \underset{\mu}{\rightarrow} f \Rightarrow \exists \{f_k\}_{k\geq 1} \subset \{f_j\}_{j\geq 1}$ (als Teilfolge) mit $\{f_k\}_{k\geq 1} \underset{f.ü.}{\longrightarrow} f$.*

iv) *Ist $\{f_j\}_{j\geq 1}$ eine μ-Cauchy-Folge, so existiert eine Teilmenge $\{f_k\}_{k\geq 1} \subset \{f_j\}_{j\geq 1}$ mit $\{f_k\}_{k\geq 1}$ ist f. ü. Cauchy-Folge.*

Bemerkung 1.5.3. *Gilt $\mu(X) < \infty$, so kann in i) und ii) $\mu_{|A}$ durch μ ersetzt werden.*

Beweis. Elstrodt Maß- und Integrationstheorie Satz 4.5 (S. 235) von Rusz, Lebesgue und Satz 4.12 (S. 256)
Wichtiges Beweismittel: Satz 1.5.3 von Egorov (später).

□

Satz 1.5.2 (MK2 (Äquivalente Formulierung von f. ü. Konvergenz))**.**
$[X, \mathfrak{A}, \mu]$ sei Maßraum, $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ Folge messbarer Funktionen.

i) $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \underset{f.ü.}{\longrightarrow} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \mu(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E(|f_{j+k} - f| \geq \varepsilon)) = 0$
(1. Glied spielt keine Rolle für die Konvergenz.)

ii) *Gilt* $\forall \varepsilon > 0 : \lim_{l\to\infty} \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E(|f_{k+l} - f| \geq \varepsilon)) = 0 \Rightarrow \{f_j\}_{j\geq 1} \underset{f.ü.}{\longrightarrow} f$

iii) *Bei $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \underset{f.ü.}{\longrightarrow} f$ und $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ gilt:*
$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{l\to\infty} \mu(A \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} E(|f_{l+k} - f| \geq \varepsilon)) = 0$
(Die Aussagen sind äquivalent bei: $\mu(X) < \infty$!)

Bemerkung 1.5.4. *Der Satz 1.5.2 kann analog auch für f.ü. Cauchy-Folgen formuliert werden.*

Beweis. (Satz 1.5.2)

i) $\{f_j\}_{j\geq 1} \underset{\text{f.ü.}}{\longrightarrow} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ hat die Menge
$E_\varepsilon := \{x \in X : \forall l \geq 1, \exists k \geq 1 : |f_{k+l} - f| \geq \varepsilon\}$ das Maß Null. $\mu(E_\varepsilon) = 0$

ii) klar

iii) Grenzwert wird zunächst über Mengen endlicher Maße berechnet
$\mu(A\cap(\bigcup_{k=1}^{\infty}E(|f_{l+k}-f|\geq\varepsilon)))\leq\mu(A)<\infty.$
Schließlich erinnere man sich an das Verketten und die Darstellung von Grenzwerten bei antitonen Mengenfolgen und σ-Inhalten. (vgl. Beweis des Hahnschen Fortsetzungssatz). Zentral hier $\mu(A)<\infty$, Rest mit ii).

□

Beispiele 1.5.1. *Die Umkehrung von ii) ist bei* $\mu(X)=\infty$ *falsch, denn mit* $[X,\mathfrak{A},\mu]=[\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}^1,\mu_L]$ *und* $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}=\{\chi_{[j,\infty)}\}_{j=1}^{\infty}$ *; gilt:* $\{f_j(x)\}_{j=1}^{\infty}\to 0$ *punktweise überall (aber nicht gleichmäßig)* $\Rightarrow\{f_j\}_{j=1}^{\infty}\xrightarrow[f.ü.]{}0$. *Aber im Grenzwert steht* $\forall\varepsilon\in(0,1):$
$\mu(E(|f_j-0|\geq\varepsilon))=\infty\neq 0$

Definition 1.5.2 ($\mathbb{L}_\infty$ und fast gleichmäßige Konvergenz)**.**
Eine Folge messbarer Funktionen $\{f_j\}_{j\geq 1}$ *konvergiert im* $\mathbb{L}_\infty$*-Sinn (vgl. Def. 1.5.1(iii)) (auch f.ü. gleichmäßig) gegen* f*:* $\{f_j\}\xrightarrow[\mathbb{L}_\infty(X)]{}f$*, wenn* $\exists A\in\mathfrak{A}$ *mit* $\mu(A)=0$ *und*
$\{f_j\}\xrightarrow[glm.]{}f$ *auf* A^C.
Eine Folge messbarer Funktionen $\{f_j\}_{j\geq 1}$ *konvergiert* *<u>fast gleichmäßig</u>* *gegen* f*, wenn* $\forall\delta>0$*,* $\exists A_\delta\in\mathfrak{A}$ *mit* $\mu(A_\delta)<\delta$*, so dass die Folge* $\{f_j\}\xrightarrow[f.\ glm]{}f$ *(* $j_0(\varepsilon)$ *fix* $\forall x\in A_\delta^C$*) gleichmäßig auf* A_δ^C *konvergiert.*

Bemerkung 1.5.5. *Ganz analog zur Def. 1.5.2 kann man fast glm. Cauchy-Folgen definieren. Hier gewinnt man sofort eine Grenzfunktion durch:*

$$\exists f|_{A_\delta^C}(x):=\lim_{j\to\infty}f_j|_{A_\delta^C(x)}\ .$$

Setzt man hier: $\forall k\in\mathbb{N}:\delta_k:=\frac{1}{k}$ *und nutzt Mengen* A_k *mit* $\mu(A_k)<\delta_k=\frac{1}{k}$*, dann ist* $A:=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathfrak{A}$ *bei* $\mu(A)=0$*, das heißt* $\{f_j\}_{j\geq 1}\xrightarrow[f.ü.]{}f$ *und* $f(x):=\lim_{j\to\infty}f_j(x)\cdot\chi_{A^C}(x)$

Satz 1.5.3 (Satz von Egorov(MK3))**.** *Ist* $\mu(X)<\infty$ *und konvergiert* $\{f_j\}_{j\geq 1}\xrightarrow[f.ü.]{}f$*, so konvergiert* $\{f_j\}_{j\geq 1}$ *fast gleichmäßig gegen* f*. (Alle Funktionen als messbar vorrausgesetzt.)*

Beweis. iii) aus Satz 1.5.2 etwas umgeschrieben liefert:
$\forall\varepsilon>0:\lim_{l\to\infty}\mu(\bigcup_{j=l}^{\infty}E(|f_j-f|\geq\varepsilon))=0.$
Nun sei $\delta>0$, δ fix, $\forall k\in\mathbb{N}$, $\exists l_k\in\mathbb{N}$, so dass
$B_k:=\bigcup_{j=l_k}^{\infty}E(|f_j-f|\geq\frac{1}{k})$ mit $\mu(B_k)<\frac{\delta}{2^k},\forall k=1,2,\dots$
Damit ist $A:=\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\in\mathfrak{A}$, sowie $\mu(A)<\delta$. Bei $x\in A^c$, d.h. $x\notin B_k,\forall k\in\mathbb{N}$:
$|f_j(x)-f(x)|\leq\frac{1}{k},\forall j\geq l_k$ d.h. f_j konvergiert auf A^c gleichmäßig. □

Beispiele 1.5.2. *Maßraum* $([0,1),\mathfrak{A}_{\mu_L}[0,1),\mu_L)$. *Betrachte Funktionsfolge:*
$f_j(x) := x^j$, $\forall j = 1,2,\dots$
Dann ist die gesuchte Menge (deren Existenz mit dem Satz 1.5.3 gesichert ist) $A^c = [0,1-\delta]$, $0 < \delta < 1$

Bemerkung 1.5.6. *(Zur f.ü. Konvergenz und Messbarkeit der Grenzfunktion.)*
Im allgemeinen Fall (bei nicht vollständigen Maßräumen) kann man die f.ü. Äquivalenz (vgl. Def 1.3.2) wie folgt abschwächen:

Definition 1.5.3 (abgeschwächte f. ü. Äquivalenz)**.**
$[X,\mathfrak{A},\mu]$ *- Maßraum und* $x \in X$ *sei ein Punkt von* X. *Eine von* x *abhängige Aussage* $\mathscr{A}(x)$ *gilt fast überall auf* X, *wenn* $\forall x \in X$ *gilt:* $\mathscr{A}(x)$ *ist entscheidbar und* $B_{\neg\mathscr{A}} := \{x \in X : \mathscr{A}(x)$ *ist falsch* $\} \subset A \in \mathfrak{A}$ *und* $\mu(A) = 0$.

Bemerkung 1.5.7. *Sei nun* $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \xrightarrow[f.ü.]{} f$ *im obigen Sinne.*
Problem: $E_o := \{x : \lim\limits_{j\to\infty} f_j(x)$ *konvergiert nicht* $\}$ *muss nicht zu* $\mathfrak{A}$ *gehören, aber wir können* $f(x) = 0$, $\forall x \in A : E_o \subset A$, $\mu(A) = 0$ *setzen.*
$f = 0$ *ist messbar auf* A *und* $\lim\limits_{j\to\infty} f_j$ *ist messbar auf* A^c $\Rightarrow$*Setze* $f(x) = \lim\limits_{j\to\infty} f_j(x)$, $\forall x \in A^c$. *Damit ist* $f(x)$ *messbar auf* X *(bzw. im Spursinne auf* $E \subset X$*).*

Bemerkung 1.5.8 (Konvergenz von f.ü. und μ-Cauchyfolgen)**.**
$\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ *sei f.ü.-bzw.* μ*-Cauchyfolge messbarer Funktionen.*
Resultat: Die Grenzfunktionen $f = \lim\limits_{j\to\infty} f_j$ *bzw.* $f \overset{\mu}{=} \lim\limits_{j\to\infty} f_j(x)$ *sind messbare Funktionen und bis auf f.ü.-Äquivalenz eindeutig bestimmt.*

Resultate zur Stetigkeit messbarer Funktionen und Approximation:

Satz 1.5.4 (Satz von Frechet)**.**
Seien $X = [a,b]$ *und* f *sei endlich und messbare Funktion. Dann existiert zu* f *eine Folge stetiger Funktion* $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ *mit* $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \xrightarrow[f.ü.]{} f$.

Beweis. Natanson: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. □

Satz 1.5.5 (Satz von Lusin)**.**
$X = [a,b]$, f *sei messbar und endlich. Dann existiert* $\forall \varepsilon > 0$ *eine Funktion* φ *(stetig auf* $[a,b]$, *d.h.* $\varphi \in \mathbb{C}[a,b]$*) mit* $\mu_L(E(f \neq \varphi)) < \varepsilon$.
(Satz kann auf allgemeinen Hausdorffschen topologischen Räumen formuliert werden.
(vgl. Elstrodt Maß- und Integrationstheorie S. 323))

Bemerkung 1.5.9 (Messbarkeit der f.ü.-Grenzfunktion)**.**
Gilt für eine Folge messbarer Funktionen $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \xrightarrow[f.ü.]{} f$ *bei vollständigem Maßraum* $[X,\mathfrak{A},\mu]$, *dann ist* f *messbar, denn* $E(f = \lim\limits_{j\to\infty} f_j) \in \mathfrak{A}$.
Schon die Existenz einer Folge messbarer Funktionen $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ *nach oben zu einem vorgegebenen* f *sichert hier die Messbarkeit von* f*: Man setzt*

$E_o := \{x : \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ *konvergiert nicht* $\}$. *Weil* μ *vollständiges Maß war, erhalten wir:* $\exists A \in \mathfrak{A}$ *mit* $E_o \subset A$ *und* $\mu(A) = 0 \Rightarrow E_o \in \mathfrak{A}$ *und* $\mu(E_o) = 0$. *Damit ist* f *zunächst messbar auf* $E_o^C \subset X$. *Auf* E_o *erklärt man z.B.* $f(x) := \chi_{E_o}(x)$. *Damit ist alles gezeigt.*

1.6 Der allgemeine Integralbegriff - Maßintegrale

1.6.1 Das Integral über Regelfunktionen und das Riemann-Integral

Definition 1.6.1 (Räume auf [a,b]).
Bei $-\infty < a < b < \infty$ *bezeichne* $B[a,b]$ *die Menge der auf* $[a,b]$ *definierten, beschränkten und reellwertigen Funktionen.*
Auf dem linearen Vektorraum $B[a,b]$ *sei die Norm* $\|f\|_{\mathbb{B}} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ *erklärt.*
Mit $\mathbb{B}[a,b]$ *bezeichnen wir den Banachraum:* $\mathbb{B}[a,b] := (B[a,b], \|.\|_{\mathbb{B}})$

Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen:

Notation 1.6.2. *Unter einer Zerlegung* $\mathscr{Z}_{[a,b]}$ *von* $[a,b]$ *verstehen wir die Punktmenge* $\mathscr{Z}_{[a,b]} := \{x_j\}_{j=o}^{N(\mathscr{Z})}$ *mit* $x_o = a < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$, $N = N(\mathscr{Z}_{[a,b]}) \in \mathbb{N}$
$|\mathscr{Z}_{[a,b]}| := \max_{j=0,...(N-1)}(x_{j+1} - x_j)$ *bezeichnet man die Feinheit der Zerlegung* $\mathscr{Z}_{[a,b]}$. *Die Menge aller Zerlegungen von* $[a,b]$ *werde mit* $\mathfrak{Z}_{[a,b]}$ *bezeichnet:* $\mathscr{Z}_{[a,b]} \in \mathfrak{Z}_{[a,b]}$.
Eine Funktion $t : [a,b] \to \mathbb{E}^1$ *heisst eine (klassische) Treppenfunktion, wenn es zu* t *eine Zerlegung* $\mathscr{Z}_{[a,b]} \in \mathfrak{Z}_{[a,b]}$ *von* $[a,b]$ *gibt, so dass für* $j = 0,\ldots,N(\mathscr{Z}_{[a,b]}) - 1$ *die Einschränkung:* $t_{|(x_j,x_{j+1})} = c_j$ *jeweils konstant ist.*
Den linearen Vektorraum aller Treppenfunktionen auf $[a,b]$ *bezeichnet man mit* $T[a,b]$.*(vgl. dazu auch die allgemeine Treppenfunktionen in Satz 1.4.9) Den linearen Vektorraum aller Riemann-integrierbaren Funktionen bezeichnet man mit* $R[a,b]$.

Bemerkung 1.6.1. *Eine (klassische) Treppenfunktion* $t \in T[a,b]$ *ist immer auf den offenen Intervallen* (x_j,x_{j+1}) *konstant. Die Werte in den Teilpunkten der zugehörigen Zerlegung* $\mathscr{Z}_{[a,b]} = \{x_j\}_{j=o}^{N(\mathscr{Z})}$ *unterliegen keiner Restriktion.*

Bemerkung 1.6.2. *Der Abschluss von* $T[a,b]$ *in* $\mathbb{B}[a,b]$ *liefert als Unter-Banachraum von* $\mathbb{B}[a,b]$ *den Raum der Regelfunktionen* $\mathbb{RG}[a,b]$. *Die Elemente von* $\mathbb{RG}[a,b]$ *sind Regelfunktionen* $r : [a,b] \to \mathbb{E}^1$. *Für* $r \in \mathbb{RG}[a,b]$ *gelten folgende Eigenschaften:*

(i) $\forall x \in (a,b)$ *existieren die Grenzwerte* $r(x+0)$ *und* $r(x-0)$.

(ii) In den Randpunktes des Intervalles existieren die Grenzwerte $r(a+0)$ *und* $r(b-0)$.

(iii) Jede Regelfunktion ist Riemann-integrierbar über $[a,b]$, *d.h.* $r \in R[a,b]$, *dabei hat man auch die Eigenschaft, dass das Riemann-Integral von* r *als Grenzwert von Riemann-Integralen einer Folge von (klassische) Treppenfunktionen berechnet werden kann,* $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \xrightarrow[\mathbb{B}[a,b]]{} r \quad \Rightarrow \quad \{\int_a^b t_k(x)\,dx\}_{k=1}^{\infty} \xrightarrow[\mathbb{E}^1]{} \int_a^b r(x)\,dx$!

Bemerkung 1.6.3. *Schließt man $R[a,b]$ in $\mathbb{B}[a,b]$, so erhält man den Unter-Banachraum $\mathbb{R}[a,b]$ von $\mathbb{B}[a,b]$. Im Sinne echter Inklusion gilt hier:*

$$\mathbb{RG}[a,b] \subset \mathbb{R}[a,b] \subset \mathbb{B}[a,b]\ .$$

Beispiel 1.6.1. *(a) Die Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{E}^1$ mit $0 \in (a,b)$ und*

$$f(x) := \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ & \text{bei} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

gehört zu $\mathbb{R}[a,b]$, aber nicht zu $\mathbb{RG}[a,b]$.

(b) Die Funktion $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{E}^1$ mit und

$$g(x) := \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ & \text{bei} \\ 0 & x \in [a,b] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

gehört zu $\mathbb{B}[a,b]$, aber nicht zu $\mathbb{R}[a,b]$.

1.6.2 Integration messbarer Funktionen

Sei f messbare Funktion auf X (bzw. $E \in \mathfrak{A}$), f sei reellwertig.

Definition 1.6.3 ((disjunkte) Treppenfunktion)**.**
Mit $t : [X, \mathfrak{A}, \mu] \to \{\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}^1\}$ (bzw. $\{\mathbb{R}^1, \mathfrak{A}_{\mu_L}\}$) bezeichnen wir die Funktion:

$$t(x) := \sum_{j=1}^{N(t)} \alpha_j \chi_{E_j}(x)$$

bei $\alpha_j \in \mathbb{R} \quad \forall j$ und $\{E_j\}_{j=1}^{N(t)} \subset \mathfrak{A}(X)$ paarweise disjunkt und $\bigcup\limits_{j=1}^{N(t)} E_j = X$.
Wir nennen t eine„disjunkte“ Treppenfunktion.
Die (Menge) Familie der „disjunkten“ Treppenfunktionen bezeichnen wir mit $T(X)$ (bzw. $T(E)$).

Bemerkung 1.6.4. *Jede beliebige reellwertige allgemeine Treppenfunktion kann offensichtlich als „disjunkte“ Treppenfunktion dargestellt werden.*

Definition 1.6.4 (Definition integrierbare Treppenfunktionen (IT1) (μ-Integrierbarkeit))**.** *Wir bezeichnen die Menge aller Treppenfunktionen wieder mit $T(X)$. Eine Funktion $t \in T(X)$ heißt $\underline{\mu\text{-integrierbar } (\mu\text{-summierbar})}$, falls t die Eigenschaft hat, dass $\forall j = 1, \ldots, N(t)$ gilt: bei $\alpha_j \neq 0$ sei $\mu(E_j) < \infty$.*
(Man kann sogar $\alpha_j = \infty$ einbeziehen, setzt hier aber $\mu(E_j) = 0$ voraus, d.h. $\infty \cdot 0 = 0$).
Wir erklären

$$\int\limits_X t(x) d\mu(x) := \sum_{j=1}^{N(t)} \alpha_j \mu(E_j)$$

Bei $E \in \mathfrak{A}$ erklären wir:

$$\int\limits_E t(x)d\mu(x) := \int\limits_X t(x)\chi_E(x)d\mu(x) \qquad ,$$

hier muss bei $\int\limits_E t(x)d\mu(x)$ die Funktion $t(x)\chi_E(x)$ als Treppenfunktion integrierbar über X sein.

Bemerkung 1.6.5.

Das Integral $\int\limits_X t(x)d\mu(x)$ ist unabhängig von der Darstellung von t als allgemeine (disjunkte) Treppenfunktion. Ändern wir t zu t_1 auf einer Menge vom Maße Null, so gilt offenbar:

$$\int\limits_X t(x)d\mu(x) = \int\limits_X t_1(x)d\mu(x)$$

Satz 1.6.1 (Integrierbare Treppenfunktionen (IT1))**.**

Bezeichnet $T_\mu(X)$ die Gesamtheit der im Sinne der Definition integrierbaren (disjunkten) Treppenfunktionen, so ist $T_\mu(X)$ ein linearer Vektorraum. Das μ-Integral ist eine Linearform auf $T_\mu(X)$, d.h. $\forall t, v \in T_\mu(X)$ und $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int\limits_X (\alpha t + \beta v)(x)d\mu x = \alpha \int\limits_X t(x)d\mu x + \beta \int\limits_X v(x)d\mu(x).$$

Entsprechendes gilt für $E \in \mathfrak{A}$ und $T_\mu(E)$.

Satz 1.6.2 (Intbare Treppenfktn. (IT2))**.** $[X, \mathfrak{A}, \mu]$ *sei Maßraum.*

(i) $t \in T_\mu(x) \Rightarrow |t| \in T_\mu(x)$ und

$$|\int\limits_X t(x)d\mu(x)| \leq \int\limits_X |t(x)|d\mu(x)$$

(ii) Sind t und v aus $T_\mu(X)$ mit $t \leq v$ (f.ü. auf X), so gilt

$$\int\limits_X t(x)d\mu(x) \leq \int\limits_X v(x)d\mu(x) \quad \textit{(Monotonie)}$$

Gilt $t(x) \geq 0$ (f.ü. auf X) und $t \in T_\mu(X) \Rightarrow 0 \leq \int\limits_X t(x)d\mu(x)$

(iii) Für $t \in T_\mu(x)$ und $\forall E \in \mathfrak{A}$ gilt:

$$\int\limits_X t(x)d\mu(x) = \int\limits_E t(x)d\mu(x) + \int\limits_{E^c} t(x)d\mu(x)$$

Beweis. zu i) t ist messbar $\Rightarrow |t|$ ist messbar

$t \in T_\mu(X) : t(x) := \sum\limits_{j=1}^{N(t)} \alpha_j \chi_{E_j}(x)$ dann ist $|t|(x) := \sum\limits_{j=1}^{N(t)} |\alpha_j|\chi_{E_j}(x)$.

Bei $\alpha_j \neq 0$ gilt $|\alpha_j| \neq 0$ also $\mu(E_j) < \infty$, also $|t| \in T_\mu(X)$

Zeige Ungl.:

$$\begin{aligned}
|\int\limits_X t(x)d\mu(x)| &= |\int\limits_X (\sum_{j=1}^{N(t)} \alpha_j \chi_{E_j}(x))d\mu(x)| &&= |\sum_{j=1}^{N(t)} \alpha_j \mu(E_j)| \\
&\leq \sum_{j=1}^{N(t)} |\alpha_j|\mu(E_j) &&= \int\limits_X \sum_{j=1}^{N(t)} |\alpha_j|\chi_{E_j}(x)d\mu(x) \\
&= \int\limits_X |t|d\mu(x)
\end{aligned}$$

zu ii) Setze formal $\mathscr{Z}_t = \bigcup\limits_{j=1}^{N(t)} E_j$ und $\mathscr{Z}_v = \bigcup\limits_{k=1}^{M(v)} E_k$

Bilde neues System: $\mathscr{Z}_{t,v} := \mathscr{Z}_t \cap \mathscr{Z}_v$. Damit wird erreicht, dass t und v das gleiche Mengenerzeugendensystem bilden (bis auf Äquivalenz). Das heißt:

$$\begin{aligned}\int\limits_X t(x)d\mu(x) &= \sum_{j=1}^{N(t)} \alpha_j \mu(E_j) = \sum_{l=1}^{L(t,v)} \alpha_l \mu(E_l) \\ &\overset{\{E_l\}\text{fest}}{\leq} \sum_{l=1} \beta_l \mu(E_l) = \int\limits_X v(x)d\mu(x)\end{aligned}$$

zu iii) evident

□

Folgerung 1.6.3. *Es gilt sogar:* $t \in T_\mu(X) \Leftrightarrow |t| \in T_\mu(X)$

Beispiel 1.6.2.

Sei $X = [0,1]: \quad t(x) = 0 \cdot \chi_{E_1}(x) + 1 \cdot \chi_{E_2}(x)$ *mit* $E_1 := \{x \in [0,1]$ *mit* $x \in \mathbb{Q}\}$, $E_2 = E_1^c$

$\mu(E_1) = 0, \mu(E_2) = 1 \Rightarrow (\mu)\int\limits_0^1 t(x)dx = \int\limits_{[0,1]} t(x)d\mu_L(x) = 1$

Definition 1.6.5 (Definition „Integration messbarer Funktionen“(IMF))**.**

$[X, \mathfrak{A}, \mu]$ sei Maßraum. f eine messbare Funktion. f heißt über X μ-integrierbar, falls eine Folge $\{t_k(x)\}_{k=1}^\infty \subset T_\mu(X)$ existiert,so dass $\forall \varepsilon > 0$ ein $k_0(\varepsilon)$ existiert, mit:

$\int\limits_X |t_k - t_l| d\mu(x) < \varepsilon \quad \forall k,l > k_0(\varepsilon)$, sowie $\{t_k\}_{k=1}^\infty \underset{\mu}{\rightarrow} f$.

$$\textit{Man erklärt:} \qquad \int\limits_X f(x)d\mu(x) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_X t_k(x)d\mu(x) \qquad (*)$$

Die Gesamtheit der über X integrierbaren Funktionen bezeichnen wir mit $V(X,\mu)$.

Bemerkung 1.6.6 (Intb.messb.Fktn. (IMF-1))**.**

Die obige Definition ist sachgemäß, denn der Grenzwert in $(*)$ existiert:

$|\int\limits_X (t_k - t_l)d\mu(x)| \leq \int\limits_X |t_k - t_l| d\mu(x) < \varepsilon, \forall k,l > k_0(\varepsilon)$

Das heißt $\{\int\limits_X t_k(x)d\mu(x)\}_{k=1}^\infty$ ist eine Cauchy-Folge im $\mathbb{E}^1$, also konvergent. Der Grenzwert ist zudem unabhängig von der speziellen Wahl der Folge $\{t_k\}_{k=1}^\infty \underset{\mu}{\rightarrow} f$, denn seien $\{t_k\}_{k=1}^\infty \rightarrow f$ und $\{\tilde{t}_l\}_{l=1}^\infty \rightarrow f$, $\{t_k\}_{k=1}^\infty, \{\tilde{t}_l\}_{l=1}^\infty \subset T_\mu(X)$.

Mische die Folgen $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ und $\{\tilde{t}_l\}_{l=1}^\infty$ zu einer neuen Cauchy-Folge. $\circ$ Dies ist möglich, weil:

$\mu(E(|t_k - \tilde{t}_l| \geq \varepsilon)) \overset{\text{Monotonie von } \mu}{\leq} \mu(E(|f - t_k| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \cup E(|\tilde{t}_l - f| \geq \frac{\varepsilon}{2})) \circ$

Rest der Argumentation:

$\{t_p\}_{p=1}^\infty \subset \{t_j\}_{j=1}^\infty$ sowie $\{t_p\}_{p=1}^\infty \subset \{t_m^o\}_{m=1}^\infty$ (Gemischte Folge)

Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist auch Grenzwert jeder Teilfolge und eineindeutig.

Bemerkung 1.6.7 (Äquivalenz (IMF-2))**.**

Bei $f \sim_X g$ und g messbar sowie $f \in V(X,\mu)$, gilt:

$g \in V(X,\mu)$ und $\int\limits_X f(x)d\mu(x) = \int\limits_X g(x)d\mu(x)$

Beweis. Die Menge vom Maße Null für approx.-Folgen fest halten. □

Bemerkung 1.6.8 (Lokalität (IMF-3)).
Gilt $E \in \mathfrak{A}$, dann nennen wir f über E μ-integrierbar, wenn die Funktion $f(x)\chi_E(x)$ μ-integrierbar über X ist.
Das heißt: $f \in V(E,\mu) \Leftrightarrow f \cdot \chi_E \in V(X,\mu)$
$\int\limits_E f(x)d\mu(x) := \int\limits_X f(x)\chi_E(x)d\mu(x).$
In den nun folgenden Sätzen kann immer auch $V(E,\mu)$ geschrieben werden (im obigen Sinne).

Satz 1.6.4 (Integrierbare messb. Funktionen (IMF1)).
$V(X,\mu)$ ist ein linearer Vektorraum und das μ-Integral ist eine Linearform auf $V(X,\mu)$, d.h. es gilt $\forall f,g \in V(X,\mu)$ und $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$:

$$\int\limits_X (\alpha f + \beta g)d\mu(x) = \alpha \int\limits_X f d\mu(x) + \beta \int\limits_X g d\mu(x)$$

Beweis. Satz 1.6.1 bei entsprechender Wahl der approx. Treppenfunktionen. Schließlich Grenzübergang. □

Satz 1.6.5 (Integrierbare messb. Funktionen (IMF2)).
$[X,\mathfrak{A},\mu]$ sei Maßraum.

i) *Gilt $f \in V(X,\mu) \Rightarrow |f| \in V(X,\mu)$ und $|\int\limits_X f(x)d\mu(x)| \leq \int\limits_X |f(x)|d\mu(x)$*
Verschärfung:

i)* $f \in V(X,\mu) \Leftrightarrow |f| \in V(X,\mu)$

ii) *Sind $f,g \in V(X,\mu)$ mit $f \leq g$ in X (bzw. f.ü. in X) dann gilt:*
$\int\limits_X f(x)d\mu(x) \leq \int\limits_X g(x)d\mu(x)$ *(Monotonie).*
Gilt $g(x) \geq 0$ (wie oben), dann gilt $0 \leq \int\limits_X g(x)d\mu(x)$ (Positivität).

iii) *$f \in V(X,\mu)$ und $\int\limits_X |f(x)|d\mu(x) = 0$ bei $\mu(X) \neq 0 \Rightarrow f(x) = 0$ (f.ü. auf X).*

Beweis. i*) f messbar $\Rightarrow f^+, f^-$ messbar $\Rightarrow f^+ + f^- = |f|$ und $f_+, f_- \leq |f|$

i) Folgt sofort aus $\int\limits_X ||t_k| - |t_l||d\mu(x) \leq \int\limits_X |t_k - t_l|d\mu(x) < \varepsilon$
$\{|t_k|\}_{k=1}^{\infty} \underset{\mu}{\rightarrow} |f|$ und mit oben für $k,l \geq k_0(\varepsilon)$. $|f| \in V(X,\mu)$.
Mit $i*$) ist $f_+(x) = \frac{1}{2}(|f| + f)$, $f_-(x) = \frac{1}{2}(|f| - f)$. Rest für i*) (Monotonie).

ii) Einfach Treppenfunktion $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \underset{\mu}{\rightarrow} f$, $\{v_k\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow g$.
$\mathscr{Z}_{t_k,v_k} := \mathscr{Z}_{t_k} \cap \mathscr{Z}_{v_k}, \forall k$

iii) o.E.d.A.
$f(x) \geq 0$ bei $\mu(E(f > 0)) = 0$ wie zur Monotonie: $\mu(E(f = 0)) = \mu(X)$

□

Bemerkung 1.6.9 (Schreibweise (IMF-4)). *Bei X als Integrationsgebiet schreibt man einfach:*
$\int\limits_X f(x)d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x) \quad \forall f \in V(X,\mu)$
Ebenso verfährt man bei $E \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(X\backslash E) = 0$ (Mengen-vollständigen Maßes).

Satz 1.6.6 (Weitere Eigenschaften des μ-Integrals (IMF3)).

i) $f \in V(X,\mu)$ *und* $f > 0$, $\forall x \in X$.
Gilt dann $\int\limits_E f(x)d\mu(x) = 0$, *so folgt:* $\mu(E) = 0$, $E \in \mathfrak{A}$.

ii) $f \in V(X,\mu)$ *und* $X = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$, $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ *paarweise disjunkt und* $E_j \in \mathfrak{A}$, $\forall j \in \mathbb{N}$, *dann gilt:*

$$\int\limits_X f(x)d\mu(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{E_j} f(x)d\mu(x) \text{ (σ-Additivität).}$$

Hier ist $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \int\limits_{E_j} f(x)d\mu(x)$ *absolut konvergent.*

Bemerkung 1.6.10 (Majoranten (IMF-5)).
Die absolute Konvergenz der rechten Seite in ii) Satz 1.6.6 gibt auch die Idee einer Integraldefinition über absolut konvergente Majoranten.

Folgerung 1.6.7 (Grenzwerte des μ-Integrals (IMF4)).
Sei $f \in V(X,\mu)$ *und* $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ *isoton bzw. antiton, dann gilt:*
Bei $X = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j \Rightarrow \int\limits_X f(x)d\mu(x) = \lim\limits_{j\to\infty} \int\limits_{E_j} f(x)d\mu(x)$ *($\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ isoton), sowie bei* $\exists E_k : \mu(E_k) < \infty$:
$\lim\limits_{j\to\infty} \int\limits_{E_j} f(x)d\mu(x) = \int\limits_{\lim\limits_{j\to\infty} E_j} f(x)d\mu(x)$, *bei* $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ *antiton.*

Bemerkung 1.6.11 (Komplexwertige Fktn. (IMF-6)).
Eine messbare komplexwertige Funktion f heißt μ-integrierbar, wenn
$\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \in V(X,\mu)$. *Wir setzen:*

$$\int\limits_X f d\mu(x) = \int\limits_X \mathrm{Re}\, f(x)d\mu(x) + i\int\limits_X \mathrm{Im}\, f(x)d\mu(x)$$

Wir schreiben hier $f \in V_{\mathbb{C}}(X,\mu)$. $V_{\mathbb{C}}(X,\mu)$ *ist wieder ein linearer Vektorraum. Alle obigen Sätze behalten hier ihre Gültigkeit.*

Satz 1.6.8 (Integrierbare messb. Funktionen (IMF5)).
f sei messbar und $g \in V_{\mathbb{C}}(X,\mu)$, *dann gilt* $f \in V_{\mathbb{C}}(X,\mu)$, *wenn* $|f| \leq |g|$ *f.ü. in X. Hier nennt man die Funktion g absolute Majorantenfunktion zu f.*

1.Zwischenbeobachtung (Radon-Nikodym)

Definition 1.6.6 (Absolute Stetigkeit).
$[X,\mathfrak{A},\mu]$ *sei Maßraum,* ν *eine additive Mengenfunktion auf* $\{X,\mathfrak{A}\}$. ν *nennen wir absolut stetig bzgl.* μ, *wenn* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) : \forall E \in \mathfrak{A}$ *mit* $\mu(E) < \delta(\varepsilon)$ *gilt:* $|\nu(E)| < \varepsilon$.

Satz 1.6.9 (Radon-Nikodym-Idee (IMF6)).
Sei $f \in V_{\mathbb{C}}(X,\mu)$. Dann wird durch $\nu(E) := \int\limits_E f(x)d\mu(x)$ eine absolut stetige (σ-additive) Mengenfunktion erklärt. Man nennt in diesem Falle $\nu(E)$ auch das unbestimmte Integral von f über die messbare Menge $E \in \mathfrak{A}$.
Bei $f \in V_{\mathbb{C}}(X,\mu)$ und $f \geq 0$ fast überall auf X ist ν ein Maß auf dem messbaren Raum $\{X,\mathfrak{A}\}$.

Beweis. Sei $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) > 0$. Annahme: $\exists B \in \mathfrak{A}$, $B \subset A$ und $\mu(B) > 0$, wobei $|f(x)| = \infty \quad \forall x \in B$, dann würde offensichtlich f nicht zu $V_{\mathbb{C}}(X,\mu)$ gehören, denn $\int\limits_B f(x)d\mu(x)$ würde nicht existieren. Das heißt (da A,B beliebig) f ist wesentlich beschränkt. Genauer:

$$\inf_{x\in N\in\mathfrak{A}:\mu(N)=0}(\sup_{x\in N^c}|f(x)|) = |||f|||_\infty = c < \infty.$$

$|||\cdot|||_\infty$ ist eine Halbnormdefinition, d.h. $|||f|||_\infty = 0 \not\Rightarrow_{\text{eindeutig}} f \equiv 0$.
Nun sei $\mu(E) < \delta$ (beliebig). Dann gilt:

$$|\nu(E)| = |\int\limits_E f(x)d\mu(x)| \leq \int\limits_E |f(x)|d\mu(x) \leq c \cdot \overbrace{\int\limits_E \chi_E(x)d\mu(x)}^{\mu(E)} < c\cdot\delta =: \varepsilon$$

□

Bemerkung 1.6.12 (V-unendlich (IMF-7)).
Bei $\inf\limits_{x\in N,\mu(N)=0}\sup\limits_{x\in N^c}|f(x)| = c < \infty$ schreiben wir: $f \in V_{\infty,\mathbb{C}}(X,\mu)$.
Gilt $f \in V_{\infty,\mathbb{C}}(X,\mu)$ und $\mu(X) < \infty \quad \Rightarrow f \in V_{\mathbb{C}}(X,\mu)$.

2. Zwischenbeobachtung:

Bemerkung 1.6.13 (Halbnorm (IMF-8)).
Bei $f,g \in V_{\mathbb{C}}(X,\mu)$ erklärt der Ausdruck $\int |f-g|d\mu(x) = \rho_{PS}(f,g)$ eine Abstandsfunktion. ρ_{PS} heißt Halb- (oder Pseudo-)Metrik. Hier folgt aus $\rho_{PS}(f,g) = 0$ wieder nicht zwingend $f = g, \forall x \in X$.

1.6.3 Integration reell-(komplex-)wertiger Funktionen mittels zulässiger Zerlegungen

Bekannt sind Riemannsche Zerlegung $\mathscr{Z}_{[a,b]}$ und die Zerlegung von disjunkten Treppenfunktionen $\mathscr{Z}_t$, $\forall t \in T_\mu(X)$.
Nun sei $f : D(f) = E \in \mathfrak{A}$ mit $f : [E,\mathfrak{A}_E,\mu] \to [\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}^1]$ (bzw. $[\mathbb{C}^1,\mathfrak{B}^{2*}]$) ($\heartsuit$) eine nicht <u>notwendig</u> messbare Funktion.
(Messbarkeit nicht vorrausgesetzt; auch $\mathfrak{A}_{\mu_L}$ als Algebra erlaubt).

Definition 1.6.7 („Zerlegung von E“ in $[X,\mathfrak{A},\mu]$).
Sei $E \in \mathfrak{A}$. Das Mengensystem $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ paarweise disjunkter Mengen $E_j \in \mathfrak{A}$ mit $\bigcup\limits_{j=1}^\infty E_j = E$ nennen wir eine <u>Zerlegung von E</u>.
Ist $\{E_j\}_{j=1}^N$ paarweise disjunkt mit $\bigcup\limits_{j=1}^N E_j = E$, so ergänzen wir diese endliche Menge zur Folge durch: $E_j = E_j$, $\forall j = 1,\ldots,N$ und $E_j = \emptyset$, $\forall j > N$. Schreibweise: $\mathscr{Z}_E = \{E_j\}_{j=1}^\infty$.

Notation 1.6.8. *Es seien nun $\mathscr{Z}_E, \mathscr{Z}_E'$ Zerlegungen von $E \in \mathfrak{A}$. $\mathscr{Z}_E'$ nennen wir eine* *Verfeinerung von $\mathscr{Z}_E$, wenn $\forall E_j' \in \mathscr{Z}_E' \quad \exists E_k \in \mathscr{Z}_E$ mit $E_j' \subset E_k$. Schreibweise $\mathscr{Z}_E \preceq \mathscr{Z}_E'$, Halbordnung.*
(Zermelo-Lemma: $\exists \min \mathscr{Z}_E^o = \{E\} \cup \{\emptyset\}_{j=1}^{\infty}$).

Definition 1.6.9 (bzgl. f zulässige Zerlegung von E)**.**
Wir nennen $\mathscr{Z}_E$ bzgl. f zulässige Zerlegung von E, wenn:

i) $\forall j \in \mathbb{N}$ *gilt* $\sup\limits_{x \in E_j} |f(x)| \mu(E_j) < \infty$ *(setzen o.E.d.A.* $\sup\limits_{x \in E_j} |f(x)| := 0$ *bei* $E_j = \emptyset$*) und*

ii) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \sup\limits_{x \in Ej} |f(x)| \mu(E_j) < \infty.$

Die Menge der zulässigen Zerlegungen bezeichnen wir mit $\mathfrak{Z}(E,f)$ bei f nach $\heartsuit$.

Bemerkung 1.6.14 (IZ1)**.** *Im Vergleich mit $t \in T_\mu(E)$ haben wir mit i):*
$\mu(E_j) = \infty \Rightarrow \sup\limits_{x \in E_j} |f(x)| = 0$*, sowie formal:*
$\sup\limits_{x \in E_j} |f(x)| = \infty \Rightarrow \mu(E_j) = 0.$
ii) sichert die absolute Konvergenz.

Definition 1.6.10 (Intb.Fkt.Zerl)**.** *f sei nach $\heartsuit$. Wir nennen f über E (über X) μ-integrierbar, wenn eine Zahl $I \in \mathbb{R}$(bzw. $\mathbb{C}$) existiert, mit $|I| < \infty$, so dass es $\forall \varepsilon > 0$ eine bzgl. f zulässige Zerlegung $\mathscr{Z}_E \in \mathfrak{Z}(E,f)$ gibt, welche für beliebige Wahl von $\xi = \{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ (als Folge von Zwischenwerten) bei $\xi_j \in E_j$. $\mathscr{Z}_E = \{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ mit der*
(Lebesgue-)Summe

$$\sigma_f(\mathscr{Z}_E, \xi) := \sum_{j=1}^{\infty} f(\xi_j)\mu(E_j) \quad \textit{liefert, dass} \quad |I - \sigma_f(\mathscr{Z}_E, \xi)| < \varepsilon \textit{ gilt}.$$

Wir schreiben $(\circ)$ $I = \int\limits_E f(x) d\mu(x)$ *mit* $f \in \dot{V}_{\mathbb{C}}(E, \mu)$.

Bemerkung 1.6.15 (IZA1)**.** *Hier ist $\sigma_f(\mathscr{Z}_E, \xi)$ absolut konvergent, weil $\mathscr{Z}_E \in \mathfrak{Z}(E,f)$ gilt. Bei $\mu(X) = \mu(E)$, man spricht hier wie in Bem. 1.6.9 von X im Maße ausschöpfenden Mengen, kann der Integrationsbereich weggelassen werden : $\mu(X \backslash E) = 0$*

Bemerkung 1.6.16 (IZA2)**.** *Gilt $\mu(E) = 0$, dann ist jede Zerlegung $\mathscr{Z}_E$ von E bzgl. jeder Funktion f nach ($\heartsuit$) zulässig, d.h. $\mathscr{Z}_E \in \mathfrak{Z}(E,f)$. Jede Funktion nach ($\heartsuit$) ist damit über $E \in \mathfrak{A}$ integrierbar mit* $\int\limits_E f(x) d\mu(x) = 0$.

Bemerkung 1.6.17 (IZA3)**.** *Bei $E \in \mathfrak{B}^n$ (bzw. $E \in \mathfrak{A}_{\mu_L}$) sowie $\mu = \mu_L$ nennen wir die Funktion $f \in \dot{V}_{\mathbb{C}}(E, \mu_L)$ über E Lebesgue-integrierbare Funktion. Als abkürzende Schreibweise verwenden wir hier:* $\int\limits_E f(\underline{x}) d\mu_L(\underline{x})$. *Dies ist sinnvoll, weil z.B. bei E kompakt in $\mathbb{E}^n$ jede Riemann-integrierbare Funktion auch Lebesgue-integrierbar ist. (Integrale stimmen überein!). Beispiel: $E = [a,b]$.*

Wir übertragen die Idee der Ober- und Untersummen vom Riemann-Integral au zunächst reellwertige Funktionen f (bei $f = \mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f)$ separat für $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$):

Definition 1.6.11 (Ober- und Untersummenzerlegung)**.**
Es sei $\mathscr{Z}_E \in \mathfrak{Z}(E,f)$. Wir setzen für f reellwertig:

$$S_f(\mathscr{Z}_E) := \sum_{j=1}^{\infty} (\sup_{x\in E_j} f(x))\mu(E_j)$$

als Ober- und

$$s_f(\mathscr{Z}_E) := \sum_{j=1}^{\infty} (\inf_{x\in E_j} f(x))\mu(E_j)$$

als Untersumme von f bei $\mathscr{Z}_E$.
Für (komplexwertige) Funktionen f setzen wir

$$SW_f(\mathscr{Z}_E) := \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{x,x'\in E_j} |f(x) - f(x')|\mu(E_j)$$

als Schwankungssumme von f bei $\mathscr{Z}_E$. Den Ausdruck

$$\sup_{x,x'\in E_j} |f(x) - f(x')| =: (\mathrm{schw}\, f)(E_j)$$

nennt man die Schwankung von f auf E_j.
(Bei f reellwertig gilt: $SW_f(\mathscr{Z}_E) = S_f(\mathscr{Z}_E) - s_f(\mathscr{Z}_E)$).

Satz 1.6.10 (Integrierbarkeit Fktn. Z1)**.**
Die Ausdrücke S_f, s_f, SW_f sind monoton in dem Sinne, dass $\forall \mathscr{Z}_E, \mathscr{Z}'_E \in \mathfrak{Z}(E,f)$ mit $\mathscr{Z}_E \preccurlyeq \mathscr{Z}'_E$ gilt: $S_f(\mathscr{Z}_E) \geq S_f(\mathscr{Z}'_E), s_f(\mathscr{Z}_E) \leq s_f(\mathscr{Z}'_E)$ sowie $SW_f(\mathscr{Z}_E) \geq SW_f(\mathscr{Z}'_E)$.
Es gilt $f \in \dot{V}_{\mathbb{C}}(E,\mu) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathscr{Z}_E^{\varepsilon} \in \mathfrak{Z}(E,\mu)$ mit $SW_f(\mathscr{Z}_E^{\varepsilon}) < \varepsilon$. Bei f reellwertig: $S_f(\mathscr{Z}_E^{\varepsilon}) - s_f(\mathscr{Z}_E^{\varepsilon}) < \varepsilon : I := \lim_{\varepsilon\to 0} s_f(\mathscr{Z}_E^{\varepsilon})$. Bei f komplexwertig mit Real- und Imaginärteil.

Beweis. Nutzung des „großen Umordnungssatzes“, weil $\mathscr{Z}_E \in \mathfrak{Z}(E,f)$ und Eigenschaften von sup und inf. □

Satz 1.6.11 (Integrierbarkeit Fktn. Z2)**.**
$[X,\mathfrak{A},\mu]$ sei Maßraum. f nach $\heartsuit$, $E \in \mathfrak{A}$ mit $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, $\{E_j\}_{j\geq 1} \subset \mathfrak{A}$ paarweise disjunkt. Gilt dann $f \in \dot{V}_{\mathbb{C}}(E_j,\mu)$, $\forall j = 1,\ldots$ und ist $\mathfrak{Z}(E,f) \neq \emptyset \Rightarrow f \in \dot{V}_{\mathbb{C}}(E,\mu)$ und $\int_E f(x)d\mu(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f(x)d\mu(x)$ (#) (σ-additiv).

Beweis. $\exists\ \mathscr{Z}_E \in \mathfrak{Z}(E,f)$. Rechte Seite in (#) ist damit absolut konvergent. Wählen nun $\mathscr{Z}_{E_j} \in \mathfrak{Z}(E_j,f)$, sodass $SW_f(\mathscr{Z}_{E_j}) < \frac{\varepsilon}{2^j}$. Dann gilt $\mathscr{Z}_E \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathscr{Z}_{E_j}) =: \mathscr{Z}'_E$ (Verfeinerung von $\mathscr{Z}_E$!). Mit der Monotonie von $SW_f()$ gilt damit $SW_f(\mathscr{Z}'_E) < \varepsilon$.
Hier war $\varepsilon > 0$ beliebig. Die Einzigkeit des Grenzwert liefert (#). □

Bemerkung 1.6.18 (IZA4). *Bei $f \in \dot{V}_{\mathbb{C}}(E,\mu)$ (bzw. $\dot{V}_{\mathbb{C}}(X,\mu)$) behalten die Sätze aus unseren Beobachtungen in Abschnitt 1.6.2 entsprechende Gütigkeit. Gleiches gilt für Bemerkungen und Folgerungen. Wir haben weiterhin z.B. die Eigenschaft:*

$$i*)\ f \in \dot{V}_{\mathbb{C}}(X,\mu) \Leftrightarrow |f| \in \dot{V}_{\mathbb{C}}(X,\mu)$$

1.6.4 Vergleich der Integralbegriffe

Bemerkung 1.6.19 (Vorbemerkung (IV1)).
Ist $[X,\mathfrak{A},\mu]$ ein vollständiger Maßraum und f nach $\heartsuit$ erklärt auf $D(f) = E$, sowie $A \in \mathfrak{A}$. $E \subset A$ und $\mu(A) = 0$, dann folgt: f ist messbar, denn weil $E \subset A$, $\mu(A) = 0 \Rightarrow E \in \mathfrak{A}$ und Def. der Messbarkeit.
f sei nun reellwertig:

I) vgl.Abschnitt 1.6.2: $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subset T_\mu(X)$, $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \underset{\mu}{\rightarrow} f$ (messbar), $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ waren eine Cauchy-Folge in Halbmetrik
$\rho_{PS}(t_k,t_l) := \int\limits_X |t_k - t_l| d\mu(x)$, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_o(\varepsilon), k,l > k_o(\varepsilon) : \rho_{PS}(t_k,t_l) < \varepsilon$,
$\int\limits_X f d\mu(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_X t_k d\mu(x)$

II) vgl. Abschnitt 1.6.3 und Satz 1.6.10

Für messbare f muss das Integral nach (I) gleich dem nach (II) sein, sowie $V_{\mathbb{C}}(X,\mu) = \dot{V}_{\mathbb{C}}(X,\mu)$ gelten.

Beginnen mit Trivialfall:

Satz 1.6.12 (Integrierbarkeit (IVT)).
f sei messbar und beschränkt sowie $\mu(X) < \infty$.
Behauptung: Integrale nach (I) und (II) existieren und stimmen überein.

Beweis. **Idee:** Baue Treppenfunktion, Ober- und Untersummen in einem Schritt. f ist beschränkt, d.h. $\exists\ m = \inf\limits_{x\in X} f(x)$ und $M = \sup\limits_{x\in X} f(x)$ sowie $\hat{M} = \max(|m|,|M|) < \infty$. Wir erklären nun

$$E_j := E(f(x) \in [m + h_k \cdot (j-1), m + h_k \cdot j])\ \forall j = 1,\dots,k$$

mit $h_k := \frac{M-m}{k}$. $E_{k+1} = E(f(x) = M)$, $\forall k = 1,2,\dots$.
Dann definieren wir $t_k(x) := \sum\limits_{j=1}^{k+1} (m + (j-1)\cdot h_k) \cdot \chi_{E_j}(x)$.
Offensichtlich gilt: $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \underset{\mu}{\rightarrow} f$ und alles aus (I). Setzen wir nun: $\mathscr{Z}_x^k = \{E_j\}_{j=1}^{k+1}$ und schätzen ab:

$$S_f(\mathscr{Z}_x^k) - s_f(\mathscr{Z}_x^k) = \sum_{j=1}^{k} (\sup_{x\in E_j} f(x) - \inf_{x\in E_j} f(x))\mu(E_j) \leq \frac{M-m}{k}\mu(X) < \varepsilon\ \forall k > k_0(\varepsilon).$$

Alle $\mathscr{Z}_x^k$ sind zulässig, weil $\hat{M}\mu(X) < \infty$ □

Folgerung 1.6.13 ((IVS)).
Ist $E \subset \mathbb{E}^n$ und E kompakt, f stetig auf $E = D(f)$. Dann gilt: f ist messbar und $f \in V_{\mathbb{C}}(E, \mu_L) \Rightarrow f \in \dot{V}_{\mathbb{C}}(E, \mu_L)$. (Beachte $\mu_L(E) < \infty$).

Satz 1.6.14 (Integrierbarkeit (IVZM)).
Ist $\mathfrak{Z}(X, f) \neq \emptyset$ und f messbar, so folgt $f \in \dot{V}_{\mathbb{C}}(X, \mu)$.

Beweis. $\exists \mathscr{Z}_X \in \mathfrak{Z}(X, f)$, sei $\mathscr{Z}_E = \{E_j\}_{j \geq 1}$. Auf E_j mit $0 < \mu(E_j) < \infty$ ist f beschränkt. Satz 1.6.12 (IVT) liefert damit (auf $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ angewandt):
$\exists \mathscr{Z}_{E_j} \in \mathfrak{Z}(E_j, f)$ mit $\mathscr{Z}_{E_j} = \{E_j^l\}_{l=1}^{\infty}$, so dass $SW_f(\mathscr{Z}_{E_j}) < \frac{\varepsilon}{2^j}$ für alle j wie oben. Bei $\mu(E_j) = 0$ und auch bei $\mu(E_j) = \infty$ kann $SW_f(\mathscr{Z}_{E_j}) = 0$ gesetzt werden.
Nun nehme man alle Zerlegungen $\mathscr{Z}_{E_j}$ wie oben und $E_j = \mathscr{Z}_{E_j}$ für $\mu(E_j) = 0, \infty$. Dann gilt: $\mathscr{Z}'_X = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \mathscr{Z}_{E_j} \succcurlyeq \mathscr{Z}_X$, d.h. für $SW_f(\mathscr{Z}'_X) < \varepsilon$. □

Satz 1.6.15 (Integrierbarkeit (IVM)).
Ist f nach ♡ und messbar, so gilt $f \in V_{\mathbb{C}}(X; \mu)$ nach (I) $\Leftrightarrow$ $f \in \dot{V}_{\mathbb{C}}(X, \mu)$ nach (II). Dabei stimmen die μ-Integrale überein.

Beweis. Wir zeigen die Äquivalenz für reellwertige Funktionen und hier zunächst $(i) \Rightarrow (ii)$. Sei $f \in V(X, \mu)$ und $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subset T_\mu(X)$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \xrightarrow{\mu} f$. Des Weiteren existiert eine Teilfolge $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ mit $\{t_l\}_{l=1}^{\infty} \xrightarrow{f.ü.} f$. Anwendung der Konvergenzresultate liefert jetzt

$$\int_X f \mathrm{d}\mu(x) \stackrel{f.ü}{=} \int_X \left(\lim_{l \to \infty} t_l \right) \mathrm{d}\mu(x) = \lim_{l \to \infty} \int_X t_l(x) \mathrm{d}\mu(x),$$

sowie

$$\int_X |f - t_l| \mathrm{d}\mu(x) \leq \varepsilon \qquad \forall\, ł > l_1(\varepsilon).$$

Weiterhin konvergiert $\{t_l\}_{l=1}^{\infty} \xrightarrow{\mu} f$ immer noch auch als Teilfolge im Maße, d.h. für alle $\eta > 0$ und $\delta > 0$ existiert ein $l_0(\eta, \delta)$ so, dass

$$\mu(E(|t_l - f| \geq \eta)) < \delta, \qquad \forall\, l > l_0(\eta, \delta).$$

Sei nun $l > \max(l_0(\eta, \delta), l_1)$ fest gewählt und damit

$$E_0 = E(|t_l - f| \geq \eta) \in \mathfrak{A}$$

mit $\mu(E_0) < \delta$.
Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei nun $0 < \mu(E_0)$. Mit $t_l(x) = \sum_{j=1}^{N(l)} \alpha_j \chi_{E_j}(x)$ erhalten wir zunächst für alle $x \in X \setminus E_0 = E_0^C$ (vermittels $|f| \leq |f - t_l| + |t_l|$):

$$\sum_{j=1}^{N(l)} \sup_{x \in E_j \cap E_0^C} |f(x)| \, \mu(E_j \cap E_0^C) \leq \sum_{j=1}^{N(l)} \left(\eta + |\alpha_j| \right) \mu(E_j)$$

sowie für $x \in E_0$

$$\int_{E_0} |f - t_l| \mathrm{d}\mu(x) \leq \int_X |f - t_l| \mathrm{d}\mu(x) < \infty$$

mit $\mu(E_0) < \delta$. Also $|f - t_l|$ ist auf E_0 wesentlich beschränkt. Mit anderen Worten: Es existiert ein $\tilde{N} \in \mathfrak{A}$ mit $\tilde{N} \subset E_0$, $\mu(\tilde{N}) = 0$ und

$$0 \leq |f - t_l| \leq c_0 < \infty \qquad \forall x \in E_0 \setminus \tilde{N}$$

sowie

$$|t_l| \leq c_1 < \infty \qquad \forall x \in E_0 \setminus \tilde{N}.$$

Aus $|f| \leq |f - t_l| + |t_l|$ folgt jetzt

$$\sup_{x \in E_0 \setminus \tilde{N}} |f(x)| \leq \sup_{x \in E_0 \setminus \tilde{N}} |f(x) - t_l(x)| + \sup_{x \in E_0 \setminus \tilde{N}} |t_l(x)| \leq c_0 + c_1 < \infty$$

und damit

$$\sup_{x \in E_0 \setminus \tilde{N}} |f(x)| \cdot \mu\left(E_0 \setminus \tilde{N}\right) < (c_0 + c_1) \cdot \delta < \infty.$$

Unter Beachtung von $\mu(N) = 0$ haben wir somit die zulässige Zerlegung $\mathscr{Z}_X = \{\{E_j \cap E_0^C\}_{j=1}^{N(l)}, E_0 \setminus \tilde{N}, \tilde{N}\} \in \mathfrak{Z}(X, \mu)$ erhalten.
Damit folgt nach Satz 1.6.14 (IVZM): $f \in \dot{V}(X, \mu)$.

Um zu zeigen, dass auch $(ii) \Rightarrow (i)$ gilt, wählen wir eine Folge von zulässigen Zerlegungen $\{\mathscr{Z}_X^k := \mathscr{Z}_X^{\varepsilon_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{Z}(X, f)$ mit $\mathscr{Z}_X^{\varepsilon_k} \preceq \mathscr{Z}_X^{\varepsilon_{k+1}}, \forall k \in \mathbb{N}$ und

$$S_f(\mathscr{Z}_X^{\varepsilon_k}) - s_f(\mathscr{Z}_X^{\varepsilon_k}) < \varepsilon_k,$$

wobei $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ ein monoton fallende Nullfolge sei. Es genügt, im Folgenden nichtnegative Funktionen $f \geq 0$ zu betrachten. Da $\{E_j^k\}_{j=1}^{\infty} = \mathscr{Z}_X^{\varepsilon_k}$ eine zulässige Zerlegung ist, gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \big(\sup_{x \in E_j^k} f(x) \big) \, \mu(E_j^k) \; = \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{x \in E_j^k} |f(x)| \, \mu(E_j^k) \; < \infty,$$

d.h. die Reihe ist absolut konvergent. $\{t_l(x)\}_{l=k}^{\infty}$ sei eine noch zu konstruierende Folge von Treppenfunktionen. Wir setzen nun voraus, dass wir ein k fest gewählt haben und bezeichnen mit I_∞ die Menge aller Indizes j für die $\mu(E_j^k) = \infty$ gilt. Da in diesem Falle $\sup_{x \in E_j^k} |f(x)| = 0$ ist, setzen wir $t_k(x) := 0$ für alle $x \in E_\infty := \bigcup_{j \in I_\infty} E_j^k$.
Ist $\sup_{x \in E_j^k} |f(x)| = 0$ und $0 < \mu(E_j^k) < \infty$ so schreiben wir $j \in I_0$ und setzen $t_k(x) := 0$ für alle $x \in E_0 := \bigcup_{j \in I_0} E_j^k$.
Weiter sei I_0^μ die Menge aller j, für die $\mu(E_j) = 0$ ist und für die folglich auch die Treppenfunktion $t_k(x)$ keinen Eintrag im Integral liefert. Wir setzen hier $t_k(x) := 0$ für alle $x \in E_0^\mu = \bigcup_{j \in I_0^\mu} E_j^k$. Zusammengefasst erhalten wir

$$t_k(x) = 0 \quad \forall x \in E^* = E_\infty \cup E_0 \cup E_0^\mu,$$

wobei zunächst für eine feste Zerlegung $\mathscr{Z}_X^{\varepsilon_k}$ auch die Menge E^* fest ist. Im Sinne von Verfeinerungen können wir sogar E^* für alle $l \geq k$ fest gewählt lassen und hier $t_k(x) := 0 \forall x \in E^*$ setzen.
Wir werden im Folgenden die Menge J genauer untersuchen:
$J := \mathbb{N} \setminus \left(I_0 \cup I_\infty \cup I_0^\mu\right) \subset \{j \in \mathbb{N} :\ 0 < \mu(E_j) < \infty\}$
Wir nehmen zunächst an, dass J eine endliche Menge sei. Folglich ist auch

$$S_f(\mathscr{Z}_X^{\varepsilon_k}) = \sum_{j \in J} \sup_{x \in E_j^k} |f(x)|\, \mu(E_j^k) \ < \infty, \quad \text{das heißt:}$$

$$0 < \mu(X \setminus E^*) \ = \ \mu(E_R := \bigcup_{j \in J} E_j^k) \ < \ \infty \quad ,$$

wobei wir auch die Menge E_R für alle $l \geq k$ fest halten. Der Satz 1.6.12 (IVT) mit $X = E_R$ sichert die Existenz einer punktweise monoton wachsenden Folge $\{\tilde{t}_l\}_{l=k}^\infty$ mit $D(\tilde{t}_l) = E_R$, so dass $\{\tilde{t}_l\}_{l=k}^\infty \xrightarrow{\mu_{|E_R}} f$, welche also im Maße auf E_R gegen die Einschränkung von f auf E_R konvergiert. *Gegebenenfalls muss man dafür die Zerlegung $\mathscr{Z}_X^k := \mathscr{Z}_X^{\varepsilon_k}$ im Sinne einer geeigeten Verfeinerung für E_R neu erklären, was hier immer möglich ist!!*
Damit erhalten wir für alle $l \geq k$ und beliebiges $\eta\ > 0$ mit

$$t_l(x) := \begin{cases} \tilde{t}_l(x) & \text{für} \quad x \in E_R \\ 0 & \text{für} \quad x \in E^* \end{cases} \qquad :$$

$$\begin{aligned} 2\eta \quad &> \quad \int_X |f(x) - t_k(x)| \mathrm{d}\mu(x) + \int_X |t_l(x) - f(x)| \mathrm{d}\mu(x) \\ &\geq \quad \int_X |t_l(x) - t_k(x)| \mathrm{d}\mu(x). \end{aligned}$$

Da $\eta > 0$ beliebig war, folgt aus obiger Ungleichung, dass die Folge der Treppenfunktionen $\{t_l\}_{l=k}^\infty$ eine ρ_{ps}-($\mathbb{L}_1$-)Cauchy-Folge ist. Offensichtlich gilt daneben:

$$\{\tilde{t}_l\}_{l=k}^\infty \xrightarrow{\mu} f$$

Damit ist f im Sinne von (I) integrierbar.

Wir nehmen nun an, dass J nun eine unendliche (abzählbare) Indexmenge sei und unterdrücken nachfolgend den Index k.
Es reicht hier aus, nur den Fall $\mu(\bigcup_{j \in J} E_j) = \infty$ zu betrachten, da die Untersuchung des Falles $\mu(\bigcup_{j \in J} E_j) < \infty$ analog zu der obigen Situation (der endlichen Indexmenge J) durchgeführt werden kann.
Des Weiteren können wir vorraussetzen, dass

$$\inf_{j \in J} (\sup_{x \in E_j} |f(x_j)|) \ = \ 0$$

gilt. Denn bei

$$\inf_{j \in J} (\sup_{x \in E_j} |f(x_j)|) \geq c > 0,$$

müsste, weil die Zerlegung zulässig war, im Widerspruch zur Voraussetzung
$\mu(\bigcup_{j\in J} E_j) < \infty$ gelten.
Wir ordnen zunächst die Folge $\{\sup_{x\in E_{jm}} |f(x)|\}_{j\in J}$ in eine monoton fallende Folge $\{\sup_{x\in E_{jm}} |f(x)|\}_{m=1}^{\infty}$ um.
Dann existieren für die so gewählte Folge $\{\sup_{x\in E_{jm}} |f(x)|\}_{m=1}^{\infty}$ auch die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{m\to\infty} (\sup_{x\in E_{jm}} |f(x)|\, \mu(E_{j_m})) \geq \lim_{m\to\infty} (\inf_{x\in E_{jm}} |f(x)|\, \mu(E_{j_m})) = 0,$$

denn wäre hier $\lim_{m\to\infty}(\sup_{x\in E_{jm}} |f(x)|\, \mu(E_{j_m})) \geq c > 0$ bzw.
$\lim_{m\to\infty}(\inf_{x\in E_{jm}} |f(x)|\, \mu(E_{j_m})) \geq c > 0$, hätten wir einen Widerspruch zur absoluten Konvergenz.
Mit dem Ziel der Einbindung der Konvergenz der Folge der Treppenfunktionen im Maße gegen f sei nun wieder $\eta > 0$ beliebig vorgegeben.
Dank der obigen Grenzwerte und unserer Umordnung finden wir ein $m_0(\varepsilon_k, \eta)$ mit
$\sup_{x\in E_{jm}} |f(x)| < \eta$ und

$$\sum_{m=m_0(\varepsilon_k)+1}^{\infty} (\sup_{x\in E_{jm}} |f(x)| - \inf_{x\in E_{jm}} |f(x)|)\mu(E_{j_m}) \leq \sum_{m=m_0(\varepsilon_k,\eta)+1}^{\infty} \sup_{x\in E_{jm}} |f(x)|\mu(E_{j_m}) < \varepsilon_k.$$

Wir setzen für diese j_m mit $m > m_0(\varepsilon_k, \eta)$

$$t_k(x) := 0, \qquad \forall x \in E_{j_m}$$

und beachten, dass $\sum_{m=1}^{m_0(\varepsilon_k,\eta)} \mu(E_{j_m}) < \infty$ ist. Jetzt kann man diesen Fall wie den der endlichen Indexmenge J behandeln, mit $\bigcup_{m=1}^{m_0(\varepsilon_k,\eta)} E_{j_m} = E_R$ und $\{\varepsilon_l\}_{l=k}^{\infty}$.
Nachdem wir noch X durch $X_1 := X \setminus \bigcup_{m=m_0(\varepsilon_k)+1}^{\infty} E_{j_m}$ ersetzen, erhalten wir zunächst die gesuchten Treppenfunktion $t_k(x)$ und analog die $\{t_l(x)\}_{l=k}^{\infty}$ mit den geforderten Konvergenzeigenschaften. Schließlich liefert die Eindeutigkeit des Grenzwertes

$$\int_X f(x) \mathrm{d}\mu(x) = \lim_{l\to\infty} \int_X t_l(x) \mathrm{d}\mu(x).$$

□

Bemerkung 1.6.20 ((IV2):)**.**
Als weitere Ergebnisse erhalten wir:

i) Ist f messbar und $g \in \dot{V}(X, \mu)$ mit $|f(x)| \leq g(x)$, $\forall x \in X$, dann gilt $f \in V_{\mathbb{C}}(X, \mu)$.

ii) Ist $[X, \mathfrak{A}, \mu]$ ein vollständiger Maßraum, dann gilt
$$f \in \dot{V}_{\mathbb{C}}(X, \mu) \Leftrightarrow f \text{ messbar und } \mathfrak{Z}(X, f) \neq \emptyset.$$

iii) $f \in \dot{V}_{\mathbb{C}}(X, \mu)$ und g messbar und beschränkt $\Rightarrow f \cdot g \in \dot{V}_{\mathbb{C}}(X, \mu)$

1.7 Konvergenzsätze

Problem: Gilt $\int \lim\limits_{j\to\infty} f_j(x)d\mu(x) = \lim\limits_{j\to\infty} \int f_j(x)d\mu(x)$? (Vertauschen Intergral und GW!)
Benutzen weiter $\heartsuit$ aus Abschnitt 1.6.3:

Definition 1.7.1 („L_1-Konvergenz“). *(vgl.Bem.1.6.13 „Halbnorm“)*
$[X,\mathfrak{A},\mu]$ sei Maßraum und $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \dot{V}_{\mathbb{C}}(X,\mu)$, $f \in \dot{V}_{\mathbb{C}}(X,\mu) \overset{Abk}{=} \dot{V}(X,\mu)$.
Gilt $\lim\limits_{j\to\infty} \int |f_j(x) - f(x)|d\mu(x) = \lim\limits_{j\to\infty} \rho_{PS}(f_j, f) = 0$, dann schreiben wir:
$\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \underset{L_1}{\longrightarrow} f$ und sagen $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ <u>konvergiert im L_1-Sinne</u> gegen f.

Bemerkung 1.7.1 (Vorbemerkung (KSV):). *Sind die $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ messbar, f messbar, dann gilt:*
$\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \underset{L_1}{\longrightarrow} f$ zieht $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \underset{\mu}{\to} f$ nach sich (aus $\underset{L_1}{\longrightarrow}$ folgt $\underset{\mu}{\to}$).

Definition 1.7.2 („L_1-Cauchy-Folge“). *Ist $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \dot{V}(X,\mu)$ und gilt $\forall \varepsilon > 0 : \exists j_0(\varepsilon) : \rho_{PS}(f_i, f_k) < \varepsilon$, $\forall j,k > j_0(\varepsilon)$ so nennen wir $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ L_1-Cauchy-Folge.*

Satz 1.7.1 (Konvergenz-Satz 1 (KS1)).
(Isotone Mengenfolge mit gleichmäßig beschränkten Integralen).
Es sei $X = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$, $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ isoton, $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}$, f nach $\heartsuit$ habe die Eigenschaft $f \geq 0$, $\forall x \in X$ (f.ü. auf X):
$f \in \dot{V}(X,\mu) \Leftrightarrow f \in \dot{V}(E_j,\mu) \forall j \in \mathbb{N}$ und $\mathfrak{Z}(X,f) \neq \emptyset$ sowie: $\int f(x)d\mu(x) = \lim\limits_{j\to\infty} \int\limits_{E_j} f(x)d\mu(x)$.

Beweis. „$\Rightarrow$“ folgt wie in Folg.1.6.7
„$\Leftarrow$“z.Z.: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \mathscr{Z}_X : SW_f(\mathscr{Z}_X) < \varepsilon$
(Ideen aus Sätzen 1.6.10 und 1.6.11 zur Integrierbarkeit Fktn. Zerl.)
Baue die E_j um: $A_1 = E_1, A_j = E_j \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{j-1} E_k$, $j = 2,3,\ldots$ $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ paarweise disjunkt, $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j = X$
Weil $f \in \dot{V}(E_j, f) \Rightarrow \exists \mathscr{Z}_{E_j}$ mit $SW_f(\mathscr{Z}_{E_j}) < \frac{\varepsilon}{2^j}$
$\mathscr{Z}_{A_j} := A_j \cap \mathscr{Z}_{E_j}$ hat gleiche Eigenschaft. (Monotonie). Zudem ist (vgl. Vor.): $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \int\limits_{A_j} f d\mu(x) \leq c$
Nun $\mathscr{Z}_X := \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \mathscr{Z}_{A_j}$. $\mathscr{Z}_X$ ist zulässige Zerlegung, denn mit $\mathscr{Z}_{A_j} = \{A_j^l\}_{j=l}^{\infty}$ gilt:
$\sum\limits_{j,l=1}^{\infty} (\sup\limits_{x\in A_j^l} f(x))\mu(A_j^l) = \sum\limits_{j,l=1}^{\infty} (\inf\limits_{x\in A_j^l} f(x) + \text{schw}(f)(A_j^l))\mu(A_j^l) \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} \int\limits_{A_j} f d\mu(x) + \sum\limits_{j=1}^{\infty} SW_f(\mathscr{Z}_{A_j}) < c + \varepsilon$. □

Satz 1.7.2 (Konvergenz-Satz 2 (KS2) (Beppo Levi) monotone Konvergenz).
$[X,\mathfrak{A},\mu]$ sei Maßraum, $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ nach ($\heartsuit$) und $f_j \in \dot{V}(X,\mu)$ $\forall j \in \mathbb{N}$. $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ sei eine monoton wachsende Folge messbarer Funktionen mit $\sup\limits_{j\in\mathbb{N}} \int f_j d\mu(x) \leq c \leq \infty$.
Die f_j seien nichtnegativ: $0 \leq f_j(x)$, $\forall x \in X$ sowie $f(x) = \lim\limits_{j\to\infty} f_j(x)$ $\forall x \in X$.
Dann gilt: $f \in \dot{V}(X,\mu)$ und $\lim\limits_{j\to\infty} \int f_j(x)d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x)$.

Bemerkung 1.7.2 (KS1:).
Satz 1.7.2(KS2) kann auch mit $E \in \mathfrak{A}$ anstelle von X formuliert werden.

Beweis.
Die $\{\int f_j d\mu(x)\}_{j=1}^{\infty}$ sind eine monotone (wachsende) beschränkte Folge, d.h.
$\exists \lim\limits_{j\to\infty} \int f_j d\mu(x) \leq c$. Wir arbeiten nun mit messbaren Mengen: $\forall \varepsilon > 0$ erklären wir

$$E_j^{\varepsilon} := E(f \leq f_j(1+\varepsilon))$$

Dann gilt (weil $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ monoton wachsend): $\{E_j^{\varepsilon}\}_{j=1}^{\infty}$ sind isotone Mengenfolge.
Mit punktweiser Konvergenz erhalten wir: $\lim\limits_{j\to\infty} E_j^{\varepsilon} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j^{\varepsilon} = X$.
$\forall j \in \mathbb{N}$ gilt auf E_j^{ε}: $0 \leq f(x) \leq (1+\varepsilon) f_j(x)$, d.h. (weil f messbar:) $f \in \dot{V}(E_j^{\varepsilon}, \mu)$.
Damit gilt: $0 \leq \int\limits_{E_j^{\varepsilon}} f(x) d\mu(x) \leq (1+\varepsilon) \int\limits_{E_j^{\varepsilon}} f_j(x) d\mu(x) \leq (1+\varepsilon) \int\limits_X f_j(x) d\mu(x)$
Da $\varepsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow \int f(x) d\mu(x) \leq \lim\limits_{j\to\infty} \int f_j(x) d\mu(x)$
Weil die $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ monoton wachsend und $f \in \dot{V}(X,\mu)$ gilt: $\lim\limits_{j\to\infty} \int f_j(x) d\mu(x) \leq \int f(x) d\mu(x)$
□

Bemerkung 1.7.3 (KS2:).
Für den Satz 1.7.2 von Beppo-Levi reicht die Forderung der Monotonie f.ü. aus.

Bemerkung 1.7.4 (KS3:).
Ist $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ sei eine monoton wachsende Folge nichtnegativer messbarer Funktionen mit $f_j \in V(X,\mu) \forall j \in \mathbb{N}$ sowie: $\sup\limits_{j\in\mathbb{N}} \int f_j(x) d\mu(x) \leq c < \infty$,
so existiert der Grenzwert $\lim\limits_{j\to\infty} \int\limits_X f_j(x) d\mu(x)$ in Satz 1.7.2(KS2). Dabei ist die Grenzfunktion $f = \lim\limits_{j\to\infty} f_j(x)$ hier messbar und wesentlich beschränkt,d.h.: $\lim\limits_{j\to\infty} f_j(x) = f(x) < \infty$ f.ü. in X.
$(\circ)$ Problem ist möglicherweise einzig der Fall bestimmter Divergenz:
Sei $E^{\infty} := E(\lim\limits_{j\to\infty} f_j(x) = \infty) = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} E(f_l > j)$.
Annahme: $\mu(E^{\infty}) > 0$
$\Rightarrow \mu(E^{\infty}) \overset{\text{Mon. von } \mu}{\leq} \mu(\bigcup\limits_{l=1}^{\infty} E(f_l > j)) \overset{\text{Folge mon. wachs. Funktionen}}{=} \lim\limits_{l\to\infty} \mu(E(f_l > j))$*, j beliebig.*
Es war: $\lim\limits_{j\to\infty} \int\limits_X f_l(x) d\mu(x) \geq \lim\limits_{l\to\infty} \int\limits_{E(f_l > j)} f_l(x) d\mu(x) \geq \lim\limits_{l\to\infty} (j \cdot \mu(E(f_l > j))) \geq j \cdot \mu(E^{\infty})$
Da j beliebig ist dies bei $\mu(E^{\infty}) > 0$ WIDERSPRUCH *zur gleichmäßigen Beschränktheit.*

Bemerkung 1.7.5 (KS4:). *Satz 1.7.2(KS2) gilt sinngemäß auch für monoton fallende messbare und nichtnegative Funktionen.*

Beweis. $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ monoton fallende Folge messbarer, μ-integrierbarer Funktionen.
$f_1 \geq f_2 \geq \ldots \geq f \geq 0$. f_1 ist Majorantenfunktion zu f, $f \in \dot{V}(X,\mu)$.
Die monoton wachsende Folge $\{f_1 - f_j\}_{j=1}^{\infty} \xrightarrow{j\to\infty} f_1 - f$.
Rest folgt mit Satz 1.7.2 (KS2) ($\lim\limits_{j\to\infty} \int f_j(x) d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x)$) □

Satz 1.7.3 (Konvergenz-Satz 3 (KS3) von Lebesgue über majorisierte Konvergenz). $[X, \mathfrak{A}, \mu]$ *sei Maßraum: $f_j, j \in \mathbb{N}$, f seien nach $\heartsuit$ und $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ sei Folge messbarer Funktionen mit pktw.*

$\lim\limits_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$. *Existiert eine Majorantenfunktion g nach* $\heartsuit$ *mit* $g \in \dot{V}(X,\mu)$ *und*

$$|f_j(x)| < g(x) \;\; \forall x \in X, \forall j \in \mathbb{N} \qquad (*),$$

dann gilt $f_j \in V(X,\mu) \;\; \forall j \in \mathbb{N}$, $f \in V(X,\mu)$ *und* $\lim\limits_{j\to\infty} \int f_j(x)d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x)$.

Bemerkung 1.7.6 (KS5:). *Der Satz 1.7.3(KS3) kann auch bei f.ü.-,*μ*- und* L_1*-Konvergenz gezeigt werden.* $(*)$ *muss hier f.ü. gelten.*

Beweis. [Satz 1.7.3 (KS3)] Arbeiten mit $\lim\limits_{j\to\infty} f_j(x) = f(x) \; \forall x \in X$.
Zunächst folgt aus $(*)$ (vgl. Bem. 1.6.20 (IV2)(i)) $f_j, f \in V(X,\mu), j \in \mathbb{N}$ und f ist messbar als Grenzwert messbarer Funktionen.
Definieren Folge: $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ als monoton fallende Folge messbarer Funktionen durch:
$\varphi_j(x) := \sup\limits_{k\geq j}(|f(x) - f_k(x)|) \forall j \in \mathbb{N}$ mit dem Grenzwert φ_j : $\lim\limits_{j\to\infty} \varphi_j(x) = 0 \; \forall x \in X$.
Die Funktionen φ_j werden majorisiert durch:
$\varphi_j(x) \leq \sup\limits_{k\geq j} |f_k(x)| + |f(x)| < 2g(x)$, d.h. $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset V(X,\mu)$. (vgl. wieder Bem. 1.6.20 (IV2)(i))
Machen nun aus monoton fallender monoton wachsende Folge (ZIEL: SATZ 1.7.2).
Setzen: $\psi_j(x) := \varphi_1(x) - \varphi_j(x) \geq 0$, $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ monoton wachsend mit $\psi_j(x) \leq \varphi_1(x) \; \forall j \in \mathbb{N}$ bei $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty} \in V(X,\mu)$.
Nun Grenzwertbildung:

$$\lim_{j\to\infty} \int \psi_j(x)d\mu(x) = \int \varphi_1(x)d\mu(x) - \lim_{j\to\infty} \int \varphi_j(x)d\mu(x) \overset{\lim\limits_{j\to\infty} \psi_j(x) = \varphi_1(x)}{=} \int \varphi_1(x)d\mu(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{j\to\infty} \int \varphi_j(x)d\mu(x) = 0 \leq \lim_{j\to\infty} \int |f - f_j| d\mu(x) \leq \lim_{j\to\infty} \int \varphi_j(x)d\mu(x) = 0$$

Das heißt:

$$|\int f(x)d\mu(x) - \lim_{j\to\infty} \int f_j(x)d\mu(x)| \leq \lim_{j\to\infty} \int |f(x) - f_j(x)| d\mu(x) = 0.$$

□

Satz 1.7.4 (Konvergenz-Satz 4 (KS4) (Fatousches Lemma)).
$[X,\mathfrak{A},\mu]$ *sei Maßraum,* $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset V(X,\mu)$. $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ *sei (punktw.) konvergente Folge messbarer nichtnegativer Funktionen mit:* $\int f_j(x)d\mu(x) \leq c < \infty \quad \forall j \in \mathbb{N}$.
Dann gehört $f = \lim\limits_{j\to\infty} f_j$ *zu* $V(X,\mu)$ *und* $\int f d\mu(x) \leq c$.

Bemerkung 1.7.7 (KS6:). ZWEITE FORMULIERUNG DES FATOUSCHEN LEMMAS:
Ist $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ *nicht konvergent mit* $\underline{\lim\limits_{j\to\infty}} \int f_j(x)d\mu(x) \leq c < \infty$
$\Rightarrow$ *(vgl. Satz 1.4.7)* $f := \underline{\lim\limits_{j\to\infty}} f_j(x) \in V(X,\mu)$ *mit* $\int f(x)d\mu(x) \leq c$.

Beweis. (Satz: 1.7.4) Setzen $\varphi_j(x) := \inf\limits_{k\geq j}\{f_k(x)\}$.
Dann gilt $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \ldots \leq f = \lim\limits_{j\to\infty} \varphi_j(x)$.
Weiterhin gilt:
$\int \varphi_j(x)d\mu(x) \leq \int f_j(x)d\mu(x) \leq c$
$\Rightarrow$ (mit Satz 1.7.2 (KS2)) Die Behauptung. □

Beispiel 1.7.1 (Nutzung der Konvergenzsätze). *Sei* $f_j(x) = (\sin(x))^j$, $D(f_j) = [a,b] = E$ *mit* $[0,3\pi] \subset [a,b]$.

Sei $[\mathbb{R}^1, \mathfrak{A}_{\mu_L}, \mu_L]$ Maßraum, $\mu(E) < \infty$. Grenzfunktion:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \forall x \in E \text{ mit } x \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \\ 1 & \forall x \in E \text{ mit } x = \frac{\pi}{2} + 2l\pi \\ \nexists & \forall x \in E \text{ mit } x = \frac{\pi}{2} + (2l+1)\pi \end{cases}$$

Die f_j sind messbar als stetige Funktionen mit $\lim\limits_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$ f.ü. in E.
Satz (KS4) liefert:
$\int\limits_E |f_j| d\mu_L(x) \leq \mu_L(E) \Rightarrow \int\limits_E f(x) d\mu(x) = \lim\limits_{j\to\infty} \int\limits_E f_j(x) d\mu(x) = 0$

Bemerkung 1.7.8 (KS7:)**.**
Bei der Erklärung von sogenannten Bochner-Integralen in allgemeinen Banachräumen nutzt man Treppenfunktionen und die Konvergenzsätze aus unserem Abschnitt 1.7.

1.8 Integration in Produkträumen

Ziel:
Wann ist die Integrationsreihenfolge vertauschbar und wie erklärt man „iterierte" Integration?

Beispiel 1.8.1.
$\overline{G} = D(f)$ „Normalbereich" , G beschränktes Gebiet (einfach zusammenhängend), $G \in \mathbb{E}^2$
$\int\limits_{\overline{G}} f(x_1,x_2) d\overline{G} = \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi(x_1)}^{\psi(x_1)} f(x_1,x_2) dx_2 dx_1 = \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi(x_2)}^{\psi(x_2)} f(\underline{x}) dx_1 dx_2$; *$d\overline{G} \approx d\mu_L(\underline{x})$ in $\mathfrak{A}_{\mu_L}(\mathbb{R}^2)$*

Vorgegeben seien $[X, \mathfrak{A}, \mu]$ und $[Y, \mathfrak{C}, \nu]$ als Maßräume mit σ-endlichen Maßen. (⧫)
Bekannt: $X \times Y$ und $A \times B := \{(x,y)$ mit $x \in A \subset X$ und $y \in B \subset Y\}$

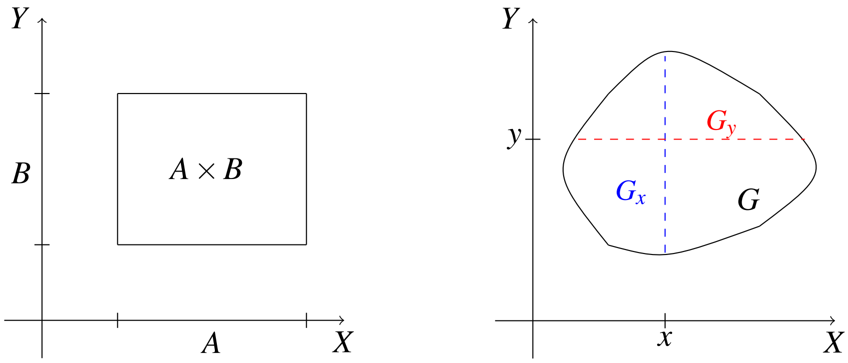
Definition 1.8.1 (Produktalgebra und Schnitte)**.**

i) Mit $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ (oder $\mathfrak{A} \times \mathfrak{C}$) bezeichnen wir die von dem Mengensystem $\mathfrak{M} := \{A \times B : A \in \mathfrak{A} \wedge B \in \mathfrak{C}\}$ erzeugte σ-Algebra. $\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \sigma(\mathfrak{M})$

ii) $\forall G \in \mathfrak{P}(X \times Y)$ und $x \in X$, bei $G_x := \{y \in Y : (x,y) \in G\} \subset Y$ sowie bei $y \in Y$ $G_y := \{x \in X : (x,y) \in G\} \subset X$ bezeichnen wir die x- bzw. y-Schnitte von G: G_x bzw. G_y.

iii) Für Funktionen f (reellwertig) auf $X \times Y$ nennen wir:
$f^{(x)}(y) = f(x,y)$, $\forall x \in X$ und
$f^{(y)}(x) = f(x,y)$, $\forall y \in Y$ x- bzw. y-Schnitt der Funktion f.

(Skizze)



Bemerkung 1.8.1 ((PRO1))**.** *$\{X \times Y, \mathfrak{A}\mathfrak{C}\}$ ist ein messbarer Raum.*

Satz 1.8.1 (Produkt-Algebra)**.**

i) Es sei $G \in \mathfrak{A}\mathfrak{C}$. Dann gilt $\forall x \in X : G_x \in \mathfrak{C}$ und $\forall y \in Y : G_y \in \mathfrak{A}$.

ii) Ist f ($\mathfrak{B}^1$-$\mathfrak{A}\mathfrak{C}$) messbar auf G (bzw. $X \times Y$), dann sind auch die Schnitte: $f^{(x)}(y)$ und $f^{(y)}(x)$ messbar über $D(f^{(x)}) = G_x$ und $D(f^{(y)}) = G_y$.
Bei $G = X \times Y$ gilt dies jeweils $\forall x \in X$ bzw. $\forall y \in Y$.

Beweis. Zeigen zunächst:
Das Mengensystem: $\mathfrak{M}^1 := \{\Omega \subset X \times Y : \Omega_y \in \mathfrak{A} \text{ und } \Omega_x \in \mathfrak{C}\}$ ist σ-Algebra.
Dazu betrachten wir $\Omega^c \subset X \times Y$, mit $\Omega \in \mathfrak{M}^1$, $\forall y \in Y$. $(\Omega^c)_y = (\Omega_y)^c \in \mathfrak{A}$ $(\Omega_y \in \mathfrak{A})$.
$\forall x \in X : (\Omega^c)_x = (\Omega_x)^c \in \mathfrak{C}$
Nun seien $\{\Omega^j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}^1$. Unter Beachtung der Schnitt-Definition erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \forall y \in Y : (\bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega^j)_y = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega^j_y \in \mathfrak{A} \\ \forall x \in X : (\bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega^j)_x = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega^j_x \in \mathfrak{C} \end{aligned}\right\} \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega^j \in \mathfrak{M}^1$$

also $\mathfrak{M}^1 \supset \sigma(\mathfrak{M}) = \mathfrak{A}\mathfrak{C}$, womit i) gezeigt ist.
zu ii)
$a \in \mathbb{R}$ bel. $E_a \subset G \in \mathfrak{A}\mathfrak{C}$
$\{x \in G_y : f(x,y) < a\} = (\underbrace{E(f < a)}_{E_a})_y = (E_a)_y \in \mathfrak{A}$ und
$\{y \in G_x : f(x,y) < a\} = (E(f < a))_x = (E_a)_x \in \mathfrak{C}$, d.h. $f^{(y)}(x)$ und $f^{(x)}(y)$ sind messbar. $\square$

Bemerkung 1.8.2 (PRO1)**.** *Nach obigem Satz sind somit die Schnitte messbarer Mengen messbare Mengen, sowie die Schnitte messbarer Funktionen auch messbare Funktionen.*

Definition 1.8.2 (Produktmaß)**.**
$[X, \mathfrak{A}, \mu]$ und $[Y, \mathfrak{C}, \nu]$ seien Maßräume (♦). Das auf $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ erklärte Maß ϑ wird durch: $\vartheta(G) := \mu(A) \cdot \nu(B)$ $\forall G \in \mathfrak{M} = \{A \times B : A \in \mathfrak{A} \wedge B \in \mathfrak{C}\}$ festgelegt. ϑ heißt das Produktmaß von μ und ν. Wir schreiben: $\vartheta = \mu \times \nu = (\mu \cdot \nu)$
(Im Sinne des Hahnschen Fortsetzungssatzes ist ϑ wohldefiniert (vgl. Satz: 1.3.1)).

Bemerkung 1.8.3 (PRO2). *Sind $\mathfrak{A}(X)$ und $\mathfrak{C}(Y)$ Mengenalgebren über X bzw. Y. Dann ist das System $\tilde{S} \subset \mathfrak{P}(X \times Y)$ aller Vereinigungen paarweise disjunkter Mengen $A \times B$, $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{C}$ Mengenalgebra über $X \times Y$.*

Beweis. Übungsaufgabe Serie 9 Sei $A_1, A_2 \subseteq X$, $B_1, B_2 \subseteq Y$ Es gilt:

a) $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$

b) $(A_1 \times B_1)^c = (A_1^c \times B_1) \cup (A_1 \times B_1^c) \cup (A_1^c \cup B_1^c)$

Sei nun $Q = \bigcup\limits_{j=1}^{m} A_j \times B_j \in \tilde{S}$, $R = \bigcup\limits_{j=1}^{m} C_j \times D_j \in \tilde{S}$, $A_j, C_j \in \mathfrak{A}$, $\quad B_j, D_j \in \mathfrak{C}$

i) Zu zeigen: $Q^c \in \tilde{S}$:

$$Q^c = (\bigcup_{j=1}^{m} A_j \times B_j)^c = \bigcap_{j=1}^{m} (A_j \times B_j)^c = \\ \overset{b)}{=} \bigcap_{j=1}^{m} (A_j^c \times B_j) \cup (A_j \times B_j^c) \cup (A_j^c \times B_j^c) \in \tilde{S}$$

ii) Zu zeigen: $Q \cup R \in \tilde{S}$

$Q \cup R = (\underbrace{Q^c}_{\in \tilde{S}} \cap \underbrace{R^c}_{\in \tilde{S}})^c \in \tilde{S}$, falls $Q \cap R \in \tilde{S}$

Zeigen dazu : $Q, R \in \tilde{S} \Rightarrow Q \cap R \in \tilde{S}$

$Q \cap R \overset{a)}{=} \bigcup\limits_{i=1}^{m} \bigcap\limits_{j=1}^{m} (A_i \cap C_j) \times (B_i \cap D_j) \in \tilde{S}$

□

Satz 1.8.2 (PROM1).
*$\forall G \in \mathfrak{A}\mathfrak{C}$ gilt: $\vartheta(G) \overset{formal}{=} \int\limits_{X \times Y} \chi_G(x,y) d\vartheta(x,y) = \int\limits_{X} \nu(G_x) d\mu(x) = \int\limits_{Y} \mu(G_y) d\nu(y)$ (▼)
Die Funktionen $\eta^{G_x}(x) := \nu(G_x)$ und $\xi^{G_y}(y) = \mu(G_y)$ sind messbar und (▼) gilt im eigentlichen Sinne bei $\mu(X), \nu(Y) < \infty$.
Sind μ und ν σ-endlich, dann existiert $\int\limits_{X} \nu(G_x) d\mu(x)$ genau dann, wenn $\eta^{G_x}(x)$ μ-integrierbar ist über $D(\eta^{G_x}(x)) \subset X$ und genau dann wenn $\xi^{G_y}(y)$ ν-integrierbar über $D(\xi^{G_y}(y)) \subset Y$ ist. (Hier reicht sogar die Existenz eines Integrals und Integrierbarkeit der entsprechenden anderen Funktionen aus.)*

Beweis. Zunächst seien $0 \leq \mu(X), \nu(Y) < \infty$. Wir setzen (vgl. Bem. 1.8.3 PRO2) zunächst: $G = \bigcup\limits_{j=1}^{N} A_j \times B_j \in \tilde{S}$ mit $\{A_j \times B_j\}_{j=1}^{N}$ paarweise disjunkt ($A_j \in \mathfrak{A}, B_j \in \mathfrak{C}$). Dann gilt:
$G_y = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (A_j \times B_j)_y$ mit paarweise disjunkten Schnittmengen (sonst WIDERSPUCH zu $\{A_j \times B_j\}_{j=1}^{N}$ paarweise disjunkt).
Wir verwenden nun die erklärten Funktionen $\mu(G_y) = \xi^{G_y}(y) = \sum\limits_{j=1}^{N} \mu(A_j) \chi_{B_j}(y)$ und $\eta^{G_x}(x)$.
($\mu(G_y)$ als Treppenfunktion messbar und $\xi^{G_y}(y) \in T_\nu(Y)$. Analoges gilt für $\eta^{G_x}(x) \in T_\mu(X)$).)
d.h. Behauptung für alle $G \in \tilde{S}$ gezeigt: $\quad \int\limits_{Y} \xi^{G_y}(y) d\nu(y) = \sum\limits_{j=1}^{N} \mu(A_j) \nu(B_j) = \int\limits_{X} \eta^{G_x}(x) d\mu(x)$

Zeigen nun: Das System $\tilde{\mathfrak{M}}$ für welches die Aussage des Satzes gilt, ist ein monotones System. Sei also $\{G^j\}_{j=1}^{\infty} \subset \tilde{\mathfrak{M}}$, $\{G_j\}_{j=1}^{\infty}$ isotone Mengenfolge mit $G = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} G^j \in \tilde{\mathfrak{M}}$.

Zunächst haben wir: $G^1 \subset G^2 \subset \ldots \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} G^j = G$. μ und ν sind Maße und solche sind monoton.

Für alle $G^j \in \tilde{\mathfrak{M}}$, also $\forall j \in \mathbb{N}$ ist $\int\limits_Y \xi^{G_y^j}(y)d\nu(y) = \int\limits_X \eta^{G_x^j}(x)d\mu(x)$.

Damit erhalten wir:

$\xi^{G_y}(y) = \mu(G_y) = \lim\limits_{j\to\infty} \mu(G_y^j) = \lim\limits_{j\to\infty} \xi^{G_y^j}(y)$ messbar (analog für $\eta^{G_x}(x) = \nu(G_x)$).

Satz 1.7.2 von Beppo-Levi (KS2) liefert: $\quad \lim\limits_{j\to\infty} \int\limits_Y \xi^{G_y^j}(y)d\nu(y) \overset{\text{wohldef.}}{=} \int\limits_Y \xi^{G_y}(y)d\nu(y)$

Ganz analog zeigt man: $\quad \lim\limits_{j\to\infty} \int\limits_X \eta^{G_x^j}(x)d\mu(x) = \int\limits_X \eta^{G_x}(x)d\mu(x)$, d.h. $G \in \tilde{\mathfrak{M}}$

Entspechendes gilt für antitone Mengenfolgen: $\Rightarrow \tilde{\mathfrak{M}} = m(\tilde{S}) = m(\mathfrak{M}) = \sigma(\tilde{S}) = \sigma(\mathfrak{M}) = \mathfrak{AC}$

Nun seien μ und ν σ-endlich: (Bemerken zunächst: Auch $\vartheta(G) = \infty$ macht durchaus Sinn, wird aber durch obigen Satz und ($\blacktriangledown$) nicht mit Integralen behandelt!)

Setzen $D(\xi^{G_y}(y)) := \{y \in Y : \mu(G_y) < \infty\} \in \mathfrak{C}$ und $D(\eta^{G_x}(x)) := \{x \in X : \nu(G_x) < \infty\} \in \mathfrak{A}$.
Nutzen σ-Endlichkeit faktorweise: $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{Y_j\}_{j=1}^{\infty}$ isoton mit $\nu(Y_j), \mu(X_j) < \infty \; \forall j \in \mathbb{N}$

und $X = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} X_j$, $Y = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} Y_j$.

Lokalisieren eine beliebige vorgegebene Menge $G \in \mathfrak{AC}$ durch: $G^j := G \cap (X_j \times Y_j) \; \forall j \in \mathbb{N}$.
Die Funktionsfolgen $\{\xi^{G_y^j}(y)\}_{j=1}^{\infty}$, $\{\eta^{G_x^j}(x)\}_{j=1}^{\infty}$ sind nach Definition monoton wachsend, dabei gilt:

$D(\xi^{G_y}(y)) = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \bigcap\limits_{l=1}^{\infty} \{y \in Y : \xi^{G_y^l}(y) \leq j\} \in \mathfrak{C} \quad D(\eta^{G_x}(x)) = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \bigcap\limits_{l=1}^{\infty} \{x \in X : \eta^{G_x^l}(x) \leq j\} \in \mathfrak{A}$.

Schließlich liefert der Grenzübergang $j \to \infty$:

$\forall y \in D(\xi^{G_y}(y)) : \lim\limits_{j\to\infty} \xi^{G_y^j}(y) = \xi^{G_y}(y)$ und analog: $\forall x \in D(\eta^{G_x}(x)) : \lim\limits_{j\to\infty} \eta^{G_x^j}(x) = \eta^{G_x}(x)$.

Rest Beppo-Levi (Satz 1.7.2). □

Satz 1.8.3 (PROM2). *Die Maße μ und ν (vgl. ($\blacklozenge$)) seien σ-endlich: Dann ist das Produtmaß ϑ mit:*

$$\vartheta(G) := \begin{cases} \infty, & \textit{falls } \eta^{G_x}(x) \notin V(X,\mu) \\ \int\limits_X \eta^{G_x}(x)d\mu(x) = \int\limits_Y \xi^{G_y}(y)d\nu(y)(\blacktriangledown), & \textit{falls } \eta^{G_x}(x) \in V(X,\mu) \end{cases}$$

ein σ-endliches Maß auf $\mathfrak{AC}$. ϑ ist schon durch $\vartheta(G) = \mu(A)\nu(B) \; \forall G \in \mathfrak{AC}$ eindeutig festgelegt.

Beweis.
(SKIZZE:) Zunächst Überprüfen der Axiome. σ-Additivität nach Satz 1.7.2 von Beppo-Levi.
σ-Endlichkeit: $X \times Y = (\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} X_j) \times (\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} Y_j)$ mit jeweils isotonen Mengenfolgen $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$und $\{Y_j\}_{j=1}^{\infty}$ analog zum Beweis von Satz 1.8.2. Einzigkeit nach Hahnschen Fortsetzungssatz 1.3.1. □

Folgerung 1.8.4 (PROM3).
Für $G \in \mathfrak{AC}$ mit $\vartheta(G) < \infty$ gilt:

$$\int\limits_{X\times Y} \chi_G(x,y)d\vartheta(x,y) = \int\limits_{Y}\int\limits_{X} \chi_G(x,y)d\mu(x)d\nu(y) = \int\limits_{X}\int\limits_{Y} \chi_G(x,y)d\nu(y)d\mu(x) \quad = \vartheta(G)$$

$$\begin{matrix} \text{mit } \chi_G^{(y)}(x) \in V(X,\mu) & & y \in Y \\ & \text{für fast alle} & \\ \text{und } \chi_G^{(x)}(y) \in V(Y,\nu) & & x \in X \end{matrix}$$

Folgerung 1.8.5 (PROM4).
Es sei $[X,\mathfrak{A},\mu] = [\mathbb{R}^n, \mathfrak{A}_{\mu_L^n}, \mu_L^n]$ und $[Y,\mathfrak{C},\nu] = [\mathbb{R}^n, \mathfrak{A}_{\mu_L^m}, \mu_L^m]$.
Das Lebesguesche Maß auf dem $\mathbb{R}^{m+n}$: μ_L^{m+n} ist Vervollständigung des Produktmaßes $\vartheta = \mu_L^n \times \mu_L^m$, d.h. $\overline{\vartheta} = \overline{\mu_L^n \times \mu_L^m} = \mu_L^{n+m}$ mit $\mathfrak{A}_{\mu_L^{m+n}}(\mathbb{R}^{n+m}) = \overline{(\mathfrak{A}_{\mu_L}(\mathbb{R}^n) \cdot \mathfrak{A}_{\mu_L}(\mathbb{R}^n))}$.

Beweis. Satz 1.8.3 (PROM2), Maß-Vervollständigungs-Satz 1.3.2 und
$A \times B = (A \times \mathbb{R}^m) \cap (\mathbb{R}^n \times B)$ bei $A \in \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{\mu_L}(\mathbb{R}^n)$ und $B \in \mathfrak{C} = \mathfrak{A}_{\mu_L}(\mathbb{R}^m)$. □

Satz 1.8.6 (Satz von Fubini).
Es seien $[X,\mathfrak{A},\mu]$ und $[Y,\mathfrak{C},\nu]$ Maßräume nach (♦) und $[X \times Y, \mathfrak{AC}, \vartheta]$ sei Produkt-Raum. (μ,ν und auch ϑ σ-endlich). Dann gilt $\forall f \in V(X \times Y, \vartheta)$ mit f messbar und reellwertig, dass:

i) $f^{(y)}(x) \in V(X,\mu)$ *für fast alle* $y \in Y$ *und* $\beta(y) := \int\limits_X f^{(y)}(x)d\mu(x) \in V(Y,\nu)$
sowie $f^{(x)}(y) \in V(Y,\nu)$ *für fast alle* $x \in X$ *und* $\gamma(x) := \int\limits_Y f^{(x)}(y)d\nu(y) \in V(X,\mu)$

ii)
$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)d\vartheta(x,y) = \int\limits_{Y}(\int\limits_{X} f(x,y)d\mu(x))d\nu(y) = \int\limits_{X}(\int\limits_{Y} f(x,y)d\nu(y))d\mu(x)$$

Bemerkung 1.8.4 (BemA PRO2). *Sind komplexwertige Funktionen zu untersuchen, so behandeln wir Real- und Imaginärteil separat.*
Gilt $D(f) = G \subset X \times Y$, $G \neq X \times Y$ mit $G \in \mathfrak{AC}$. Dann gilt der Satz von Fubini analog mit

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \forall x,y \in G \\ 0 & \forall x,y \in G^c \end{cases} \qquad \textit{bzw. mit: } f^*(x,y) = f(x,y)\chi_G(x,y).$$

Beweis. Satz von Fubini, Satz 1.8.6
o.B.d.A. sei f nichtnegativ (sonst f_+ und f_-).
Weil $f \in V(X \times Y, \vartheta)$ sind Integralwerte $\int\limits_{X\times Y} f d\vartheta(x,y) = \infty$ ausgeschlossen, wobei aber $\beta(y)$ und $\gamma(x)$ messbare Funktionen darstellen können. f messbar und nichtnegativ, d.h. nach Satz 1.4.9 *(BMF7)* aus 1.4 existiert zu f eine monoton wachsende Folge $\{t_k(x,y)\}_{k=1}^{\infty}$ von Treppenfunktionen mit $\lim\limits_{k\to\infty} t_k(x,y) = f(x,y)$ $\forall x,y \in X \times Y$, wobei
$t_k(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{N_k} \alpha_j^{(k)} \chi_{G_j^{(k)}}(x,y)$ und $\alpha_j^{(k)} \geq 0, \forall j,k \in \mathbb{N}$.
Weil $f \in V(X \times Y, \vartheta) \Rightarrow \forall k : t_k \in V(X \times Y, \vartheta)$.
Argument: f ist Majorantenfunktion, d.h. bei $\alpha_j^{(k)} = \infty$ gilt: $\vartheta(G_j^{(k)}) = 0$.
Für $\alpha_j^{(k)} = 0$ kann $\vartheta(G_j^{(k)}) = \infty$ erlaubt werden.
Schließlich gilt für $0 < \alpha_j^{(k)} < \infty : \vartheta(G_j^{(k)})$ endlich: $0 < \vartheta(G_j^{(k)}) < \infty$ (♣)

(♣) ist der eigentlich zu behandelnde Fall. Ziehen Sätze 1.8.2 (PROM1) und 1.8.3 (PROM2) lokal für $G_j^{(k)}$ mit $0 < \vartheta(G_j^{(k)}) < \infty$ d.h.: $\int\limits_{G_j^{(k)}} \alpha_j^{(k)} \chi_{G_j^{(k)}}(x,y) d\vartheta(x,y) = \alpha_j^{(k)} \vartheta(G_j^{(k)})$

Das liefert zunächst für jedes t_k:

$$\int\limits_{X\times Y} t_k(x,y)d\vartheta(x,y) \quad = \int\limits_Y (\int\limits_X t_k(x,y)d\mu(x))d\nu(y) \quad = \int\limits_X (\int\limits_Y t_k(x,y)d\nu(y))d\mu(x)$$

Schließlich nutzen wir den Satz 1.7.2 von Beppo-Levi mit

$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)d\vartheta(x,y) \geq \int\limits_{X\times Y} t_k(x,y)d\vartheta(x,y) \ \forall k \in \mathbb{N}$

Bem. 1.7.3 liefert die Messbarkeit, wodurch der Satz bewiesen wird. □

Bemerkung 1.8.5 (PRO3)**.** *Alle Messbarkeits- und Integrierbarkeitskriterien bleiben auch in Produkträumen gültig (anwendbar).*

Folgerung 1.8.7 (PROM5)**.**
Sind $[X,\mathfrak{A},\mu]$ und $[Y,\mathfrak{C},\nu]$ nach (♦) vollständige Maßräume, so gilt der Satz von Fubini auch für $f \in V(X\times Y, \overline{\mu\times\nu}) = V(X\times Y, \overline{\vartheta})$.
Für messbare Funktionen h mit $h = 0$ - $\overline{\vartheta}$ f.ü. erhalten wir: $\int\limits_{X\times Y} (f+h)d\overline{\vartheta} = \int\limits_{X\times Y} fd\overline{\vartheta}$

1.9 Lebesgue-Räume

Schon bekannt:
$V_\infty(X,\mu) = \{f$ messbar, $|||f|||_\infty = \inf\limits_{\substack{N\in\mathfrak{A}\\ \mu(N)=0}} (\sup\limits_{x\in N^c} |f(x)| < \infty\}$ wesentlich beschränkte Funktionen.
$V_1(X,\mu) := V(X,\mu)$ mit ρ_{PS} und vgl. Def. 1.7.1

Definition 1.9.1 („Vektorräume V_p“)**.**
Gegeben sei der Maßraum $[X,\mathfrak{A},\mu]$, $p \in \mathbb{R}$ mit $p \in [1,\infty)$ sowie $E \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(E) \neq 0$.
Wir bezeichnen mit $V_p(E,\mu)$ den linearen Vektorraum der auf E erklärten, komplexwertigen und auf E messbaren Funktionen f mit

$$|||f|||_p := \left(\int\limits_E |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

.

Bemerkung 1.9.1 (An.BemLP1)**.**
Die Axiome des linearen Vektorraums:
$f \in V_p(E,\mu) \Rightarrow \alpha \cdot f \in V_p(E,\mu)$ folgt sofort aus Definition, $\alpha \in \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$). Nur die Summe ist nicht direkt ersichtlich. Dies wird beim Satz 1.9.1 (LP1) gezeigt.

Satz 1.9.1 (Satz (LP1))**.**
Es sei $p \in [1,\infty)$ bel. aber fest. Der Ausdruck $|||\cdot|||_p : V_p(E,\mu) \to [0,\infty)$ genügt allen Axiomen einer Halbnorm, d.h.

i) $|||f|||_p \geq 0$ *und* $|||o_{V_p}|||_p = 0$, $o_{V_p}(x) := 0 \ \forall x \in E$

ii) $|||\alpha f|||_p = |\alpha| |||f|||_p$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$

iii) $|||f+g|||_p \leq |||f|||_p + |||g|||_p$ *(Minkowski-Ungleichung)*

i^*) $|||f|||_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ *f.ü. auf* E.

Lemma 1.9.1 (Youngsche Ungleichung LemLP1)**.**
$\forall \lambda \in (0,1)$ und $\forall \alpha, \beta \in [0,\infty)$ gilt: $\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta \; (Y)$

Beweis. : Bew. Lemma 1.9.1 Übungsaufgabe Serie 9 Sei $p = \lambda$, $q = 1-\lambda \;\Rightarrow\; p+q = 1$

Zu zeigen $\alpha^p \beta^q \leq p\alpha + q\beta (*)$

$t = \frac{\alpha}{\beta}$ und teile $(*)$ durch $\beta \;\Rightarrow\; \alpha^p \underbrace{\beta^{q-1}}_{\beta^{-p}} \leq p\frac{\alpha}{\beta} + q$

Sei nun $f(t) = pt + q - t^p$, alles gezeigt bei $f(t) \geq 0 \; \forall t \geq 0$

$$\left.\begin{array}{rcl} f'(t) & = & p - pt^{p-1} \\ f''(t) = -p(p-1)t^{p-2} & & \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Minimum bei } t = 1$$

$f(1) = p + q - 1 = 0$ und $f(t) \geq f(1) = 0$ □

Lemma 1.9.2 (Höldersche Ungleichung LemLP2)**.**
Sei $p > 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dann nennt man p, q konjugierte Exponenten.
Dann gilt $\forall f \in V_p(E,\mu)$ und $\forall g \in V_q(E,\mu)$: $f \cdot g \in V_1(E,\mu)$ und $|||f \cdot g|||_1 \leq |||f|||_p \cdot |||g|||_q$

Beweis. $|||f|||_p, |||g|||_q \neq 0$ (sonst trivial)
Setzen: $\alpha = (\frac{|f(x)|}{|||f|||_p})^p$, $\beta = (\frac{|g(x)|}{|||g|||_q})^q$, $\lambda = \frac{1}{p}$, $(1-\lambda) = \frac{1}{q}$

$$\underset{(Y)}{\longrightarrow} \alpha^{\frac{1}{p}} \beta^{\frac{1}{q}} = \frac{|f(x)|}{|||f|||_p} \cdot \frac{|g(x)|}{|||g|||_q} \leq \frac{1}{p}(\frac{|f(x)|}{|||f|||_p})^p + \frac{1}{q}(\frac{|g(x)|}{|||g|||_q})^q$$

bzw. (#) $|(f \cdot g)(x)| \leq |||f|||_p \cdot |||g|||_q (\frac{1}{p} \cdot \frac{|f(x)|^p}{|||f|||_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|g(x)|^q}{|||g|||_q^q})$ (#) heißt auch:
$f \cdot g \in V_1(E,\mu)$, denn die rechte Seite von (#) ist μ-integrierbare Majorantenfunktion.
Integration über E mit Maß μ liefert damit: (beachten $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

$|||f \cdot g|||_1 = \int\limits_E |f \cdot g| d\mu(x) \overset{(\#)}{\leq} |||f|||_p \cdot |||g|||_q (\frac{1}{p} \cdot \frac{|||f|||_p^p}{|||f|||_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|||g|||_q^q}{|||q|||_q^q}) = |||f|||_p \cdot |||g|||_q$ □

Folgerung 1.9.2 (Zwischenbetrachtung: Höldersche Ungleichung für Folgenräume:)**.**
$\{\alpha_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{l}_{p,\mathbb{C}}$, $\{\beta_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{l}_{q,\mathbb{C}}$
Hier ist $\{\alpha_j\}_{j=1}^\infty \in \mathbb{l}_{p,\mathbb{C}} \Leftrightarrow \sum\limits_{j=1}^\infty |\alpha_j|^p < \infty$ *bei* $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $\forall j \in \mathbb{N}$
Zeigen Höldersche Ungleichung für Folgenräume
$f(x) := \sum\limits_{j=1}^\infty \alpha_j \chi_{E_j}(x)$, $g(x) := \sum\limits_{j=1}^\infty \beta_j \chi_{E_j}(x)$ *mit* $\mu(E_j) = 1$, $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ *paarweise disjunkt.*
$E = \bigcup\limits_{j=1}^\infty E_j \in \mathfrak{A}$
Die Höldersche Ungleichung für $f(x) \in V_p(E,\mu)$, $g(x) \in V_q(E,\mu)$ liefert:
$\sum\limits_{j=1}^\infty |\alpha_j \cdot \beta_j| \leq (\sum\limits_{j=1}^\infty |\alpha_j|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum\limits_{j=1}^\infty |\beta_j|^q)^{\frac{1}{q}}$
Umschreiben in der Nomenklatur von Funktionsräumen:
$\|\{\alpha_j\beta_j\}_{j=1}^\infty\|_1 \leq \|\{\alpha_j\}_{j=1}^\infty\|_p \|\{\beta_j\}_{j=1}^\infty\|_q$

Bemerkung 1.9.2 (Bem. LP1).
Aus dem Satz 1.7.1(KS1) folgt sofort für isotone Mengenfolgen $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ *mit* $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}$ *und* $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j = E$, *dass* $\forall f \in V_p(E,\mu)$ *gilt:* $\lim\limits_{j\to\infty} |||f|||_{p,E_j} = \lim\limits_{j\to\infty} (\int\limits_{E_j} |f|^p d\mu(x))^{\frac{1}{p}} = |||f|||_{p,E} = |||f|||_p$

Beweis. Satz 1.9.1 (LP1): i), i*) und ii) folgen aus den Eigenschaften des Integrals. zu iii) Minkowski-Ungleichung (und Abgeschlossenheit der Vektorraum-Addition im $V_p(E,\mu)$)
Sei $p = 1$:

Es gilt $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$, d.h. $|f|+|g|$ ist μ-integrierbare Majorante und iii) folgt durch Integration.

Sei $p > 1$:

a) $|f(x)+g(x)|^p$
$\leq 2^p \cdot (\max(|f(x)|,|g(x)|))^p \leq 2^p \cdot (|f(x)|^p + |g(x)|^p)$
$\Rightarrow f+g \in V_p(E,\mu)$
Bemerke zudem: $|f+g|^{p-1} \in V_q(E,\mu)$ denn
$q = \frac{p}{p-1} : (|f+g|^{p-1})^q = |f+g|^p$ (damit Bem. 1.9.1 Addition: $f+g \in V_p(E,\mu)$ $\square$.)

b) Zeige iii)
$|||f+g|||_p^p = \int\limits_E |f+g|^p d\mu(x) \leq \int\limits_E |f+g|^{p-1}(|f|+|g|) d\mu(x)$
$\overset{2\times\text{Hölder}}{\leq} \underbrace{(\int\limits_E (|f+g|^{p-1})^q d\mu(x))^{\frac{1}{q}}}_{|||f+g|||_p^{\frac{p}{q}}} (|||f|||_p + |||g|||_p)$
Nach Multiplikation mit $|||f+g|||_p^{-\frac{p}{q}}$ erhält man:
$|||f+g|||_p^{p(1-\frac{1}{q})} = |||f+g|||_p \leq |||f|||_p + |||g|||_p$

$\square$

Definition 1.9.2 („Nullelement" und „L_p").
Wir bezeichnen mit N_p *die Menge:* $N_p := \{f \in V_p(E,\mu)$ *mit* $f = 0 := o_{V_p}$ *f.ü. auf* $E\}$
und mit $o_{L_p} := N_p/N_p = [o_{V_p}]$ *das* <u>*Nullement des Faktorraumes*</u>*:* $L_p(E,\mu) := V_p(E,\mu)/N_p$.

Bemerkung 1.9.3 (Bem. LP2). *Der Faktorraum* $L_p(E,\mu)$ *ist linearer VR.*
Alle Bezeichnungen oben sind sinnvoll, weil N_p *ein abgeschlossener linearer Teilraum vom* $V_p(E,\mu)$ *ist. D.h.* N_p *ist linearer Vektorraum und jedes Element von* N_p *ist Häufungspunkt von Elementen aus* N_p*. (Häufungspunkte außerhalb von* N_p *existieren nicht.)*

Definition 1.9.3 („$\mathbb{L}_p(E,\mu)$").
Mit $\mathbb{L}_p(E,\mu)$ *bezeichnen wir den normierten Raum:* $\mathbb{L}_p(E,\mu) = (L_p(E,\mu), \|\cdot\|_p)$*, wobei die Norm jeder Äquivalenzklasse* $[f]$ *über* f *als beliebigem Repräsentanten dieser Klasse erklärt ist, d.h.* $\|[f]\|_p := |||f|||_p$*,* $\forall [f] \in L_p(E,\mu)$ *für fixes* $p \in [1,\infty)$*.*
Warnung: $\mathbb{L}_p(E,\mu)$ *ist kein Funktionen-Raum. Er wird aber als solcher behandelt.*

Definition 1.9.4 ($\mathbb{L}_\infty(E,\mu)$).
Es sei $V_\infty(E,\mu)$ der bekannte Raum der wesentlich auf E beschränkten Funktionen.
Wir setzen $N_\infty := \{f \in V_\infty(E,\mu) : f = 0 := o_{V_\infty}$ f.ü. auf $E\}$ und erklären damit:
$o_{L_\infty} := N_\infty / N_\infty = [o_{V_\infty}]$ sowie $L_\infty(E,\mu) = V_\infty(E,\mu)/N_\infty$.
$L_\infty(E,\mu)$ ist der lineare Vektorraum der Äquivalenzklassen der auf E wesentlich beschränkten Funktionen. Der $\mathbb{L}_\infty(E,\mu)$ wird erklärt als der normierte Raum:

$$\mathbb{L}_\infty(E,\mu) = (L_\infty(E,\mu), \|\cdot\|_\infty)$$

mit $\|[f]\|_\infty := \||f|\|_\infty$, $\forall [f] \in L_\infty(E,\mu)$. bzw. in der anderen Schreibweise:
$\|[f]\|_\infty := \operatorname{ess\,sup} |f(x)| := \inf\{a : \mu(E(|f(x)| > a)) = 0$ *bei* $E(|f(x)| > a) \subset E\}$

Bemerkung 1.9.4 (Bem. LP3).
Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mu = \mu_L$, so schreibt man für $\mathbb{L}_p(G,\mu_L) = \mathbb{L}_p(G)$ $\forall p \in [1,\infty]$
bei ∂G Rand von $G : \mathbb{L}_p(\partial G, \mu_L^{\partial G}) = \mathbb{L}_p(\partial G)$ $\forall p \in [1,\infty]$ mit dem Flächenmaß $\mu_L^{\partial G}$.

Satz 1.9.3 (Riesz Fischer LP2).
Die Räume $\mathbb{L}_p(E,\mu)$ sind für $p \in [1,\infty]$ Banachräume.

Beweis. Für $p \in [1,\infty)$:
Konstruktiver Vollständigkeitsbeweis, d.h. konstruieren Grenzelement:
$\{[f_j]\}_{j=1}^\infty = \{f_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{L}_p(E,\mu)$ sei Cauchy-Folge im $\mathbb{L}_p(E,\mu)$,
d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists j_0(\varepsilon)$: $\forall k, j \geq j_0(\varepsilon) : \|f_j - f_k\|_p < \varepsilon (*)$
Aus obiger Cauchy-Folge wählen wir (in Repräsentantenschreibweise) die Teilfolge

$\{f_{j_l}\}_{j=1}^\infty$ mit $\|f_{j_{l+1}} - f_{j_l}\|_p < \frac{1}{2^l} = 2^{-l}$ aus.

Wir erklären nun die monoton wachsende Folge $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty = \{\varphi_k(x) = \sum\limits_{l=1}^{k} |f_{j_{l+1}} - f_{j_l}|\}_{k=1}^\infty$.

Mit der Minkowski-Ungleichung erhalten wir: $\|\varphi_k\|_p < 1$, denn $\int\limits_E |\varphi_k(x)|^p d\mu(x) < 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$.
Weil $\forall k \in \mathbb{N} : |\varphi_k(x)|^p = (\varphi_k(x))^p$ gilt, können wir Bemerkung 1.7.4 (KS3) nutzen :
Die Grenzwerte $\lim\limits_{k\to\infty} (\varphi_k(x))^p = (\varphi(x))^p$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(x) = \varphi(x)$ $(p = 1)$ existieren f.ü. auf E!

Auf der Restmenge (dies ist eine Menge vom Maße Null) setzen wir für die Grenzfkt. $\varphi(x) = 0$.

Nach dem Satz von Beppo-Levi 1.7.2 gilt zunächst $\varphi(x) \in V_p(E,\mu)$.
Damit ist die Funktionenreihe

$$\{f_{j_k}\}_{k=1}^\infty = \{f_{j_1}(x) + \sum_{l=1}^{k-1} (f_{j_{l+1}}(x) - f_{j_l}(x))\}_{k=1}^\infty = f_{j_1}(x) + \sum_{l=1}^{\infty} (f_{j_{l+1}}(x) - f_{j_l}(x))$$

f.ü. auf E absolut konvergent, denn: $|\sum\limits_{l=1}^{\infty} (f_{j_{l+1}} - f_{j_l})| \leq \varphi(x)$
Erklären die Grenzfkt. $f(x) := \lim\limits_{k\to\infty} f_{j_k}(x)$.

Die Funktion f gehört zu $V_p(E,\mu)$, denn vgl. Def. von f: $|f(x)|^p \leq 2^p(|f_{j_1}(x)|^p + |\varphi(x)|^p)$

Zeigen nun: $f = [f]$ ist der Grenzwert von $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ im $\mathbb{L}_p(E,\mu)$.

Nach $(*)$ gilt $\|f_- f_k\|_p$, $\|f_{j_l} - f_{j_m}\|_p < \varepsilon$, $\forall j,k,j_l,j_m \geq j_0(\varepsilon)$.
Das heißt: $\|f_{j_l} - f_{j_m}\|_p^p = \int\limits_E |f_{j_l} - f_{j_m}|^p d\mu(x) < \varepsilon^p$.

Damit erhalten wir mit dem Fatouschen Lemma (Satz 1.7.4): $\|f_{j_l} - f\| \leq \varepsilon^p$
$f = [f]$ ist auch Grenzwert der Ursprungsfolge:

Sei $j_l \geq j_0(\varepsilon)$ dann gilt mit $k \geq j_0(\varepsilon)$:
$\|f - f_k\|_p \leq \|f - f_{j_l}\|_p + \|f_{j_l} - f_k\|_p < 2\varepsilon$. □

Bemerkung 1.9.5 (Bem. LP4)**.**
Als Zusatzresultat kann man hier aus dem Beweis des Satzes ablesen, dass jede Cauchy-Folge aus dem $\mathbb{L}_p(E,\mu)$ eine Teilfolge enthält, die f.ü. auf E gegen das Grenzelement f konvergiert.

Ausblick (Dichtheitsresultat):

G sei Gebiet: $G \subset \mathbb{R}^n$, $G \in \mathfrak{A}_{\mu_L}$ und $p \in [1,\infty)$.
Dichtheitsresultat: Die Menge $C_o^\infty(G)$ ist dicht im $\mathbb{L}_p(G,\mu_L)$.
$C_o^\infty(G) := \{\varphi \in C^\infty(G) : \operatorname{supp}\varphi := \overline{\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \varphi(\underline{x}) \neq 0\}}^{\mathbb{E}^n} \subset G, \operatorname{supp}\varphi - \text{kompakt im } \mathbb{E}^n\}$
($C^\infty(G)$-Funktionen mit kompakten Träger $\operatorname{supp}\varphi$)

Definition 1.9.5 (C(E))**.**
Der lineare VR der auf $E \in \mathfrak{A}_{\mu_L}$ „stetigen“ Funktionen wird Satz 1.3.4 erkärt durch:
$C(E) := \{\varphi_{|E}$ mit $\varphi \in C(G)\}$ bei $E \subset G \in \tau_{\mathbb{E}^n} : \mu_L(G \setminus E) < \varepsilon$ (unabhängig von G und ε.)

Satz 1.9.4 (Satz LP3 Dichtheitssatz)**.**
Es sei $E \in \mathfrak{A}_{\mu_L}$ mit $\mu_L(E) > 0$. Die Menge der stetigen und integrierbaren Funktionen $\tilde{C} := V_p(E,\mu_L) \cap C(E)$ ist dicht im $\mathbb{L}_p(E,\mu_L)$ bei $p \in [1,\infty)$.

Zunächst einige Lemmata:

Lemma 1.9.3 (Lemma (LP3):)**.**
Es sei $F \subset \mathbb{E}^n$ kompakte Menge.
Wir erklären $\rho_F(\underline{x}) := \inf\limits_{\underline{y} \in F} \|\underline{x} - \underline{y}\|_{\mathbb{E}^n}$ als den Abstand eines Punktes $\underline{x} \in \mathbb{E}^n$ von F.
Dann gilt: $\chi_F(\underline{x}) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{1+k\cdot\rho_F(\underline{x})} = \lim\limits_{k\to\infty} (1 + k \cdot \rho_F(\underline{x}))^{-1}\ \forall \underline{x} \in \mathbb{E}^n$ und dies auch $\forall E : \mu_L(E) < \infty$ im Sinne des $\mathbb{L}_p(E,\mu_L)$, also: $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_E |\frac{1}{1+k\cdot\rho_F(x)} - \chi_F(\underline{x})|^p d\mu_L(x) = 0$

Beweis. Zeigen pktw. Konvergenz: $\chi_F(\underline{x}) = \begin{cases} 0 & \underline{x} \in F^c \\ 1 & x \in F \end{cases}$

$\forall \underline{x} \in F$ und $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt (wegen $\rho_F(\underline{x}) = 0$) :

$$w_k(\underline{x}) := \frac{1}{1 + k \cdot \rho_F(\underline{x})} = 1 \qquad : \quad \lim_{k\to\infty} w_k(\underline{x}) = 1$$

$\forall \underline{x} \in F^C$ und $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt (wegen $\rho \overset{\text{Abk.}}{=} \rho_F(\underline{x}) > 0$) :

$$\lim_{k\to\infty} w_k(\underline{x}) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+k\cdot\rho} = 0$$

Zeigen die 2. Aussage: $\mu_L(E) < \infty$. Dann gilt $\forall k \in \mathbb{N}$ und $\forall \underline{x} \in \mathbb{E}^n$:

$0 \leq w_k(\underline{x}) = \frac{1}{1+\rho_F(\underline{x})\cdot k} = \underbrace{\frac{1+\rho_F(\underline{x})\cdot k}{1+\rho_F(\underline{x})\cdot k}}_{=1} - \underbrace{\frac{\rho_F(\underline{x})\cdot k}{1+\rho_F(\underline{x})\cdot k}}_{<1} \leq 1$ also: $|\chi_F(\underline{x}) - w_k(\underline{x})| \leq 1$ $(\circ)$

Dabei ist die Folge $\{|\chi_F(\underline{x}) - w_k(\underline{x})|\}_{k=1}^{\infty}$ monoton fallend mit der über E μ_L-integrierbaren Majorantenfunktion: $1 = 1^p \geq |\chi_F(\underline{x}) - w_k(\underline{x})|^p$ $(\mu_L(E) = \int_E 1^p d\mu_L(\underline{x}) < \infty)$.

Damit gilt $|\chi_F - w_k|^p \in V_p(E, \mu_L)$. Mit Integration über E folgt:

$0 \leq \lim_{k\to\infty} \int_E |\chi_F(\underline{x}) - w_k(\underline{x})|^p \leq \lim_{k\to\infty} \int_E |\chi_F(\underline{x}) - w_k(\underline{x})| d\mu(x)$

Nutzen hier Bem. 1.7.5 (KS4) (mon. fallende Folgen). $\Rightarrow$ Lemma 1.9.3 (LP3) □

Lemma 1.9.4 (Lemma Abschneidefunktion (LP4))**.**
Es seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b < \infty$, dann existiert eine Fkt. $\hat{\Phi} : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$ mit

$$\hat{\Phi}(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \|\underline{x}\|^2_{\mathbb{E}^n} \leq a \\ \in (0,1) & \text{bei } a < \|\underline{x}\|^2_{\mathbb{E}^n} < b \\ 0 & b \leq \|\underline{x}\|^2_{\mathbb{E}^n} \end{cases}$$

Beweis. Wir setzen $\eta(t)$:

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & t \in \mathbb{R}, t \in (a,b)^C \\ \mathrm{e}^{(t-b)^{-1}-(t-a)^{-1}} & t \in (a,b) \end{cases}$$

η ist nicht elementar integrierbar, aber im Sinne von Lebesgue, Riemann und als Regelfunktion. Damit existiert $\int_a^b \eta(t)\,\mathrm{d}t$. Erklären nun :

$\Phi(s) := \frac{\int_s^b \eta(t)\,\mathrm{d}t}{\int_a^b \eta(t)\,\mathrm{d}t}$ $\forall s \in \mathbb{R}$, wobei $\Phi(s) = \begin{cases} 1 & s \leq a \\ 0 & s > b \end{cases}$ sowie $\Phi(s) \in (0,1)$ bei $s \in (a,b)$ gilt.

Wir setzen schließlich: $\hat{\Phi}(\underline{x}) = \Phi(\|\underline{x}\|^2_{\mathbb{E}^n} = s)$ mit gleichen Eigenschaften wie Φ. □

Beweis. (Satz 1.9.4 (Satz LP3)) z.Z.: $\forall f = [f] \in \mathbb{L}_p(E)$ und $\forall \varepsilon > 0$ gilt: $\exists \varphi \in \tilde{C} : \|f - \varphi\|_p < \varepsilon$. $(\tilde{C} := V_p(E,\mu_L) \cap C(E))$

i) Sei $\mu_L(E) < \infty$. Nutzen Satz 1.4.9 (BMF7) und Integraldefinition aus 1.6.2 sowie

   die Einschränkung $f \geq 0$ f.ü. auf E. $\Rightarrow$
   $\exists t(\underline{x}) \in \mathbb{L}_p(E)$, t nichtnegativ mit $t(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \chi_{E_j}(\underline{x}) \leq f(\underline{x})$.
   Nach Def. 1.6.5 $\|f - t\|_p^{(E)} < \frac{\varepsilon}{3}$

Nach Approximationssatz Satz 1.3.4 gilt für die $E_j \in \mathfrak{A}_{\mu_L}$; $\forall j = 1 \dots N$:
$\exists F_j \subset E_j$ mit $\mu_L(E_j \backslash F_j) < \varepsilon_1 =: \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{1+\sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j} (\alpha_j \geq 0)$.
$\forall j \in 1, \dots, N$ existiert nach Lemma 1.9.3 (LP3) eine Funktion

$$w_k^j(\underline{x}) = \frac{1}{1 + \rho_{F_j}(\underline{x}) \cdot k} \text{ mit } \|\chi_{F_j}(\underline{x}) - w_k^j(\underline{x})\|_p^{(E)} < \varepsilon_1 \,.$$

Wir erklären nun $\varphi(\underline{x}) := \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j w_k^j(\underline{x}) \in \tilde{C}$. Richtig aufgeschrieben:
$\|\varphi - f\|_p^{(E)} \leq \| \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j (w_k^j(\underline{x}) - \chi_{F_j}(\underline{x}))\|_p + \| \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j (\chi_{F_j} - \chi_{E_j})\|_p + \|t(\underline{x}) - f(\underline{x})\|_p < \varepsilon$

ii) $\mu_L(E) = \infty$; Erklären die Menge $E_\rho := E \cap \{\underline{x} \in \mathbb{E}^n : \|\underline{x}\|_{\mathbb{E}^n} < \rho\}$ für $\rho < \infty$
Weil : $\mu_L(E_\rho) < \infty$ gilt, ist auf E_ρ Beweis aus i) anwendbar.
Wegen $f = [f] \in \mathbb{L}_p(E)$ existiert zudem zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\rho < \infty$ mit: $\|f\|_p^{(E \backslash E_\rho)} < \frac{\varepsilon}{2}$.
(Konvergenz uneigentlicher Integrale vgl. Bem. 1.9.2 .)
Nach i) existiert auf E_ρ zu $f = f_{|E_\rho}$ eine Funktion $\varphi \in M : \|f - \varphi\|_p^{(E_\rho)} < \frac{\varepsilon}{3}$.
Nutzen nun die Funktion $\hat{\Phi}$ nach Lemma 1.9.4 (LP4) mit

$$\hat{\Phi}(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \|\underline{x}\|^2 \leq \eta^2 \\ \in (0,1) & \eta^2 < \|\underline{x}\|^2 < \rho^2 \\ 0 & \rho^2 \leq \|\underline{x}\|^2 \end{cases} .$$

Wegen $\lim\limits_{\eta^2 \to \rho^2} \|f(\underline{x}) - \hat{\Phi}(\underline{x})\varphi(\underline{x})\|_p^{(E_\rho)}) = \|f - \varphi\|_p^{(E_\rho)} < \frac{\varepsilon}{3}$ erhalten wir:
Es existiert $\eta_0 : \forall \eta : \eta_0 \leq \eta < \rho$ (η fest) gilt: $\|f - \hat{\Phi} \cdot \varphi\|_p^{(E_\rho)} < \frac{\varepsilon}{2}$
Damit erhalten wir mit $\hat{\Phi} \cdot \varphi \in \tilde{C}$:
$\|f - \hat{\Phi} \cdot \varphi\|_p^{(E)} \leq \|f - \hat{\Phi} \cdot \varphi\|_p^{(E_\rho)} + \|f - \hat{\Phi} \cdot \varphi\|_p^{(E \backslash E_\rho)} = \|f - \hat{\Phi} \cdot \varphi\|_p^{(E_\rho)} + \|f\|_p^{(E \backslash E_\rho)} < \varepsilon.$

□

1.10 Der Satz von Radon-Nikodym

Erinneren an 1.Zwischenbeobachtung zu Radon-Nikodym aus Abschnitt 1.6.2 sowie Satz 1.6.9 (IMF 6).

Definition 1.10.1 („Variation von Φ“)**.**
Es seien Φ eine reell- oder komplexwertige σ-additive Mengenfuktion auf dem messbarer Raum $\{X,\mathfrak{A}\}$ und $E\in\mathfrak{A}$. Dann bezeichnen wir die nichtnegative Zahl

$$|\Phi|(E) := \sup_{\mathscr{Z}\in\mathfrak{Z}^*}\sum_{j=1}^{N_{\mathscr{Z}}}|\Phi(E_j)|$$

bei $\mathfrak{Z}^*$ als Gesamtheit der endlichen Zerlegung $\mathscr{Z}$ von E in paarweise disjunkte $E_j\in\mathfrak{A}$, als die Variation von Φ auf E.

Definition 1.10.2 („Beschränkte additive Mengenfunktion“)**.**
Φ sei σ-additive Mengenfunktion auf $\{X,\mathfrak{A}\}$. Wir nennen Φ auf $\mathfrak{A}$ beschränkt, wenn $\exists C: 0<C<\infty$, so dass $\forall E\in\mathfrak{A}: |\Phi|(E)\le C$.

Lemma 1.10.1 (Lemma (RN1))**.**
Sei $[X,\mathfrak{A},\mu]$ Maßraum und $f\in V_1(X,\mu)$, bzw. $([f]\in\mathbb{L}_1(X,\mu))$. Dann gilt für die σ-additive Mengenfunktion $\Phi:\Phi(E):=\int\limits_E f(x)d\mu(x)\ \forall E\in\mathfrak{A}$

$$|\Phi|(E) = \|f\|_{\mathbb{L}_1(E,\mu)} = \int\limits_E |f(x)|d\mu(x)$$

Beweis. Gegeben sei $\mathscr{Z}$ als Zerlegung von E: $\mathscr{Z}=\{E_1,\dots,E_{N_{\mathscr{Z}}}\}\in\mathfrak{Z}^*$ Dann gilt:
$|\Phi|^{\mathscr{Z}}(E) = \sum\limits_{j=1}^{N_{\mathscr{Z}}}|\int\limits_{E_j}f(x)d\mu(x)| \le \sum\limits_{j=1}^{N_{\mathscr{Z}}}\int\limits_{E_j}|f(x)|d\mu(x) = \|f\|_{\mathbb{L}_1(E,\mu)}$
Supremum nach Def. bilden liefert: $|\Phi|(E)\le\|f\|_{\mathbb{L}_1(E,\mu)}\le\|f\|_{\mathbb{L}_1(X,\mu)}=C$,
d.h. Φ ist beschränkt.
Andererseits ist die Funktion f als komplexwertige Funktion darstellbar als:

$$f(x) = |f(x)|\mathrm{e}^{i\cdot\arg(f(x))} \text{ (bei } f \text{ reellwertig, } \arg f(x)\in\{0,\pi\})$$

Bauen Zerlegung $\mathscr{Z}$ aus $\mathfrak{Z}^*: E_0=\{x\in E: f(x)=0\}$ und

für $N\ge 4: E_k:=\{x\in E:(k-1)\frac{2\pi}{N}\le\arg f(x)<k\cdot\frac{2\pi}{N}\}$ mit $\{E_k\}_{k=1}^N\in\mathfrak{Z}^*$.
Hier gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^N|\Phi(E_k)| &= \sum_{k=0}^N|\int\limits_{E_k}f(x)d\mu(x)| \\
&= \sum_{k=1}^N\Big(\int\limits_{E_k}|f(x)|\mathrm{e}^{i\cdot\arg f(x)}d\mu(x)\cdot\int\limits_{E_k}|f(x)|\mathrm{e}^{-i\cdot\arg f(x)}d\mu(x)\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \sum_{k=1}^N\Big(\int\limits_{E_k}\int\limits_{E_k}|f(x)||f(y)|\mathrm{e}^{i\cdot\arg(f(x)-f(y))}d\mu(x)d\mu(y)\Big)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \Big(\int_{E_k}\int_{E_k} |f(x)||f(y)| \cos[\arg f(x) - \arg f(y)] + \underbrace{i \cdot \sin[\arg f(x) - \arg f(y)]}_{=0,\text{denn jeder Summand reellwertig (Betragsfkt.)}} \, d\mu(x) d\mu(y) \Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\geq \overbrace{\sum_{k=1}^{N} \Big(\int_{E_k}\int_{E_k} |f(x)||f(y)| d\mu(x) d\mu(y) \cdot (\cos(\frac{2\pi}{N})\Big)^{\frac{1}{2}}}^{\cos[\arg f(x)-\arg f(y)] \geq \cos(\frac{2\pi}{N}) \text{ auf } E_k}$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \sum_{k=1}^{N} \int_{E_k} |f(x)| d\mu(x) \sqrt{\cos(\tfrac{2\pi}{N})}$$

Nun $N \to \infty$: $(\cos \frac{2\pi}{N})^{\frac{1}{2}} \to 1$. □

Lemma 1.10.2 (Lemma (RN2)).
Ist Φ eine beschränkte, komplexwertige und σ-additive Mengenfunktion auf $\{X, \mathfrak{A}\}$, so gilt dies auch für $|\Phi|$. (d.h. $[X, \mathfrak{A}, |\Phi|]$ ist Maßraum!)

Beweis. Übungsaufgabe Serie 10

Wählen $\mathscr{Z}$ als Zerlegung von $E \in \mathfrak{A}$: $\mathscr{Z} = \{E_1, \ldots, E_{N_{\mathscr{Z}}}\} \in \mathfrak{Z}^*$

Wir zerlegen und numerieren die $\{E_1, \ldots, E_{N_{\mathscr{Z}}}\}$ so, dass

$$\begin{cases} k = 1, \ldots m_1 & \text{bei} \quad \operatorname{Re}\Phi(E_k), \operatorname{Im}\Phi(E_k) \geq 0 \\ k = m_1+1, \ldots m_2 & \text{bei} \quad \operatorname{Re}\Phi(E_k) \geq 0, \operatorname{Im}\Phi(E_k) < 0 \\ k = m_2+1, \ldots m_3 & \text{bei} \quad \operatorname{Re}\Phi(E_k) < 0, \operatorname{Im}\Phi(E_k) \geq 0 \\ k = m_3+1, \ldots N_{\mathscr{Z}} & \text{bei} \quad \operatorname{Re}\Phi(E_k) < 0, \operatorname{Im}\Phi(E_k) < 0 \end{cases}.$$

Setzen $m_0 = 0$, dann ist :

$$\sum_{k=1}^{N_{\mathscr{Z}}} |\Phi(E_k)| = \sum_{j=1}^{4} \sum_{k=m_{j-1}+1}^{m_j} |\Phi(E_k)| \leq 4 \cdot \sup_{A \in \mathfrak{A}} |\Phi|(A)$$

$$\Rightarrow \quad \forall \mathscr{Z} \in \mathfrak{Z}^*(E) \quad \Rightarrow \quad |\Phi|(E) \text{ ist beschränkt !}$$

Es sei nun $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ mit der paarweise disjunkten Folge $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}$.

Wir setzen $\forall j \in \mathbb{N}$ bei Zerlegung $\mathscr{Z}_j = \{E_1^j, \ldots, E_{N_{\mathscr{Z}_j}}^j\} \in \mathfrak{Z}^*(E_j)$, wobei wir „nahe" am Supremum bleiben, d.h: $|\Phi|(E_j) < \sum_{s=1}^{N_{\mathscr{Z}_j}} |\Phi(E_s^j)| + \frac{\varepsilon}{2^j}$

$\Rightarrow \forall l \in \mathbb{N} \quad : \sum_{j=1}^{l} |\Phi|(E_j) < \sum_{j=1}^{l} \sum_{s=1}^{N_{\mathscr{Z}_j}} |\Phi(E_s^j)| + \varepsilon.$

Dabei ist auch: $\mathscr{Z}^l := \bigcup_{j=1}^{l} \mathscr{Z}_j$ eine Zerlegung von $\bigcup_{j=1}^{l} E_j$ mit (vgl. Def. 1.10.1)

$\sum_{j=1}^{l} |\Phi|(E_j) < |\Phi|(\bigcup_{j=1}^{l} E_j) + \varepsilon < |\Phi|(E) + \varepsilon$

Da $l \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |\Phi|(E_j) \leq |\Phi|(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq |\Phi|(E) \qquad (\circ)$.

Andererseits sei $\mathscr{Z}_L = \{E_1^{(L)}, \ldots, E_L^{(L)}\}$ Zerlegung von E mit $|\Phi|(E) = |\Phi|(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j) < \sum\limits_{s=1}^{L} |\Phi|(E_s^{(L)})$.
Weil $\forall\, j \in \mathbb{N}\ \mathscr{Z}_j^{(L)} := \{E_j \cap E_s^{(L)}, s = 1, \ldots, L\}$ eine Zerlegung von E_j ist, gilt nun:
$\sum\limits_{s=1}^{L} \Phi(E_j \cap E_s^{(L)}) \leq |\Phi|(E_j)$. Damit erhalten wir mit $\varepsilon > 0$ beliebig:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\Phi|(E_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{L} |\Phi(E_j \cap E_s^{(L)})| \overset{\text{G-U-Satz}}{=} \sum_{s=1}^{L} \sum_{j=1}^{\infty} |\Phi(E_j \cap E_s^{(L)})| \geq \sum_{s=1}^{L} |\Phi(E_s^{(L)})| > |\Phi|(E) - \varepsilon,$$

(G-U-Satz: Großer Umordnungssatz) Da ε beliegig ist mit $(\circ)$ alles gezeigt. □

Satz 1.10.1 (Jordanscher Zerlegungssatz).
Jede beschränkte, komplexwertige und σ-additive Mengenfunktion auf $\{X, \mathfrak{A}\}$ lässt sich in der Gestalt: $\Phi = \Omega_1 - \Omega_2 + i(\Theta_1 - \Theta_2)$ mit auf $\mathfrak{A}$ beschränkten Maßen (σ-Inhalten) darstellen.

Beweis. $\Phi = \mathrm{Re}(\Phi) + i\,\mathrm{Im}(\Phi)$.
Dabei sind $\mathrm{Re}(\Phi), \mathrm{Im}(\Phi)$ wieder beschränkte σ-additive Mengenfunktionen.

Weiterhin gilt: $\begin{array}{l} |\Phi|(E) \pm (\mathrm{Re}(\Phi))(E) \geq 0 \\ |\Phi|(E) \pm (\mathrm{Im}(\Phi))(E) \geq 0 \end{array} \quad \forall E \in \mathfrak{A}.$ Umschreiben liefert:

$$\begin{aligned} \Phi(E) = \quad & \tfrac{1}{2}(|\Phi|(E) + (\mathrm{Re}(\Phi))(E)) - \tfrac{1}{2}(|\Phi|(E) - (\mathrm{Re}(\Phi))(E)) \\ & + i(\tfrac{1}{2}(|\Phi|(E) + (\mathrm{Im}(\Phi))(E)) - \tfrac{1}{2}(|\Phi|(E) - (\mathrm{Im}(\Phi))(E))) \end{aligned}.$$

Andererseits kann man sofort mit

$$\begin{array}{ll} \Omega_1 = \dfrac{|\Phi| + \mathrm{Re}(\Phi)}{2} & \Omega_2 = \dfrac{|\Phi| - \mathrm{Re}(\Phi)}{2} \\ \Theta_1 = \dfrac{|\Phi| + \mathrm{Im}(\Phi)}{2} & \Theta_2 = \dfrac{|\Phi| - \mathrm{Im}(\Phi)}{2} \end{array}$$

arbeiten. □

Erinnerung an Def. der absoluten Stetigkeit 1.6.6 , nun heißt die additive Mengenfunktion Φ. Die absolute Stetigkeit von Φ kann auch über die Variation formuliert werden, d.h.
$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon) : |\Phi|(E) < \varepsilon \quad \forall E \in \mathfrak{A} : \mu(E) < \delta(\varepsilon)$

Bemerkung 1.10.1 ((RN1)).
Äquivalent zur Definition der absoluten Stetigkeit von Φ bzgl. μ ist:
Aus $E \in \mathfrak{A} : \mu(E) = 0 \Rightarrow \Phi(E) = 0 \qquad (*)$

Beweis. i.) $(*)$ gilt weil: $|\Phi|(E) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ bei $\mu(E) = 0$

ii.) $(*)$ sei vorgegeben. Annahme:

zu $\varepsilon > 0$ existiert eine Folge $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathfrak{A}$ mit: $\mu(E_j) < \frac{1}{2^j}$ und $|\Phi|(E_j) \geq \varepsilon \quad \forall j \in \mathbb{N}$.
Dann gilt für die Menge:
$E = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=j}^{\infty} E_k : \mu(E) = \lim\limits_{j\to\infty} \mu(\bigcup\limits_{k=j}^{\infty} E_k) \leq \lim\limits_{j\to\infty} \sum\limits_{k=j}^{\infty} \mu(E_k) \leq \lim\limits_{j\to\infty} \frac{1}{2^j} = 0$
Aber $|\Phi|(E) = \lim\limits_{j\to\infty} |\Phi|(\bigcup\limits_{k=j}^{\infty} E_k) \geq \varepsilon > 0$.
Damit WIDERSPRUCH zu $(*)$ d.h. die Definitionen sind äquivalent.

□

Bemerkung 1.10.2 ((RN2)). *(vgl. auch Satz 1.6.9 und Lemma 1.10.1)*
Ist $f \in V_1(X,\mu)$, dann ist $\Phi(E) := \int_E f(x)d\mu(x)$ absolut stetig bzgl. μ.

Beweis. $|\Phi|(E) < \varepsilon$, $f \in \mathbb{L}_1(X,\mu)$, d.h. f ist wesentlich beschränkt auf E:
$|f| \leq c_1$ f.ü. in E bei Wahl: $\mu(E) < \frac{\varepsilon}{c} \Rightarrow |\Phi|(E) = \int_E |f| d\mu(x) \leq c_1 \cdot \frac{\varepsilon}{c}$, (wähle $c > c_1$). □

Lemma 1.10.3 (Lemma (RN3)).
Es sei $[X,\mathfrak{A},\mu]$ Maßraum, $\mu(X) < \infty$ und $[f] \in \mathbb{L}_1(X,\mu)$. Ist K abgeschlossen im $\mathbb{E}^1_{\mathbb{C}}$ und gilt $\forall E \in \mathfrak{A} : \mu(E) > 0 : \frac{1}{\mu(E)} \int_E f(x)d\mu(x) \in K$ $(\circ)$, dann gilt $f(x) \in K$ f.ü. auf X.

Beweis. Sei $\overline{B} \subset K^C = \mathbb{C}\backslash K$ bei $\overline{K}(\alpha,\rho) = \overline{B}(\alpha,\rho)$ ein abgeschlossener Kreis in $\mathbb{C} \cong \mathbb{E}^1_{\mathbb{C}}$ mit Radius $\rho > 0$ und Mittelpunkt $\alpha \in \mathbb{C}$:
$\overline{B}(\alpha,\rho) := \{x \in \mathbb{E}^1_{\mathbb{C}} : x = \alpha + \rho_1 e^{i\varphi}, \rho_1 \in [0,\rho], \varphi \in [0,2\pi)\}$. Erklären $E_{\overline{B}} := \{x \in X : f(x) \in \overline{B}\}$.
Annahme: Es sei $\mu(E_{\overline{B}}) > 0$, dann folgt:

$$\left|\frac{1}{\mu(E_{\overline{B}})} \int_{E_{\overline{B}}} f(x)d\mu(x) - \alpha\frac{\mu(E_{\overline{B}})}{\mu(E_{\overline{B}})}\right| = \frac{1}{\mu(E_{\overline{B}})}\left|\int_{E_{\overline{B}}} (f(x)-\alpha)d\mu(x)\right| \leq \frac{1}{\mu(E_{\overline{B}})} \int_{E_{\overline{B}}} \underbrace{|f-\alpha|}_{\leq\rho} d\mu(x) \leq \rho \cdot \underbrace{\frac{\mu(E_{\overline{B}})}{\mu(E_{\overline{B}})}}_{=1}$$

WIDERSPRUCH zu $(\circ)$, d.h. $\mu(E_{\overline{B}}) = 0$ Rest:
K^C kann durch abzählbar viele $\overline{B}_j$ nach oben überdeckt werden $\Rightarrow \mu(K^C) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_{\overline{B}_j}) = 0$. □

HILFE AUS DER FUNKTIONALANALYSIS:

Es sei $\mathbb{B}$ ein Banachraum über dem Körper $\mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition 1.10.3 (lineares Funktional).
Es sei $g : D(g) := \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{E}^1_{\mathbb{K}}$ wohldefiniert. Wir nennen g ein lineares Funktional auf $\mathbb{B}$, wenn $\forall b_1, b_2 \in \mathbb{B}$ und $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt,
dass $g(\alpha b_1 + \beta b_2) = \alpha g(b_1) + \beta g(b_2)$.

Definition 1.10.4 (beschränktes lineares Funktional).
Es sei g lineares Funktional. Wir nennen g ein beschränktes lineares Funktional auf $\mathbb{B}$, wenn eine Konstante $c : 0 < c < \infty$ existiert, so dass $\forall b \in \mathbb{B}$
$|g(b)| = ||g(b)||_{\mathbb{E}^1_{\mathbb{K}}} \leq c||b||_{\mathbb{B}}$ gilt.

Definition 1.10.5 (Dualraum).
Den linearen normierten Vektorraum aller auf $\mathbb{B}$ beschränkten linearen Funktionale bezeichnen wir mit $\mathscr{L}(\mathbb{B},\mathbb{E}^1_{\mathbb{K}})$ oder $\mathbb{B}'$ und nennen ihn den zu $\mathbb{B}$ dualen Raum oder Dualraum von $\mathbb{B}$.

Bemerkung 1.10.3 (FA1:). *Für das Bild eines Elementes $b \in \mathbb{B}$ unter $g \in \mathbb{B}'$ schreibt man auch $g(b) = < b, g >_{\mathbb{B},\mathbb{B}'}$ im Sinne der Wirkung der sogenannten Dualitätsbeziehung: $< .,. >_{\mathbb{B},\mathbb{B}'}$. $\mathbb{B}'$ ist sogar ein Banachraum, weil der Bildraum $\mathbb{E}^1_{\mathbb{K}}$ ein Banachraum ist.*

Bemerkung 1.10.4 (FA2:). *Ist $\mathbb{B} = \mathbb{L}_p(E,\mu)$ bei $1 < p < \infty$, so kann man den Dualraum $\mathbb{B}'$ im Sinne eines isometrischen Isomorphismus mit dem Raum $\mathbb{L}_q(E,\mu)$ identifizieren. Dabei sind p und q konjugierte Exponenten. Der Beweis dafür ist besonders einfach, wenn $\mathbb{H} = \mathbb{B}$ ein Hilbertraum ist:*

Satz 1.10.2 (Rieszscher Darstellungssatz). *Es sei $\mathbb{H}$ ein separabler Hilbertraum und sei $g \in \mathscr{L}(\mathbb{H}, \mathbb{E}^1_{\mathbb{C}})$ gegeben. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Element $\widetilde{g} \in \mathbb{H}$, so dass für alle $f \in \mathbb{H}$*

$$< f, g >_{\mathbb{H},\mathbb{H}'} = g(f) = (f, \widetilde{g})_{\mathbb{H}},$$

mit $\|\widetilde{g}\|_{\mathbb{H}} = \|g\|_{\mathscr{L}(\mathbb{H},\mathbb{E}^1_{\mathbb{C}})}$.
Speziell für $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2(E,\mu)$ heißt das

$$g(f) = \int_E f(x)\overline{\widetilde{g}(x)}\mathrm{d}\mu(x) = (f, \widetilde{g})_{\mathbb{L}_2(E,\mu)}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Angenommen es existieren $\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2 \in \mathbb{H}$ mit $g(f) = (f, \widetilde{g}_1)_{\mathbb{H}} = (f, \widetilde{g}_2)_{\mathbb{H}} \quad \forall f \in \mathbb{H}$, dann gilt $(f, \widetilde{g}_1 - \widetilde{g}_2)_{\mathbb{H}} = 0 \quad \forall f \in \mathbb{H}$. Insbesondere erhalten wir $(\widetilde{g}_1 - \widetilde{g}_2, \widetilde{g}_1 - \widetilde{g}_1)_{\mathbb{H}} = \|\widetilde{g}_1 - \widetilde{g}_2\|^2_{\mathbb{H}} = 0$, also $\widetilde{g}_1 = \widetilde{g}_2$.
Wegen der Beschränktheit von g ist

$$0 \leq n_g = \sup_{\|f\|_{\mathbb{H}}=1} |g(f)| < \infty$$

und es gilt für alle $f \in \mathbb{H}$

$$|g(f)| = \|f\|_{\mathbb{H}} \left| g\left(\frac{f}{\|f\|_{\mathbb{H}}}\right) \right| \leq n_g \|f\|. \tag{1.1}$$

Ist $n_g = 0$, also $g(f) = 0 \quad \forall f \in \mathbb{H}$, dann gilt mit $\widetilde{g} = 0$ die Behauptung des Satzes. Es sei nun $n_g > 0$. Wir zeigen jetzt, dass es ein Element $\widetilde{g}_1 \in \mathbb{H}$ gibt mit $\|\widetilde{g}_1\|_{\mathbb{H}} = 1$ und $g(\widetilde{g}_1) = n_g$. Wegen der Definition von n_g existiert ein Folge $\{\widetilde{g}_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $\|\widetilde{g}_n\|_{\mathbb{H}} = 1$ und $\lim_{n\to\infty} |g(\widetilde{g}_n)| = n_g$.
Wir können jetzt annehmen, dass $g(\widetilde{g}_n)$ reell ist, mit $0 < g(\widetilde{g}_n) < n_g$.(Ansonsten multiplizieren wir $\widetilde{g}_n$ mit geeigneten komplexen Zahlen.) Für $\varepsilon \in (0,1)$ gilt dann

$$g(\widetilde{g}_n) > n_g\left(1 - \frac{\varepsilon}{8}\right), \quad \text{also } g(\widetilde{g}_n + \widetilde{g}_m) > n_g\left(2 - \frac{\varepsilon}{4}\right),$$

wobei $n, m \in \mathbb{N}$ hinreichend groß sind. Dies liefert uns wegen der Parallelogramm-Identität: $\|f+h\|^2_{\mathbb{H}} + \|f-h\|^2_{\mathbb{H}} = 2(\|f\|^2_{\mathbb{H}} + \|h\|^2_{\mathbb{H}})$, und der Ungleichung (1.1)

$$\begin{aligned} \|\widetilde{g}_n - \widetilde{g}_m\|^2_{\mathbb{H}} &= 2\|\widetilde{g}_n\|^2_{\mathbb{H}} + 2\|\widetilde{g}_m\|^2_{\mathbb{H}} - \|\widetilde{g}_n + \widetilde{g}_m\|^2_{\mathbb{H}} \\ &\leq 4 - \frac{1}{n_g^2}\left(g(\widetilde{g}_n + \widetilde{g}_m)\right)^2 \leq 4 - \left(2 - \frac{\varepsilon}{4}\right)^2 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit ist $\{\widetilde{g}_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{H}$. Für $\widetilde{g}_1 = \lim_{n\to\infty} \widetilde{g}_n$ gilt dann $\|\widetilde{g}_1\|_{\mathbb{H}} = \lim_{n\to\infty} \|\widetilde{g}_n\|_{\mathbb{H}} = 1$ und $g(\widetilde{g}_1) = lim_{n\to\infty} g(\widetilde{g}_n) = n_g$. Ziel ist es jetzt zu zeigen, dass für $f \in \mathbb{H}$ und $g(f) = 0$ gilt $(f, \widetilde{g}_1)_{\mathbb{H}} = 0$. Wir nehmen o.B.d.A. an $\|f\|_{\mathbb{H}} = 1$.
Aus

$$n_g \|\widetilde{g}_1 + \alpha f\|_{\mathbb{H}} \geq |g(\widetilde{g}_1 + \alpha f)| = |g(\widetilde{g}_1)| = n_g$$

folgt dann

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{g}_1+\alpha f\|_{\mathbb{H}}^2 &= (\widetilde{g}_1+\alpha f,\widetilde{g}_1+\alpha f)_{\mathbb{H}} \\
&= \|\widetilde{g}_1\|_{\mathbb{H}}^2+\alpha(f,\widetilde{g}_1)_{\mathbb{H}}+\overline{\alpha}(\widetilde{g}_1,f)_{\mathbb{H}}+|\alpha|^2\|f\|^2 \\
&= 1+\alpha(f,\widetilde{g}_1)_{\mathbb{H}}+\overline{\alpha}(\widetilde{g}_1,f)_{\mathbb{H}}+|\alpha|^2 \geq 1,
\end{aligned}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{C}$ beliebig ist. Dies ergibt für $\alpha = -\overline{(f,\widetilde{g}_1)_{\mathbb{H}}} = -(\widetilde{g}_1,f)_{\mathbb{H}}$, dass $-|(\widetilde{g}_1,f)_{\mathbb{H}}|^2 \geq 0$ ist, d.h. $(\widetilde{g}_1,f)_{\mathbb{H}} = 0$.
Sei $f \in \mathbb{H}$ und $h = f - \frac{g(f)}{n_g}\widetilde{g}_1$, dann gilt

$$f = \frac{g(f)}{n_g}\widetilde{g}_1 + h$$

und

$$g(h) = g(f) - \frac{g(f)}{n_g}g(\widetilde{g}_1) = 0,$$

folglich ist $(h,\widetilde{g}_1)_{\mathbb{H}} = 0$. Es gilt also

$$\begin{aligned}
(f,n_g\widetilde{g}_1)_{\mathbb{H}} &= \left(\frac{g(f)}{n_g}\widetilde{g}_1+h,n_g\widetilde{g}_1\right)_{\mathbb{H}} \\
&= g(f)(\widetilde{g}_1,\widetilde{g}_1)_{\mathbb{H}}+n_g(h,\widetilde{g}_1)_{\mathbb{H}} = g(f)\|\widetilde{g}_1\|_{\mathbb{H}}^2 = g(f).
\end{aligned}$$

Das bedeutet, das Element $\widetilde{g} = n_g\widetilde{g}_1$ liefert die gesuchte Darstellung.
Es bleibt noch die Gleichheit der Normen zu zeigen, wobei die Norm auf dem $\mathscr{L}(\mathbb{H},\mathbb{E}^1_{\mathbb{C}})$ gegeben ist durch

$$\|g\| = \sup_{\|f\|_{\mathbb{H}}\leq 1} |g(f)|.$$

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung liefert uns dann

$$|g(f)| = |(f,\widetilde{g})_{\mathbb{H}}| \leq \|f\|_{\mathbb{H}}\|\widetilde{g}\|_{\mathbb{H}},$$

woraus für die Norm von g folgt: $\|g\| = \sup_{\|f\|_{\mathbb{H}}\leq 1}|g(f)| \leq \|\widetilde{g}\|_{\mathbb{H}}$. Es sei jetzt ohne Einschränkung $\widetilde{g} \neq 0$. Dann erhalten wir

$$\|g\| = \left|g\left(\frac{\widetilde{g}}{\|\widetilde{g}\|_{\mathbb{H}}}\right)\right| = \left|\left(\frac{\widetilde{g}}{\|\widetilde{g}\|_{\mathbb{H}}},\widetilde{g}\right)\right| = \|\widetilde{g}\|_{\mathbb{H}},$$

also $\|g\| = \|\widetilde{g}\|_{\mathbb{H}}$. □

Satz 1.10.3 (Satz von Radon-Nikodym RN)**).**
Es sei $[X,\mathfrak{A},\mu]$ Maßraum, μ σ-endlich, Φ mit $D(\Phi) = \mathfrak{A}$ sei eine beschränkte, σ-additive, bzgl. μ absolut stetige Mengenfunktion. Dann gibt es genau ein $[h] \in \mathbb{L}_1(X,\mu)$ mit
$\Phi(E) = \int\limits_E \tilde{h}(x)d\mu(x) \quad \forall E \in \mathfrak{A}$ *bei* $\tilde{h} \in [h]$.
$h = [h]$ *nennt man Radon-Nikodym Ableitung von Φ nach μ und schreibt* $h = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\mu}$.

Beweis. i) Eindeutigkeit: Annahme: $\exists[h],[h_1]$ mit $[h]\neq[h_1]$ sowie

$$\Phi(E)=\int\limits_E h(x)d\mu(x)=\int\limits_E h_1(x)d\mu(x)\qquad\forall E\in\mathfrak{A}$$

$\Rightarrow\forall E:0<\mu(E)<\infty:\frac{1}{\mu(E)}\int\limits_E(h-h_1)d\mu(x)=0$, da μ σ-endlich
$\Rightarrow^{\text{Lemma1.10.3}}$ $h=h_1$ f.ü. in X, also WIDERSPRUCH zu $[h_1]\neq[h]$

ii) Existenz: Zunächst $\mu(E)<\infty$ und Φ beschränkt. Hier zudem $\Phi=\mu_1$ beschränktes Maß. Wir erklären neues Maß auf $\{X,\mathfrak{A}\}$:

$$\nu:=\mu+\mu_1$$

Offenbar gilt:

$$\mathbb{L}_p(X,\mu)\supseteq\mathbb{L}_p(X,\nu)$$
$$\mathbb{L}_p(X,\mu_1)\supseteq\mathbb{L}_p(X,\nu)$$

sowie:

$$\int\limits_E f(x)d\nu(x)=\int\limits_E f(x)d\mu(x)+\int\limits_E f(x)d\mu_1(x)\qquad\forall f\in\mathbb{L}_1(X,\nu),\forall E\in\mathfrak{A}$$

Bei $p=2$ also $f\in\mathbb{L}_2(X,\nu)$ gilt hier die Höldersche Ungleichung als Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$|\int\limits_X f(x)d\mu_1(x)|\leq\int\limits_X|f(x)|d\mu_1(x)\leq\int\limits_X|f(x)|d\nu(x)$$

$$\leq(\nu(x))^{\frac{1}{2}}(\int\limits_X|f(x)|^2d\nu(x))^{\frac{1}{2}}=\underbrace{(\nu(X))^{\frac{1}{2}}}_{<\infty}\|f\|_{\mathbb{L}_2(X,\nu)}\quad(*)$$

Das durch

$$g(f(x)):=\int\limits_X f(x)d\mu_1(x)\qquad\forall f\in\mathbb{H}=\mathbb{L}_2(X,\nu)$$

erklärte lineare Funktional g ist mit $(*)$ beschränkt.
Damit liefert der Rieszsche Darstellungssatz: $\exists[g_1]\in\mathbb{L}_2(X,\nu)$, so dass

$$g(f(x))=\int\limits_X f(x)d\mu_1(x)=\int\limits_X f(x)\overline{g_1(x)}d\nu(x)\qquad\forall f\in\mathbb{L}_2(X,\nu)\qquad(\circ).$$

Speziell erhalten wir $\forall E\in\mathfrak{A}$ mit $\nu(E)=\mu(E)+\mu_1(E)>0$ bei $f:=\chi_E\in\mathbb{L}_2(X,\nu):$

$$\frac{1}{\nu(E)}\int\limits_X\chi_E(x)d\mu_1(x)=\frac{\mu_1(E)}{\nu(E)}\overset{(\circ)}{=}\frac{1}{\nu(E)}\int\limits_X\chi_E(x)\overline{g_1(x)}d\nu(x)=\frac{1}{\nu(E)}\int\limits_E\overline{g_1(x)}d\nu(x)$$

Weil $0\leq\frac{\mu_1(E)}{\nu(E)}\leq1$ gilt, ist g_1 offensichtlich reellwertig (vgl. $(\circ)$, Lemma 1.10.3):
$0\leq g_1(x)\leq1$ f.ü. auf X. Darüber hinaus kann man wegen:

$$\int\limits_X\chi_{E(g_1=1)}(x)d\mu_1(x)=\mu_1(E(g_1=1))\overset{(\circ)}{=}\int\limits_{E(g_1=1)}g_1(x)d\nu(x)=(\mu_1+\mu)(E(g_1=1))=\nu(E(g_1=1))$$

$\Rightarrow \mu(E(g_1=1))=0 \overset{\text{abs.Stet.}}{\Rightarrow} \mu_1(E(g_1=1))=0$ also $\nu(E(g_1=1))=0$ sichern, dass sogar $0 \leq g_1(x) < 1$ f.ü. auf X.

Aus $(\circ): \int\limits_X f(x)(1-g_1(x))d\mu_1(x) = \underbrace{\int\limits_X f(x)d\mu_1(x) - \int\limits_X f(x)g_1(x)d\nu(x)}_{(\circ)=0} + \int\limits_X f(x)g_1(x)d\mu(x)$

folgt $\quad \int\limits_X f(x)(1-g_1(x))d\mu_1(x) = \int\limits_X f(x)g_1(x)d\mu(x)\,. \quad \binom{\#}{\#}$

Erklären Funktionsfolge:

$$f_N(x) := \sum_{k=0}^{N} (g_1(x))^k \chi_E(x), \quad (g_1(x))^0 := 1, \quad E \in \mathfrak{A}$$

Offensichtlich gilt : $f_N(x) \in \mathbb{L}_2(E,\nu)$.

Damit gilt

$$\int\limits_X f_N(x)(1-g_1(x))d\mu_1(x) = \int\limits_E (1-(g_1(x))^{N+1})d\mu_1(x) \overset{\binom{\#}{\#}}{=} \int\limits_E f_N(x)g_1(x)d\mu(x)$$

Die Folge $\{f_N(x)g_1(x)\}_{N=1}^{\infty}$ ist ν-f.ü. auf X monoton wachsend und $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\int\limits_X f_N(x)g_1(x)d\mu(x) \leq \int\limits_E (1-\underbrace{(g_1(x))^{N+1}}_{<1})d\mu_1(x) \leq \mu_1(E) < \infty$$

Damit sind die Vorraussetzungen des Satzes 1.7.2von Beppo-Levi erfüllt, d.h.

$\exists \lim\limits_{N\to\infty} f_N(x)g_1(x) =: h(x) < \infty$ f.ü. auf X und $h \in [h] \in \mathbb{L}_1(X,\mu)$ sowie

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_X f_N(x)g_1(x)d\mu(x) = \int\limits_X h(x)d\mu(x) \overset{\text{vgl.Def.}}{=} \int\limits_E h(x)d\mu(x) = \lim_{N\to\infty} \int\limits_E 1-(g_1(x))^{N+1}d\mu_1(x)$$

$= \mu_1(E)\,.$

iii) Sei nun μ σ-endlich und μ_1 beschränktes Maß.
Zerlegen X wieder in paarweise disjunkte $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$ mit $\mu(X_j) < \infty \forall j \in \mathbb{N}$ und $X = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} X_j$.
Wenden auf X_j fest ii) an und erhalten
$\Rightarrow h_j \in \mathbb{L}_1(X_j,\mu)$ und $\forall E \in \mathfrak{A} : \mu_1(E \cap X_j) = \int\limits_{E\cap X_j} h_j(x)d\mu(x)$.
Wir setzen schließlich:

$$h(x) := h_j(x) \quad \forall x \in X_j, \quad \forall j = 1,2,\ldots \Rightarrow D(h) = X$$

Das liefert mit Konvergenz-Satz 1.7.1:

$$\int\limits_E h(x)d\mu(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{E\cap X_j} h_j(x)d\mu(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_1(E\cap X_j) = \mu_1(E)$$

iv) Jordanscher Zerlegungssatz 1.10.1 anwenden (4 mal iii))

□

Bemerkung 1.10.5 ((RN3)). *Sei h nichtnegativ und $[h] \in \mathbb{L}_1(X,\mu)$. Für das mit h erklärte Maß*

$$\mu_1(E) := \int\limits_E h(x)d\mu(x) \qquad \forall E \in \mathfrak{A}$$

gilt dann für alle μ-messbaren Funktionen f mit $[f] \in \mathbb{L}_1(X,\mu_1)$ die folgende Substitutionsformel

$$(S) \qquad g(f(x)) = \int\limits_X f(x)d\mu_1(x) = \int\limits_X f(x)h(x)d\mu(x) \Rightarrow [f\cdot h] \in \mathbb{L}_1(X,\mu)$$

Definition 1.10.6 („Maßzerlegung“).
ρ,η seien reellwertige, σ-additive und σ-endliche Mengenfunktion (oder Maße) auf $\{X,\mathfrak{A}\}$. Existiert eine Menge $E \in \mathfrak{A} : \rho(E) = 0$ und $\eta(E^c) = 0$, dann sagen wir $\underline{\rho,\eta \text{ zerlegen } X}$ bzw. zerlegen $\{X,\mathfrak{A}\}$. Schreibweise $\rho \perp \eta$.

Satz 1.10.4 (Lebesguescher Zerlegungssatz).
η,μ seien Maße auf $\{X,\mathfrak{A}\}$. Dann existieren zwei Maße η_1 und η_2, so dass $\eta = \eta_1 + \eta_2$, η_1 absolut stetig bzgl. μ und $\eta_2 \perp \mu$

Beweis. Halmos (Measure Theory) S.134 □

Bemerkung 1.10.6 ((LZ1)). *Der Lebesguesche Zerlegungssatz hat eine große Bedeutung in allgemeinen topologischen Räumen mit der direkten Anwendung bei der Einteilung von Maßen in reguläre (Bsp. L-Maß) und singuläre (Bsp. Dirac-Maß) Maße.*

2 Integrationstheorie und Integralsätze im $\mathbb{E}^n$

2.1 Sukzessive Integration und Substitution

Definition 2.1.1 („Inhalt“ und „Nullmenge“).
$\forall E \in \mathfrak{A}_{\mu_L}(\mathbb{R}^n)$ sei $|E| := \mu_L(E)$ der $\underline{\text{Inhalt}}$ von E und $\forall A \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ setzen wir $|A|^* := \mu_L^*(A)$, wobei $\mu_L^*(A)$ das bekannte Lebesguesche äußere Maß darstellt.
$A \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ nennen wir $\underline{\text{Nullmenge}}$, wenn $|A|^* = \mu_L^*(A) = 0$ gilt.

Bemerkung 2.1.1 (SI1:). *Bei $|A|^* = 0 \Rightarrow A \in \mathfrak{A}_{\mu_L}(\mathbb{R}^n)$ d.h. $|A|^* = |A| = 0$*

Benutzen nun den Satz von Fubini 1.8.6 und Folgerung 1.8.5 aus Abschnitt 1.8 und aus Abschnitt 1.10 den Satz von Radon-Nikodym 1.10.3 und Subsitutionsformel nach Bemerkung 1.10.5, Abbildungssatz 1.2.6 und Maßübertragungssatz 1.4.2.

Bemerkung 2.1.2 (SI2:). *Ist $f \in \mathbb{L}_1(G)$, $G \neq \emptyset$ und $G \in \mathfrak{A}_{\mu_L}$, so gilt mit*

$\underline{x}^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} \in \mathbb{E}^k$ *und* $\underline{x}^\# = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_{k+m} \end{bmatrix} \in \mathbb{E}^m$, *sowie $n = k+m$ und* $\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}^* \\ \underline{x}^\# \end{bmatrix}$ *; $d^*\underline{x} := \prod_{j=1}^n dx_j$:*

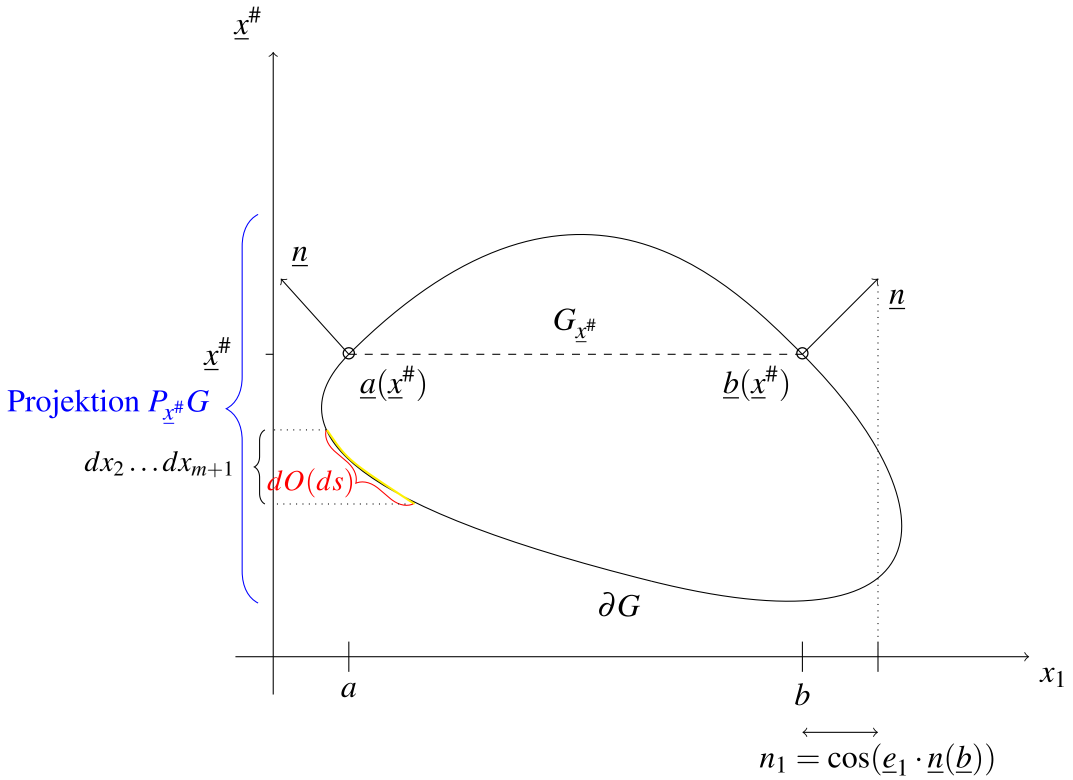
$$\int\limits_G f(\underline{x})d^*\underline{x} = \int\limits_G f(\underline{x})d\mu(\underline{x}) = \int\limits_{P_{\underline{x}^*}G} \Big(\int\limits_{G_{\underline{x}^*}} f(\underline{x}^*,\underline{x}^\#)d^*\underline{x}^\# \Big) d^*\underline{x}^* = \int\limits_{P_{\underline{x}^\#}G} \Big(\int\limits_{G_{\underline{x}^\#}} f(\underline{x}^*,\underline{x}^\#)d^*\underline{x}^* \Big) d^*\underline{x}^\#$$

mit $G_{\underline{x}^*}, G_{\underline{x}^\#}$ *analog* G_y *aus Abschnitt 1.8 und den Projektionen von G auf* $\mathbb{E}^k$ *bzw.* $\mathbb{E}^m$

$$P_{\underline{x}^*}G := \{\underline{x}^* \in \mathbb{E}^k : \exists \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}^* \\ \underline{x}^\# \end{bmatrix} \in G\} \quad ; \quad P_{\underline{x}^\#}G := \{\underline{x}^\# \in \mathbb{E}^m : \exists \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}^* \\ \underline{x}^\# \end{bmatrix} \in G\} \ .$$

bei $f(\underline{x})$ *wieder betrachtet als* $f(\underline{x}) = \begin{cases} f(\underline{x}) & \underline{x} \in G \\ 0 & \underline{x} \notin G \end{cases}$

$$\text{Bei } \mathbb{E}^k = \mathbb{E}^1 \text{ gilt speziell: } \int_G f(\underline{x}) d^*\underline{x} = \int_{P_{\underline{x}^\#}G} \Big(\int_{a(\underline{x}^\#)}^{b(\underline{x}^\#)} f(x_1 \cong \underline{x}^*, \underline{x}^\#) dx_1 \Big) d^*\underline{x}^\# \qquad (S_\#)$$



Beispiel 2.1.1. $\overline{G} = D(f) = \{\underline{x} \in \mathbb{E}^2 : 0 \le x_j \le 1 \quad \forall j = 1,2; x_1 \le x_2\}, f \in \mathbb{L}_1(G)$.

$$\int_{\overline{G}} f(\underline{x}) d^*\underline{x} = \int_{\overline{G}} f(\underline{x}) \Pi_{j=1}^2 dx_j = \int_o^1 \Big(\int_{x_1}^1 f(x_1, x_2) dx_2 \Big) dx_1 = \int_o^1 \Big(\int_o^{x_2} f(x_1, x_2) dx_1 \Big) dx_2$$

Bemerkung 2.1.3. $f \in \mathbb{L}_1(G), G \in \mathfrak{A}_{\mu_L}(\mathbb{R}^n)$ *sowie:*
$\underline{\tilde{P}}(x) := (x_{j_1}, \dots, x_{j_n})^T$ *Permutation der Variablen (Komponenten)*
und $\underline{\tau}_{\underline{a}}(\underline{x}) := (x_1 + a_1, \dots, x_n + a_n)^T$ *Translation um* $\underline{a} \in \mathbb{E}^n$ *(fest). Hier:* $D(\underline{\tilde{P}}) = D(\underline{\tau} = \underline{\tau}_{\underline{a}}) = \mathbb{E}^n$.
Beh: $|G|$ *und* $\int_G f(\underline{x}) \Pi_{j=1}^n dx_j$ *sind invariant gegenüber* $\underline{\tilde{P}}$ *und* $\underline{\tau}$. *(Analog für* $(\underline{\tilde{P}})^{-1}$ *und* $(\underline{\tau})^{-1}$, *das heißt auch* $\underline{\tilde{P}}$, $(\underline{\tilde{P}})^{-1}$, $\underline{\tau}$ *und* $(\underline{\tau})^{-1}$ *sind messbare Abbildungen vom* $\mathbb{E}^n$ *auf den* $\mathbb{E}^n$*).*

Beweis. Sei I halboffenes Intervall im $\mathbb{E}^n$, dann gilt $|I| = |\underline{\tilde{P}}(I)|$ vgl. Def.

D.h. $\forall A \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ gilt (vgl. Def. äußeres L-Maß): $|A|^* = |\underline{\tilde{P}}(A)|^*$.
Weil $G \in \mathfrak{A}_{\mu_L}(\mathbb{R}^n)$ ist damit alles gezeigt für Invarianz von $|G|$.

$$\int_G f(\underline{x})\,\Pi_{j=1}^n dx_j = \int_{\underline{\tilde{P}}(G)} (f \circ \underline{\tilde{P}}^{-1})(\underline{x})\,\Pi_{j=1}^n dP_j(x_j) \qquad (\circ)$$

folgt direkt aus 1.6.3 mit gleichen Zwischensummen.
Analog für $\underline{\tau}$: $(f \circ \underline{\tau}^{-1})$ und $(f \circ \underline{\tilde{P}}^{-1})$ sind L-messbar und L-integrierbar über $\underline{\tilde{P}}(G)$ bzw. $\underline{\tau}(G)$. Damit gilt $(\circ)$ auch für $\underline{\tau}$ und Kompositionen von $\underline{\tilde{P}}$ und $\underline{\tau}$. $\square$

Beispiel 2.1.2 (Bsp. zu $(\circ)$)**.**
$\underline{\tilde{P}}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\tilde{P}}^{-1}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad G = [0,\pi] \times [0,1], \quad \underline{\tilde{P}}(G) = [0,1] \times [0,\pi]$
$\int\limits_G x_2 \sin x_1 d^*\underline{x} \overset{(\circ)}{=} \int\limits_{\underline{\tilde{P}}(G)} x_1 \sin x_2 d^*\underline{x} = \int\limits_{\underline{\tilde{P}}(G)} f(\underline{\tilde{P}}^{-1}(\underline{x}))d^*\underline{x}$

Mit $(\circ)$ und der analogen Formel für $\underline{\tau}$ besitzen wir schon die ersten einfachen Substitutionsformeln. Nun stellen wir weitere Hilfsmittel bereit:

Lemma 2.1.1 (Lemma (SI1))**.**
Es sei G offen, $G \in \tau_{\mathbb{E}^n}$, $\underline{\varphi}$ Abbildung mit $D(\underline{\varphi}) = G$ und $\underline{\varphi} : G \to \mathbb{E}^n$, $\underline{\varphi}$ sei stetig auf G und besitze die Eigenschaft: $\forall N :\ |N| = 0$ und $N \subset G$ gilt: $|\underline{\varphi}(N)| = 0$.
Beh.: Ist $E \subset G$ messbar, so auch $\underline{\varphi}(E)$.

Beweis. Nutzen hier eine einfache Folgerung aus dem Satz der Approximation von Mengen aus $\mathfrak{A}_{\mu_L^*}(\mathbb{R}^n)$ aus (1.3): Jede messbare Menge $E \in \mathfrak{A}_{\mu_L^*}(\mathbb{R}^n)$ kann in der Form

$$E = N \cup (\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j) \quad \forall E \in \mathfrak{A}_{\mu_L^*}, E \subset G$$

dargestellt werden. Hier ist N Nullmenge und die F_j sind abgeschlossen $\forall j \in \mathbb{N}$. $\forall j \in \mathbb{N}$ gilt $F_j \subset E$. o.E.d.A. seien F_j kompakt. (Ansonsten schreibt man zunächst die abgeschlossene und unbeschränkte Menge F_k als abzählbare Vereinigung kompakter F_j).
Weil $\underline{\varphi}$ stetig: Aus F_j kompakt $\Rightarrow$ $\underline{\varphi}(F_j)$ kompakt $\forall j$, d.h. $\underline{\varphi}(F_j)$ messbar $\forall j$ und $|\underline{\varphi}(N)| = 0$ (lt. Vorraussetzung)
$\underline{\varphi}(E) = \underline{\varphi}(N \cup (\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} F_j)) = \underline{\varphi}(N) \cup (\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \underline{\varphi}(F_j))$ ist Vereinigung messbarer Mengen. $\square$

Lemma 2.1.2 (Lemma (SI2))**.**
$\underline{\varphi}$ wie in Lemma 2.1.1 (SI1) sei stetig diffbar, $\underline{\varphi} \in (C^1(G))^n := \underline{C}^1(G)$
Beh.: $\forall N \subset G : |N| = 0$ gilt: $|\underline{\varphi}(N)| = 0$.

Beweis. G offen, damit existiert eine abzählbare Vereinigung kompakter Intervalle I_k, sodass $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ (analog zum Bew. $G \subset \mathfrak{B}^n$).
Zeigen: $\underline{\varphi}(N \cap I_k)$ ist $\forall k \in \mathbb{N}$ eine Nullmenge. Sei nun o.B.d.A. sei $N \subset I \subset G$.
Betrachten Elemente der Jacobi-Matrix $\frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}^o)$ mit $\underline{x}^o \in I$ (kompakt). D.h. es gibt Konstante c:.
$c = \text{const.} < \infty$, so dass $|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(\underline{x}^o)| < c = \quad \forall j,k \in \{1,\dots,n\}$ und $\forall \underline{x}^o \in I$.
Ziel ist es nun das äußere Maß auf $Q \subset I$ zu benutzen, Q halboffenes Intervall.
Der MWS der Differentialrechnung liefert:

$$|\varphi_j(\underline{x}) - \varphi_j(\underline{\tilde{x}})| = |\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(\underline{\hat{x}})(x_k - \tilde{x}_k)| \overset{\text{Cauchy}-\text{Schwarz}}{\leq} c \cdot \sqrt{n} \|\underline{x} - \underline{\tilde{x}}\|_{\mathbb{E}^n}$$

d.h.: $\|\underline{\varphi}(\underline{x}) - \underline{\varphi}(\underline{\tilde{x}})\|_{\mathbb{E}^n} \leq c \cdot n \|\underline{x} - \underline{\tilde{x}}\|_{\mathbb{E}^n}$. Das heißt $\underline{\varphi}(Q)$ ist im halboffenen Intervall enthalten, dessen Kantenlänge um das $c \cdot n$-fache vergrößert wird, d.h.

$$|\underline{\varphi}(N)|^* \leq c \cdot n |N| = 0 \Rightarrow |\underline{\varphi}(N)|^* = 0$$

□

Bemerkung 2.1.4. *Lemma (SI2) 2.1.2 heißt auch (vgl. Lemma 2.1.1 (SI1)):*
$\forall E \subset G$ messbar gilt bei $\underline{\varphi} \in (C^1(G))^n : \underline{\varphi}(E)$ messbar.

Lemma 2.1.3 (Lemma (SI3))**.**
Ist $G \subset \mathbb{E}^n$ offen und $\underline{\varphi} : D(\underline{\varphi}) = G \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^{n+m}$ mit $m > 0$ stetig diffbar. ($\underline{\varphi} \in (C^1(G))^{n+m}$), dann ist $\underline{\varphi}(G)$ Nullmenge in $\mathbb{E}^{n+m}$.

Beweis. Setzen $\underline{\varphi}$ fort zu $\underline{\tilde{\varphi}} : G \times \{\underline{0}\} \to \mathbb{E}^{m+n}$ mit $\underline{\tilde{\varphi}}(\underline{x}, \underline{0}) = \underline{\varphi}(\underline{x})$, dann ist $|G \times \{\underline{0}\}| = 0$ □

Lemma 2.1.4 (Lemma (SI4))**.**
Sei $\underline{\varphi} \in (C^1(G))^n := \underline{C}^1(G)$ und $\frac{D\underline{\varphi}}{D\underline{x}}(\underline{x}^o) = \det(\frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}^o)) \neq 0 \; \forall \underline{x}^o \in G$.
Dann gilt: Ist $\tilde{N} \subset \underline{\varphi}(G)$ mit $|\tilde{N}| = 0$, so ist auch $|\underline{\varphi}^{-1}(\tilde{N})| = 0$.

Beweis.
$I \subset G$, I kompakt und $I \neq \emptyset$. $\forall \underline{x}^o \in I \; \exists U(\underline{x}^o) \subset G$, sodass $\underline{\varphi}$ bijektiv ist mit $D(\underline{\varphi}) = U(\underline{x}^o)$
$U(\underline{x}^o) \overset{\underline{\varphi}}{\leftrightarrow} \underline{\varphi}(U(\underline{x}^o))$
Weil I kompakt, existieren endlich viele Punkte nach oben: $\{\underline{x}^k = \underline{x}^{0,k}\}_{k=1}^{N} : I \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} U(\underline{x}^k)$.
Wir nutzen Idee aus Lemma (SI2) (ausfüllen von $G = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} I_l$ mit kompakten Quadern). Erhalten auf diese Art abzählbar viele $\{\underline{x}^k\}_{k=1}^{\infty}$ mit $U(\underline{x}^k) \subset G$ und $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U(\underline{x}^k)$.
Nun bezeichnen wir die Einschränkung von $\underline{\varphi}$ auf $U(\underline{x}^k)$ mit $\underline{\varphi}^k$. Dann ist auch
$(\underline{\varphi}^k)^{-1} : \underline{\varphi}(U(\underline{x}^k)) \to U(\underline{x}^k)$ wieder bijektiv, sowie $\underline{\varphi}(U(\underline{x}^k))$ offen.
Nun sei $\tilde{N}_k := \underline{\varphi}^k(U(\underline{x}^k)) \cap \tilde{N}$ und damit :

$$\underline{\varphi}^{-1}(\tilde{N}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\underline{\varphi}^k)^{-1}(\tilde{N}_k)$$

Rest folgt sofort aus Lemma 2.1.2 (SI2). □

Satz 2.1.1 (Überdeckungssatz von Vitali (SI1)).
Sei $E \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n), E \neq \emptyset$. $\mathfrak{K}$ sei eine Menge abgeschlossener Kugeln im $\mathbb{E}^n$ mit der Eigenschaft: $\forall \underline{x} \in E$ und $\forall \delta > 0 \, \exists K \in \mathfrak{K}$ mit $\underline{x} \in K$ und Radius von $K : r(K) < \delta$.
Dann gibt es höchstens abzählbar unendlich viele Kugeln $K_j \in \mathfrak{K}$ mit $K_j \cap K_l = \emptyset \, \forall j \neq l$ und $E \backslash \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K_j$ (bzw. $E \backslash \bigcup\limits_{j=1}^{N} K_j$, $N \in \mathbb{N}$) ist Nullmenge.

Beweis.

i) E sei zunächst beschränkt. Dann existiert $G_o \in \tau_{\mathbb{E}^n}$ (G_o offen und beschränkt), so dass $E \subset G_o$.

Wir setzen $$\mathfrak{K}_o := \{K \in \mathfrak{K} : K \subset G_o\}.$$

Offenbar gilt $\forall \underline{x} \in E$ und $\forall \delta > 0 \, \exists K \in \mathfrak{K}_o$ mit $\underline{x} \in K$ und $r(K) < \delta$.
Wählen $K_1 \in \mathfrak{K}_o$ beliebig. Analog wählen wir $\{K_j\}_{j=1}^{N} \subset \mathfrak{K}_o$ mit $K_j \cap K_l = \emptyset, \; j \neq l$ (, wobei diese Kugeln beliebig aber fest gewählt seien).

Wir erklären nun: $$F_N := \bigcup_{j=1}^{N} K_j$$

Bei $E \subset F_N$ ist die Behauptung des Satzes gezeigt. Also sei $E \backslash F_N \neq \emptyset$.

Dann umfasst $$G_N := G_o \backslash F_N \in \tau_{\mathbb{E}^n}$$ auch Punkte $\underline{x} \in E$.

Es sei
$$\mathfrak{K}_N := \{K \in \mathfrak{K} : K \subset G_N\} \neq \emptyset$$

Sei nun $r_N := \sup\limits_{K \in \mathfrak{K}_N} r(K)$. Weil auch G_N nach Definition beschränkt ist, gilt $r_N < \infty$.
Wir wählen nun $K_{N+1} \in \mathfrak{K}_N$ mit $r(K_{N+1}) > \frac{r_N}{2}$ $\qquad (\circ)$.
In N fortschreitend erhalten wir so (induktiv) ein System paarweiser disjunkter Kugeln $\{K_j\}_{j=1}^{\infty}$, deren Vereinigung mit S bezeichnet sei:
$$S := \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \subset G_o.$$

Aus der Beschränktheit von G_o folgt offensichtlich: $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |K_j| < \infty$.
Ganz analog gilt für die angeschlossenen Kugeln $\tilde{K}_j$ mit dem gleichen Mittelpunkt wie K_j und $r(\tilde{K}_j) = 5r(K_j) \; \forall j \in \mathbb{N}$
$$\sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{K}_j| = 5^n \sum_{j=1}^{\infty} |K_j| < \infty \qquad (\#) \quad .$$

Nun sei $\underline{x}^o \in E \backslash S$ und $l \in \mathbb{N}$, beliebig aber fest. Nach oben gilt damit $\underline{x}^o \in G_l$(offen) und es gibt ein $K \in \mathfrak{K}_l$ mit $\underline{x}^o \in K$.
Wäre nun $\forall N \in \mathbb{N} : K \subset G_N$, so wäre $\forall N \in \mathbb{N} : K \in \mathfrak{K}_N$ und mit $(\circ)$:
$$r(K) \leq r_N < 2r(K_{N+1}).$$
Aus der Konvergenz von (#) folgt:

$\lim\limits_{N\to\infty} r(K_{N+1}) = 0 \Rightarrow r(K) = 0$ (WIDERSPRUCH zum positiven Radius.)
Damit war unsere Annahme falsch und $\exists N_o \in \mathbb{N} : K \cap F_{N_o} \neq \emptyset, N_o > l$. ($N_o$ sei hier minimal gewählt.)
Wegen der Konstruktion gilt nun: $\quad K \cap F_N = \emptyset \forall N < N_o$.
Weil $K \cap F_{N_o} \neq \emptyset$ und $K \cap F_{N_o-1} = \emptyset$ gilt zudem $K \cap K_{N_o} \neq \emptyset$ und $K \in \mathfrak{K}_{N_o-1}$.
Mit $(\circ)$ ist deshalb $r(K) \leq r_{N_o-1} < 2r(K_{N_o})$.
Dies heißt aber, dass $K \subset \tilde{K}_{N_o}$ und $K \subset \bigcup\limits_{j=N_o}^{\infty} \tilde{K}_j$.
Weil dazu auch $N_o > l$ war, folgt hieraus:

$$K \subset \bigcup_{j=l}^{\infty} \tilde{K}_j \qquad \text{und} \qquad \underline{x}^0 \in \bigcup_{j=l}^{\infty} \tilde{K}_j \qquad \forall l \in \mathbb{N}$$

Wir erhalten so: $E \backslash S \subset \bigcup\limits_{j=l}^{\infty} \tilde{K}_j$ und entsprechend $|E \backslash S|^* \leq \sum\limits_{j=l}^{\infty} |\tilde{K}_j| \ \forall l \in \mathbb{N}$.
Aus $\lim\limits_{l\to\infty} \sum\limits_{j=l}^{\infty} |\tilde{K}_j| = 0$ folgt damit: $|E \backslash S|^* = |E \backslash S| = 0$.

ii) E sei unbeschränkt.
Wir wählen offene Intervalle('Würfel')

$$I = \{\underline{x} \in \mathbb{E}^n : \alpha_k < x_j < \alpha_k + 1, \alpha_k \in \mathbb{Z} \quad \forall k = 1, \dots, n\}.$$

Alle solchen Intervalle seien numeriert, das heißt in Gestalt der Mengenfolge $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ dargestellt.
Für die Elemente von $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ setzen wir $E_m := E \cap I_m$ und $\mathfrak{K}^{(m)} = \{K \in \mathfrak{K} : K \subset I_m\}$ $\forall m \in \mathbb{N}$.
(Für die folgenden Überlegungen würde uns auch die Teilfolge aller $\{I_l\}_{l=1}^{\infty}$ mit $I_l \cap E \neq \emptyset$ ausreichen.)
Nach (i) gilt für die E_m mit $\mathfrak{K}^{(m)}, m = 1, \dots$ und $S^{(m)} = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} K_l^{(m)} \forall m \in \mathbb{N}$.
Umordnen liefert:

$$S := \bigcup_{m=1}^{\infty} S^{(m)} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l^{(m)} = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$$

Dabei sind die Elemente der Kugelfolge $\{K_j\}_{j=1}^{\infty}$ nach Konstruktion paarweise disjunkt.
Wir erhalten somit $E \backslash S = E \backslash \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K_j \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} [(E_m \backslash S) \cup (\bar{I}_m \backslash I_m)]$ bei

$$|(E_m \backslash S) \cup (\bar{I}_m \backslash I_m)| = 0.$$

Damit folgt die Behauptung des Satzes sofort aus Monotonie von μ_L^*.

$\square$

Bemerkung 2.1.5 (Formel (SL)).
Allgemeine Substitution im $\mathbb{E}^n$ *mit* μ_L*: und* $\underline{\varphi} \in (C^1(G))^n = \underline{C}^1(G)$, $\frac{D\underline{\varphi}}{D\underline{x}} \neq 0$*:*

$$\int\limits_G f(\underline{x})d\mu_L(\underline{x}) = \int\limits_G f(\underline{x})d^*\underline{x} = \int\limits_G (f\circ\underline{\varphi}^{-1}\circ\underline{\varphi})(\underline{x})d^*\underline{x} \overset{\text{Maßübetragungssatz}}{=} \int\limits_{\underline{\varphi}(G)} \underbrace{f\circ\underline{\varphi}^{-1}}_{F}(\underline{y})d\underbrace{(\mu_L\cdot\underline{\varphi}^{-1})}_{\nu}(\underline{y}) =$$

$$\overset{\text{Radon-Nikodym}}{=} \int\limits_{\underline{\varphi}(G)} (f\circ\underline{\varphi}^{-1})(\underline{y})\frac{d\overbrace{(\mu_L\cdot\underline{\varphi}^{-1})}^{\nu}}{d\mu_L}d\mu_L(\underline{y}) = \int\limits_{\underline{\varphi}(G)} (f\circ\underline{\varphi}^{-1})(\underline{y})|\frac{D\underline{x}}{D\underline{y}}|(\underline{y})d^*\underline{y} \qquad \text{bei } \underline{x} = \underline{\varphi}^{-1}(\underline{y})$$

Satz 2.1.2 (Satz (SI2)).
$\underline{\varphi} : G \to \Omega$, $\underline{\varphi} \in (C^1(G))^n$, $\Omega = \underline{\varphi}(G)$, *G offen mit* $\frac{D\underline{\varphi}}{D\underline{x}}(\underline{x}^o) \neq 0 \ \forall \underline{x}^o \in G$.
Dann gilt für $E \subset G : E \in \mathfrak{A}_{\mu_L}$*:*

$$|\underline{\varphi}(E)| = \int\limits_E |\frac{D\underline{\varphi}}{D\underline{x}}|(\underline{x}^o)d^*\underline{x}^o$$

Ist $|\frac{D\underline{\varphi}}{D\underline{x}}|$ *nicht über E intbar, so setzen wir* $|\underline{\varphi}(E)| = \infty$

Beweis. (Skizze) Taylorentwicklung und MWS in Matrixform:

$$\underline{\varphi}(\underline{x}^o) - \underline{y}^* \overset{\substack{\underline{y}^*=\underline{\varphi}(\underline{x}^*)\\ \underline{x}^*\in G}}{=} \frac{\partial\underline{\varphi}}{\partial\underline{x}}(\underline{x}^*)(\underline{x}^o-\underline{x}^*) + \underline{\underline{R}}(\underline{x}^o)(\underline{x}^o-\underline{x}^*)$$

mit $\underline{\underline{R}}(\underline{x}^o) := \frac{\partial\underline{\varphi}}{\partial\underline{x}}(\hat{\underline{x}}) - \frac{\partial\underline{\varphi}}{\partial\underline{x}}(\underline{x}^*)$, bei $\hat{\underline{x}}$ Zwischenpunkt. Benutzen als Abkürzung : $\underline{\underline{A}} := ((\frac{\partial\underline{\varphi}}{\partial\underline{x}})(\underline{x}^*))^{-1}$.
Mit $\underline{y}^o = \underline{\varphi}(\underline{x}^o)$ gehen wir über zur Betrachtung der quadratischen Form:

$$\underbrace{(\underline{\underline{A}}(\underline{y}^o-\underline{y}^*))^T(\underline{\underline{A}}(\underline{y}^o-\underline{y}^*))}_{(e)} = (\underline{x}^o-\underline{x}^*)^T(\underline{x}^o-\underline{x}^*) + \underbrace{(\underline{x}^o-\underline{x}^*)^T(\underline{\underline{R}}^T(\underline{x}^o)\underline{\underline{A}}^T + \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}(\underline{x}^o) + \underline{\underline{R}}^T\underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}})(\underline{x}^o-\underline{x}^*)}_{(H)}$$

Klar ist per Definition $\underline{\underline{R}}(\underline{x}^*) = \underline{\underline{0}}$.
Unter Nutzung der Stetigkeit der $\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}$ schätzen wir mit $\kappa \in (0,1)$ und $\delta : \delta(\underline{x}^*,\kappa)$ ab.
Zunächst Elementweise:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{B}} = [b_{j,k}]_{j=1,k=1}^{n,n} \ : |b_{j,k}| < \frac{\kappa}{3n} \quad \forall \underline{x}^o : \|\underline{x}^o - \underline{x}^*\|_{\mathbb{E}^n} < \delta \text{ und } \underline{x}^o \in G$$

und damit

$$|(H)| < \kappa\|\underline{x}^o-\underline{x}^*\|^2_{\mathbb{E}^n} \quad \text{sowie} \quad (1-\kappa)\|\underline{x}^o-\underline{x}^*\|^2 \leq (e) \leq (1+\kappa)\|\underline{x}^o-\underline{x}^*\|^2_{\mathbb{E}^n}$$

Arbeiten nun mit abgeschlossenem Kreis mit Radius $r < \delta$ und Ellipsoiden $B(a)$:
$B(a) := \{\underline{y} : (e) \leq a\}$, speziell bei $a_o = r^2(1-\kappa)$ und $a_1 = r^2(1+\kappa)$
Erhalten damit $B(a_o) \subset \underbrace{\underline{\varphi}(K_r(\underline{x}^*))}_{\text{messbar}} \subset B(a_1)$ und mit Volumenformeln:

$$|B(a_j)| = |K_r(\underline{x}^*)|\,|\frac{D\underline{\varphi}}{D\underline{x}}|(\underline{x}^*)\sqrt[n]{1-\kappa+2j\kappa} \quad j = 0,1 \qquad (\circ)$$

Mit ($\circ$) und glm. Stetigkeit von $\left|\frac{D\underline{\varphi}}{D\underline{x}}\right|$ bei $\left|\left|\frac{D\underline{\varphi}}{D\underline{x}}\right|(\underline{x}^o) - \left|\frac{D\underline{\varphi}}{D\underline{x}}\right|(\underline{x}^*)\right| < \varepsilon$ ist:

$$\int\limits_{K_r(\underline{x}^*)} \left|\frac{D\underline{\varphi}}{D\underline{x}}\right|(\underline{x}^o)d^*\underline{x}^o - 2\varepsilon|K_r(\underline{x}^*)| \leq |\underline{\varphi}(K_r(\underline{x}^*))| \quad \leq \int\limits_{K_r(\underline{x}^*)} \left|\frac{D\underline{\varphi}}{D\underline{x}}\right|(\underline{x}^o)d^*\underline{x}^o + 2\varepsilon|K_\varepsilon(\underline{x}^*)|$$

Rest erledigen wir mit Satz von Vitali(SI1) (Satz 2.1.1) bei $|E| < \infty$ mit

$$\mu_1(E) := |\underline{\varphi}(E)| = \mu_2(E) := \int\limits_E \left|\frac{D\underline{\varphi}}{D\underline{x}}\right|(\underline{x}^o)d^*\underline{x}^o \quad \forall E \in G, |E| < \infty, E \in \mathfrak{A}_{\mu_L}$$

($|E| = \infty$ ist sinnvoll, wenn $\left|\frac{D\underline{\varphi}}{D\underline{x}}\right| \notin V_1(E, \mu_L)$) □

Folgerung 2.1.3 (Folgerung (SI3))**.**
Ist $E \in \mathfrak{A}_{\mu_L}$ und $|E| < \infty$, so gilt:

$$|E| = \int\limits_{\underline{\varphi}(E)} \left|\frac{D\underline{\varphi}^{-1}}{D\underline{y}}\right|(\underline{y}^o)d^*\underline{y}^o \quad \text{d.h. } \underline{\varphi}, \underline{\varphi}^{-1} \text{ sind sogar maßtreu bei } \left|\frac{D\underline{\varphi}^{-1}}{D\underline{y}}\right|(\underline{y}^o) = 1 \quad \forall \underline{y}^o \in \underline{\varphi}(G)$$

Satz 2.1.4 (Satz (SI4))**.** *$\underline{\varphi}$ wie in Satz 2.1.2 (SI2), f sei integrierbar über G.*
Beh.: $(f \circ \underline{\varphi}^{-1})(\frac{D\underline{\varphi}^{-1}}{D\underline{y}}(\underline{y}))$ ist integrierbar über $\underline{\varphi}(G)$ und es gilt Formel (SL) aus Bem. 2.1.5.

Beweis. E' messbar, $E' \subset \underline{\varphi}(G)$. Dann ist

$$\nu(E') := \int\limits_{E'} \left|\frac{D\underline{\varphi}^{-1}}{D\underline{y}}\right|(\underline{y})d^*\underline{y} \quad \forall E' \subset G, E' \in \mathfrak{A}_{\mu_L}$$

σ-endliches Maß und ν ist abs. stetig bzgl. $\mu_L(\mathbb{R}^n)$.
Arbeiten mit Zerlegungen:

$$\mathscr{Z} = \{E_1, E_2, \ldots\} \in \mathfrak{Z}(G, f) \quad (\mu = \mu_L)$$
$$\mathscr{Z}' = \{E_1', E_2', \ldots\} \in \mathfrak{Z}(\underline{\varphi}(G), (f \circ \underline{\varphi}^{-1})) \quad (\nu)$$

Die Summen stimmen bei $E_j' = \underline{\varphi}(E_j)\ \forall j \in \mathbb{N}$ elementweise überein. Beachten $|E_j| = \nu(\underline{\varphi}(E_j))$ und erhalten:
$\int\limits_G f(\underline{x})d^*\underline{x}$ und $\int\limits_{\underline{\varphi}(G)} (f \circ \underline{\varphi}^{-1})(\underline{y})d\nu(\underline{y})$ haben gleiche Zwischensummen.
Rest (Radon-Nikodym):

$$\frac{d\nu(\underline{y})}{d\mu_L(\underline{y})} = \left|\frac{D\underline{\varphi}^{-1}}{D\underline{y}}\right|(\underline{y})$$

. □

Satz 2.1.5 (Satz von Sard (SI5))**.**
$\Omega \in \tau_{\mathbb{E}^n}$ und $\underline{\psi} : \Omega \to \mathbb{E}^n$ mit $\underline{\psi}(\Omega) = G$ und $\underline{\psi} \in \underline{C}^1(\Omega)$. P sei die Menge der „kritischen Punkte“:

$$P := \{\underline{y}^o \in \Omega : \left|\frac{D\underline{\psi}}{D\underline{y}}\right|(\underline{y}^o) = 0\} \neq \emptyset,$$

dann gilt: $|\underline{\psi}(P)| = 0$

Beweis. Günther, Bayer, ... III S.104, Elstrodt S.204 (bzw. Differentialtopologie)
Idee: P ist die Menge der kritischen Punkte. Lokalisierung in abgeschlossenen, beschränkten Quadern $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$. D.h. $\exists Q_j : P_1 \cap Q_j \neq \emptyset$, Q_j ganz ganz fein achsenparallel zerlegt. Dann lineare Taylorentwicklung um krit. Punkte. Ganz feine Quader schließt man mit ε-tik zwischen zwei Hyperebenen des Bildraumes und in Kugeln ein. Aufblasen zu Zylinder (im Bildraum) und berechnen der Zylindervolumen liefert bei $\varepsilon \to 0$: $|\underline{\psi}(P \cap Q_j)| = 0$ □

Folgerung 2.1.6 (Folgerung (SI6)).
Mit dem Satz von Sard bleibt die Formel (SL) aus Bem. 2.1.5 in der Form gültig, dass gilt:

$$\int\limits_{\substack{\underline{\psi}(\Omega) \\ (\underline{\varphi}^{-1})}} f(\underline{x})d^*\underline{x} = \int\limits_{\Omega} f(\underline{\psi}(\underline{y})) \left| \frac{D\underline{\psi}}{D\underline{y}} \right| (\underline{y})d^*\underline{y}$$

2.2 Kurvenintegrale

Definition 2.2.1 (KU1).
$\gamma \subset \mathbb{E}^n$ *nennen wir Kurve im* $\mathbb{E}^n$*, wenn* $\exists\, \underline{\varphi} : [a,b] \to \mathbb{E}^n$ *mit* $\underline{\varphi}$ *eineindeutig, stetig, sowie*

$$\gamma := W(\underline{\varphi}) = \underline{\varphi}([a,b]),$$

$\underline{\varphi}$ *nennt man Parametrisierung von* γ*. Bzgl.* $\underline{\varphi}$ *nennen wir* $\underline{\varphi}(a)$ *Anfangs- und* $\underline{\varphi}(b)$ *Endpunkt von* γ*. Eine Kurve* $\gamma = \underline{\varphi}([a,b])$ *nennen wir geschlossen, wenn* $\underline{\varphi}(a) = \underline{\varphi}(b) := \lim\limits_{t \to b-0} \underline{\varphi}(t)$

Bemerkung 2.2.1 (KU1).
γ *Kurve und* $\underbrace{[a,b]}_{D(\underline{\varphi})} = \underbrace{[a,c]}_{D(\underline{\varphi}_1)} \cup \underbrace{[c,b]}_{D(\underline{\varphi}_2)}$ *so schreiben wir* $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

Bemerkung 2.2.2 (KU2).
γ *sei fest vorgegeben und* M *sei die Menge aller Parametrisierungen von* γ*. Dann kann man* $\underline{\varphi}$ *und* $\underline{\psi}$ *als Element von* M *vergleichen:* $\gamma = \underline{\varphi}([a,b]) = \underline{\psi}([c,d])$*. Wir sagen* $\underline{\varphi}, \underline{\psi}$ *sind äquivalent, wenn*

1. $\underline{\varphi} \sim \underline{\psi} \Leftrightarrow \underline{\psi}^{-1} \circ \underline{\varphi}$ *ist monoton wachsend auf* $D(\underline{\varphi})$
2. $\underline{\varphi} \nsim \underline{\psi}$ *bei* $\underline{\psi}^{-1} \circ \underline{\varphi}$ *ist monoton fallend auf* $D(\underline{\varphi})$

Anfangs- und Endpunkte werden vertauscht.

Definition 2.2.2 (KU2).

a) *Wir nennen* γ *glatte Kurve der Klasse* $C^l : \gamma \in C^l$*, wenn eine Parametrisierung* $\underline{\varphi}$ *von* γ *existiert mit* $\underline{\varphi} \in (C^l[a,b])^n$, $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 1$, *sowie* $\|\dot{\underline{\varphi}}(t)\|_{\mathbb{E}^n} \neq 0$ *mit* $\dot{\underline{\varphi}}(t) = \frac{d}{dt}(\underline{\varphi}(t))$

b) γ *nennen wir stückweise glatt (von der Klasse* C^l*) bei*
$\gamma = \bigcup_{j=1}^{N} \gamma_j,\ \gamma_j \in C^l \quad \forall j = 1, \dots, N$

Definition 2.2.3 (Def. (KU3) „Rektifizierbare Kurven"). *(vgl. Def (OUSZ) aus 1.6.3)*
Sei γ Kurve und $\mathscr{Z}_{[a,b]} = \{E_k\}_{k=1}^{\infty}$, $[a,b] = D(\underline{\varphi})$, $\underline{\varphi}[a,b] = \gamma$ ($[a,b] = E$):
Wir erklären $\mathrm{schw}_{\gamma,\underline{\varphi}}(E_k) := \sup\limits_{t,t' \in E_k} \underbrace{\|\underline{\varphi}(t) - \underline{\varphi}(t')\|_{\mathbb{E}^n}}_{messbar}$.
Analog erklären wir $\mathrm{schw}_{\gamma,\underline{\psi}}(E'_k)$ *für zweite Parametrisierung* $\underline{\psi}$. $D(\underline{\psi}) = E'$.
γ heißt rektifizierbar (Längen-messbar) wenn für belebige $\underline{\varphi}$ und $\underline{\psi}$ gilt dass:

$$\sup_{\mathscr{Z}_E \in \mathfrak{Z}(E)} \left(\sum_{k=1}^{N_{\mathscr{Z}_E}} \mathrm{schw}_{\gamma,\underline{\varphi}}(E_k)\right) = \sup_{\mathscr{Z}_{E'} \in \mathfrak{Z}(E')} \left(\sum_{k=1}^{N_{\mathscr{Z}'_E}} \mathrm{schw}_{\gamma,\underline{\psi}}(E'_k)\right) < \infty \qquad (*)$$

Setzen als Kurvenlänge: $|\gamma| \overset{(I)}{:=} \sup\limits_{\mathscr{Z}_E \in \mathfrak{Z}(E)} (\sum\limits_k \mathrm{schw}_{\gamma,\underline{\varphi}}(E_k))$

Bemerkung 2.2.3 (KU3).
$(*)$ ist nicht trivial bei $E = [a,b)$ und immer zu überprüfen, hier sei z. B. mit $\mu_L(\{0\}) = 0$, setzen $\underline{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} t \\ \sin\frac{1}{t} \end{bmatrix}$ $\forall t \in [-\pi, 0)$ und $\underline{\varphi}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ bei $t = 0$.

Notation 2.2.4 (Kurvenmaß).
Das Kurvenmaß ν auf dem messbaren Raum $\{\gamma, \mathfrak{C}\}$ mit $\mathfrak{C} = (\underline{\varphi}(\mathfrak{A}_{\mu_L}))(\gamma)$ wird für beliebige $A \in \mathfrak{C}$ erklärt durch:

$$\nu(A) = |A| = \sup_{\mathscr{Z}_{\tilde{A}} \in \mathfrak{Z}(\underline{\varphi}^{-1}(A) = \tilde{A})} \left(\sum_k \mathrm{schw}_{\gamma,\underline{\varphi}}(\tilde{A}_k)\right) \qquad \text{und} \qquad [\gamma, \mathfrak{C}, \nu] \quad \text{ist Maßraum.}$$

Satz 2.2.1 (Satz (KU1)).
Ist $\gamma \in C^1$ und $D(\underline{\varphi}) = [a,b]$, so gilt:

$$|\gamma| \overset{(II)}{:=} \int_a^b \|\dot{\underline{\varphi}}(t)\|_{\mathbb{E}^n} dt \qquad \text{sowie} \qquad \nu(A) = \int_A d\nu(s) \overset{Abk}{=} \int_A ds = \int_{\underline{\varphi}^{-1}(A)} \|\dot{\underline{\varphi}}(t)\|_{\mathbb{E}^n} dt$$

Beweis. Bei Existenz von $\int_a^b \|\dot{\underline{\varphi}}(t)\| dt$ (stetige Funktion auf kompaktem Träger) gilt sofort:
$|\gamma|_{(\text{nach I})} \leq \int_a^b \|\dot{\underline{\varphi}}\| dt$ und $|\gamma|_{(I)} = |\gamma|_{(II)}$. Wir haben angenommen ν ist wohldefiniert (vgl. 1.6.2). □

Bemerkung 2.2.4 (KU4).
Ist γ stückweise glatt, so gilt bei $\gamma = \bigcup\limits_{j=1}^{N} \gamma_j$: $\qquad |\gamma| = \sum\limits_{j=1}^{N} |\gamma_j|$.

Definition 2.2.5 (Def. (KU4)). *Es sei $f : G \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$ und $\gamma \subset G, \gamma \in C^1$.*
Ist f_γ (Einschränkung von f auf γ) aus $\mathbb{L}_1(\gamma, \nu)$, so nennen wir

$$\int_\gamma f_\gamma(s) d\nu(s) = \int_\gamma f_\gamma(s) ds = \int_a^b f(\underline{x}(t)) \|\dot{\underline{x}}(t)\| dt \quad (\underline{x} = \underline{\varphi})$$

Kurvenintegral 1.Art. (ν unabh. von $\underline{\varphi}$. Integralwert hängt nur von Funktion f als Repräsentant ab.)

Beispiel 2.2.1.
$\gamma := \{\underline{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{bmatrix},\ t \in [0,\infty)\},\ \gamma \in C^1$ *(Archimedes)*
Setzen $T \in [0,\infty),\ T < \infty$

$$|\gamma_T| = \underline{\varphi}([0,T]) = \int_0^T \sqrt[2]{1+t^2}dt = \frac{1}{2}[t\sqrt[2]{1+t^2} + \operatorname{arcsinh} t]_0^T = \frac{1}{2}[T\sqrt[2]{1+T^2} + \operatorname{arcsinh} T]$$

Folgerung 2.2.2 (Folgerung (KU2)).
Analog Bem. (KU4) 2.2.4 gilt mit dem gleichen Argument für $\gamma = \bigcup_{j=1}^{N} \gamma_i$, $\gamma_i \in C^1$ *(γ stückweise glatt), dass*

(A)
$$\int_\gamma f_\gamma(s)d\nu(s) = \int_\gamma f_\gamma(s)ds = \sum_{j=1}^{N} \int_{\gamma_j} f_{\gamma_j}(s)d\nu(s) = \sum_{j=1}^{N} \int_{\gamma_j} f_{\gamma_j}(s)ds$$

(U) Die Umorientierung von $\gamma(\underline{a} \rightsquigarrow \underline{b})$: Anfangspunkt $\underline{a}$, Endpunkt $\underline{b}$ zu $\gamma(\underline{b} \rightsquigarrow \underline{a})$ ändert den Wert des Kurvenintegrals 1. Art nicht:

$$\int_{\gamma(\underline{a}\rightsquigarrow\underline{b})} f_\gamma(s)ds = \int_{\gamma(\underline{b}\rightsquigarrow\underline{a})} f_\gamma(s)ds$$

Bemerkung 2.2.5 (Anmerkung).
f_γ kann man als Massendichte (bzw. Ladungsdichte) auf γ ansehen.

Bemerkung 2.2.6 (KU5).
Ist $\gamma \in C^1$, so definiert

$$\underline{e}_\tau := \underline{\tau} = \frac{1}{\|\underline{\dot{x}}(t)\|_{\mathbb{E}^n}} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{den -Einheitstangentenvektor an } \gamma.$$

Die Tangente an γ im Punkte $\underline{x}(t) = \underline{\varphi}(t)$ schreibt man hier mit der Punkt-Richtungsgleichung als:

$$T := \{\underline{x} \in \mathbb{E}^n : \underline{x} := \underline{\varphi}(t) + \lambda \cdot \underline{e}_\tau, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Definition 2.2.6 (Kurvenintegral 2. Art (KU5)).
Es sei $\underline{v} : G \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ mit $\gamma \subset G$, $\underline{e}_\tau := \underline{\tau}$ Einheitstangenten-Vektor.
Erklären : $\tilde{f}_\gamma := \underline{v}^T_{|\gamma} \cdot \underline{\tau}$ als Skalarprodukt. . Ist $\tilde{f}_\gamma \in V_1(\gamma,\nu)$, dann bezeichnen wir den Ausdruck

$$\int_\gamma \tilde{f}_\gamma(s)ds \overset{x=\varphi}{=} \int_a^b \underline{v}^T(\underline{x}(t))\underline{\dot{x}}(t) \cdot \frac{\|\underline{\dot{x}}(t)\|}{\|\underline{\dot{x}}(t)\|}dt \overset{Formel}{=} \int_\gamma \underline{v}^T d\underline{x}$$

als Kurvenintegral 2. Art. ($\underline{e}_\tau = \underline{\tau} = \frac{\underline{\dot{x}}(t)}{\|\underline{\dot{x}}(t)\|}$, $\|\underline{\dot{x}}(t)\|dt = ds$)

Bemerkung 2.2.7 (Anm. KUI).

Hier ist $d\underline{x} = \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}$ *und* $\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}(x_1(t)) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}(x_n(t)) \end{bmatrix}$ *also:* $\dot{\underline{x}}(t)dt = d\underline{x}$.

D.h. in der sogenannten Standard-Schreibweise:

$$\int_\gamma \underline{v}^T d\underline{x} = \int_\gamma \sum_{j=1}^n v_j dx_j$$

Definition 2.2.7 ((KU6)).

Ist γ geschlossene C^1-Kurve, so schreibt man in diesem Fall:

$$\int_\gamma \underline{v}^T d\underline{x} = \oint_\gamma \underline{v}^T d\underline{x}$$

Bemerkung 2.2.8 (Bem. (KU6)).

Wie in der Folgerung 2.2.2 haben wir beim Kurvenintegral 2. Art

(A)

$$\int_\gamma \underline{v}^T d\underline{x} = \sum_{j=1}^N \int_{\gamma_j} \underline{v}^T d\underline{x}$$

(U-) *Die Umorientierung von $\gamma(\underline{a} \rightsquigarrow \underline{b})$: Anfangspunkt $\underline{a}$, Endpunkt $\underline{b}$ zu $\gamma(\underline{b} \rightsquigarrow \underline{a})$ ändert das Vorzeichen beim Kurvenintegrals 2. Art:*

$$\int_{\gamma(\underline{a} \rightsquigarrow \underline{b})} \underline{v}^T d\underline{x} = - \int_{\gamma(\underline{b} \rightsquigarrow \underline{a})} \underline{v}^T d\underline{x}$$

Beweis. Einfach nachrechnen mit verschiedenen Parametrisierungen. □

Bemerkung 2.2.9 (Physikalsche Bedeutung . KU2).

$\underline{v}$ sei Kraftfeld, dann ist $\int\limits_\gamma \underline{v}^T d\underline{x}$ die Arbeit, die man leisten muss, um einen Massepunkt entlang der Kurve γ von $\underline{a}$ Anfangs- zum Endpunkt $\underline{b}$ im (gegen) Kraftfeld $\underline{v}$ zu bewegen.

Definition 2.2.8 (Wegunabhängigkeit des KUI 2.Art).

$\underline{v} : G \to \mathbb{E}^n$ *mit* $\mathring{G} \neq 0$, $\underline{a}$, $\underline{b} \in G$ *und* Γ *sei die Menge:* $\Gamma := \{\gamma(\underline{a} \rightsquigarrow \underline{b}) \subset G$ *stückweise in* $C^1\}$

Gilt dann $\int\limits_\gamma \underline{v}^T d\underline{x} = c_1$ (unabh. von γ) $\forall \gamma \in \Gamma$, so nennen wir $\int\limits_\gamma \underline{v}^T d\underline{x}$ wegunabhängig.

Folgerung 2.2.3 (Folgerung (KU3)).

Ist $\int\limits_{\gamma(\underline{a} \rightsquigarrow \underline{b})} \underline{v}^T d\underline{x}$ wegunabhängig, so gilt für alle geschlossenen Kurven (Wege) $\tilde{\gamma} \subset G$ mit $\underline{a}, \underline{b} \in \tilde{\gamma}$:

$$\oint_{\tilde{\gamma}} \underline{v}^T d\underline{x} = 0$$

Beweis. Benutzen: Kurve $\tilde{\gamma} = \gamma(\underline{a} \rightsquigarrow \underline{b}) \cup \gamma_1(\underline{b} \rightsquigarrow \underline{a})$ mit:

$$\int\limits_{\gamma(\underline{a} \rightsquigarrow \underline{b})} \underline{v}^T d\underline{x} = \int\limits_{\gamma_1(\underline{a} \rightsquigarrow \underline{b})} \underline{v}^T d\underline{x} = -\int\limits_{\gamma_1(\underline{b} \rightarrow \underline{a})} \underline{v}^T d\underline{x}$$

Dann gilt:

$$\int\limits_{\tilde{\gamma}} \underline{v}^T d\underline{x} = \int\limits_{\gamma(\underline{a} \rightsquigarrow \underline{b})} \underline{v}^T d\underline{x} + \int\limits_{\gamma_1(\underline{b} \rightsquigarrow \underline{a})} \underline{v}^T d\underline{x} = 0$$

□

Bemerkung 2.2.10 (Anwendung . KU2)**.**
Diese Eigenschaft liefert in der Funktionentheorie ein „Holomorphie“-Kriterium.

Definition 2.2.9 (Sternförmiges Gebiet)**.**
Wir nennen ein Gebiet $G \subset \mathbb{E}^n$ sternförmig (bzgl. $\underline{x}^o \in G$), wenn $\exists \underline{x}^o \in G$ derart, dass $\forall \underline{x} \in G$ und $\forall \lambda \in (0,1)$ auch alle $\tilde{\underline{x}} := \underline{x}^o + \lambda(\underline{x} - \underline{x}^o) \in G$ sind.

Satz 2.2.4 (Satz (KU4) (Potentialfeld)**.**
$\underline{v} : G \subset \mathbb{E}^n$ sei aus $(C^1(G))^n$. G sei sternförmig bzgl. $\underline{x}^o$. Die folgenden Aussagen sind für $n \geq 2$ äquivalent.

i) $\underline{v} = \underline{\nabla} P \quad (\underline{v} = \operatorname{grad} P)$ *; P nennt man eine Potentialfunktion.*

ii) $\forall \gamma \in C^1$ *mit* $\gamma \subset G$ *gilt:* $\int\limits_{\gamma} \underline{v}^T d\underline{x}$ *ist wegunabhängig.*

iii) $\underline{v}$ *genügt der Integrabilitätsbedingung:*

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \quad \forall j,k = 1,\dots,n \; j \neq k \qquad (\circ)$$

(Man sagt bei $n = 2, 3$ auch, dass die Rotation von $\underline{v}$ verschwindet)

Beweis.

$$\text{i)} \Rightarrow \text{ii)} \qquad \frac{dP(\underline{x}(t))}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial x_j}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{dx_j}{dt}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\gamma(\underline{a} \rightsquigarrow \underline{b})} \underline{v}^T d\underline{x} = \int\limits_{\gamma(\underline{x}(a) \rightsquigarrow \underline{x}(b))} \underline{v}^T d\underline{x} = \int\limits_a^b \frac{dP}{dt} dt \overset{\text{(HS Diff-Int)}}{=} P(\underline{x}(b)) - P(\underline{x}(a)) = P(\underline{b}) - P(\underline{a})$$

ii) $\Rightarrow$ i)
G sternförmig. Wir erklären: $P(\underline{x}) = \int\limits_{\gamma = [\underline{x}^o \rightarrow \underline{x}]} \underline{v}^T d\underline{x}$
mit Integrationsweg

$$\gamma := [\underline{x}^o \rightarrow \underline{x}] := \{\underline{\varphi}(t) = \underline{x}(t) := \underline{x}^o + t \cdot (\underline{x} - \underline{x}^o), t \in [0,1]\}$$

i) $\Rightarrow$ iii) Satz von Schwarz

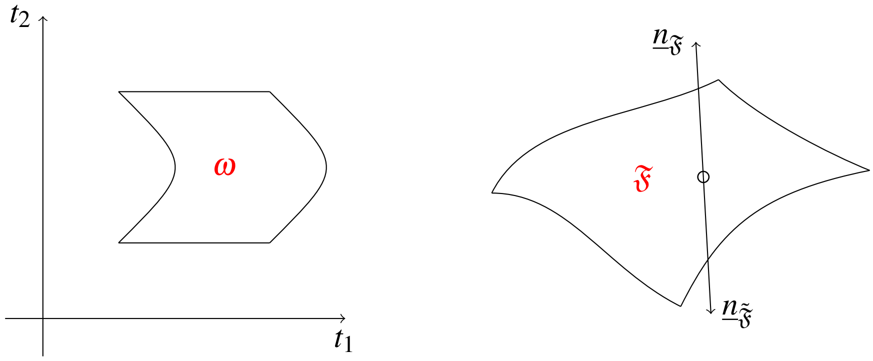
iii) $\Rightarrow$ ii) (Später:) Satz von Stokes □

2.3 Oberflächenintegrale und Differentialoperatoren

Idee des Oberflächenintegrals im $\mathbb{E}^3$:

$\underline{\varphi}$ Parametrisierung von der Fläche $\mathfrak{F}$, $\underline{\varphi} \in (C^1(\omega))^3 \cap (C^o(\overline{\omega}))^3$ und

Rang $\left(\frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial \underline{t}}\right)(\underline{t}^o) = 2 \quad \forall \underline{t}^o \in \omega$, $\partial \mathfrak{F} = \underline{\varphi}(\partial \omega)$ orientierungserhaltend.



Die differentielle Änderung $d^*\underline{t} = dt_1 dt_2$ bewirkt auf $\mathfrak{F}$ die differentielle Änderung:

$$\underbrace{\|\underline{\varphi}_{t_1}(\underline{t}) \times \underline{\varphi}_{t_2}(\underline{t})\|_{\mathbb{E}^3}}_{\text{Flächenmaß}} dt_1 dt_2$$

$\underline{\varphi}_{t_1} \times \underline{\varphi}_{t_2}(\underline{t}) =: \underline{N}(t)$ die Normale an $\mathfrak{F}$ im Punkte $\underline{\varphi}(\underline{t})$.

Hier ist $\|\underline{N}\| \neq 0$ weil Rang $\left(\frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial \underline{t}}\right) = 2$

Definition 2.3.1 (Oberflächenmaß $n = 3$)**.**
Das Oberflächenmaß $\nu(.)$ erklären wir analog zum Kurvenmaß in Bemerkung 2.2.3 mit der Radon-Nykodym-Ableitung vgl. Satz 1.10.3 durch:

$$\nu(\mathfrak{W}) := \int\limits_{\vartheta} \|\underline{\varphi}_{t_1} \times \underline{\varphi}_{t_2}\|_{\mathbb{E}^3} d\mu_L(\underline{t}) \quad \forall \mathfrak{W} = \underline{\varphi}(\vartheta), \vartheta \in \mathfrak{A}_{\mu_L}(\overline{\omega})$$

$$d.h.: \quad |\mathfrak{F}| = \int\limits_{\overline{\omega}} \|\underline{\varphi}_{t_1} \times \underline{\varphi}_{t_2}\|_{\mathbb{E}^3} d^*\underline{t} = \int\limits_{\mathfrak{F}} d\nu(O) = \int\limits_{\mathfrak{F}} dO$$

Definition 2.3.2 (OI1))**.**
$f : G \subset \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^1$, $\mathfrak{F} \subset G$ und $f_{\mathfrak{F}}$ Einschränkung von f auf $\mathfrak{F}$. Bei $f_{\mathfrak{F}} \in V_1(\mathfrak{F}, \nu)$ nennen wir den Ausdruck

$$\int\limits_{\mathfrak{F}} f_{\mathfrak{F}}(x) dO := \int\limits_{\mathfrak{F}} f_{\mathfrak{F}} d\nu(O) \qquad \textit{Oberflächenintegral 1. Art.}$$

Definition 2.3.3 (OI2))**.**
Es sei $\underline{N}$ der Normalenvektor an $\mathfrak{F}$ im Pkt. $\underline{x} = \underline{\varphi}(t)$. $\underline{N}$ sei richtungsfix im Sinne stetiger Flächennormale und $\underline{n}_{\mathfrak{F}} := \frac{1}{\|\underline{N}\|} \cdot \underline{N}$. Sei $\underline{v} : G \subset \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ mit $\mathfrak{F} \subset G$ und $\tilde{f}_{\mathfrak{F}} := \underline{v}^T_{|\mathfrak{F}} \cdot \underline{n} \in V_1(\mathfrak{F}, \nu)$. Wir nennen den Ausdruck

$$\int\limits_{\mathfrak{F}} \tilde{f}_{\mathfrak{F}} dO = \int\limits_{\mathfrak{F}} \underline{v}^T \overbrace{\underline{n} dO}^{d\underline{O}} = \int\limits_{\mathfrak{F}} \underline{v}^T d\underline{O}$$

Oberflächenintegral 2. Art. $d\underline{O} = \underline{N} \cdot \frac{1}{\|\underline{N}\|} \cdot \underbrace{\|\underline{N}\| dt}_{d0}$ *nennt man vektorielles Oberflächenelement.*

Ist $\mathfrak{F}$ *geschlossener Rand eines Gebietes im* $\mathbb{E}^3$*, so schreiben wir:* $\oint\limits_{\mathfrak{F}} \underline{v}^T d\underline{O}$*.*

Bemerkung 2.3.1 (Anmerkung OI1)**.**
Physikalisch ist $\int\limits_{\mathfrak{F}} \underline{v}^T d\underline{O}$ *der Fluss durch Fläche* $\mathfrak{F}$ *in Richtung* $\underline{n}_{\mathfrak{F}}$*.*

Definition 2.3.4 (DO1))**.**
Ist $\underline{v} \in (C^1(G))^n$*, so erklärt man:*

$$\operatorname{div} \underline{v} = \underline{\nabla}^T \underline{v} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}(\underline{x}) \qquad \forall \underline{x} \in G \qquad , \quad \underline{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Folgerung 2.3.1 (Folg. DO1)**.**
Ist $\underline{\varphi} : G \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$ *mit* $\underline{\varphi} \in C^1(G)$*, dann gilt:* $\operatorname{grad} \underline{\varphi}(\underline{x}) = \underline{\nabla} \cdot \underline{\varphi}(\underline{x})$

Definition 2.3.5 (Rotation-DO2)**.**
Für $\underline{v} : G \subset \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ *mit* $\underline{v} \in (C^1(G))^3$ *definieren wir* $(\operatorname{rot} \underline{v})(\underline{x}^o) = (\underline{\nabla} \times \underline{v})(\underline{x}^o) \quad \forall \underline{x}^o \in G$*.* $\operatorname{rot} \underline{v}$ *nennen wir die Rotation des Vektorfeldes. Speziell gilt mit*
$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$*:*

$$(\operatorname{rot} \underline{v})(\underline{x}^o) = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} (\underline{x}^o)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_2} v_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} v_2 \right) (\underline{x}^o) \underline{e}_1 + \left(\frac{\partial}{\partial x_3} v_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} v_3 \right) (\underline{x}^o) \underline{e}_2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} v_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} v_1 \right) (\underline{x}^o) \underline{e}_3$$

Folgerung 2.3.2 (Folg. DO2)**.**
$f : G \to \mathbb{E}^1$ *mit* $G \subset \mathbb{E}^n$*,* $f \in C^2(G)$*, dann gilt:*

$$(\Delta f)(\underline{x}^o) = (\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f)(\underline{x}^o) = [(\underline{\nabla}^T \cdot \underline{\nabla}) f](\underline{x}^o) = (\operatorname{div}(\operatorname{grad} f))(\underline{x}^o)$$

Beweis. Nachrechnen

□

Bemerkung 2.3.2 (Bemerkung DO1)**.**
Die Rotation (oder curl) eines Feldes lässt sich auch in den folgenden Fällen sinnvoll erklären:
$f : G \subset \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^1$ *und* $\underline{v} = \underline{v}(x_1, x_2) : G \subset \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^1$ *(mit* $f \in C^1(G), \underline{v} \in (C^1(G))^2$*)*
hier setzen wir:

$$(\operatorname{rot} f(\underline{x}^o) = (\operatorname{rot} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{bmatrix})(\underline{x}^o) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} f \\ -\frac{\partial}{\partial x_1} f \\ 0 \end{bmatrix} (\underline{x}^o)$$

(Kurz: $(\operatorname{rot} f)(\underline{x}^o) = \left[\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} f\right](\underline{x}^o))$
und

$$(\operatorname{rot}\underline{v})(\underline{x}^o) = (\operatorname{rot}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix})(\underline{x}^o) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_1}v_2 - \frac{\partial}{\partial x_2}v_1 \end{bmatrix}(\underline{x}^o)$$

($\operatorname{rot}\underline{v} = (\frac{\partial}{\partial x_1}v_2 - \frac{\partial}{\partial x_2})(\underline{x}^o))$
In Bezug zur Integrabilitätsbedingung spricht man bei $\underline{v} : G \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *mit* $\underline{v} \in (C^1(G))^n$ *und* $(\frac{\partial}{\partial x_j}v_k - \frac{\partial}{\partial x_k}v_j)(\underline{x}^o) = 0\ \forall j,k : j \neq k$ *und* $\underline{x}^o \in G$ *von Vektor-Feldern mit verschwindender Rotation.*

Definition 2.3.6 (Normalbereiche des $\mathbb{E}^n$)**.**
Ein Normalbereich des $\mathbb{E}^1$ *ist ein kompaktes Intervall:* $[a,b] \subset \mathbb{R}^1$*. (Nun induktiv).*
Es sei $n \geq 2$ *und die Normalbereiche des* $\mathbb{E}^{n-1}$ *seien definiert.*
$\overline{\Omega}$ *als Abschluss eines beschränkten Gebietes* $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ *nennen wir Normalbereich der Klasse* C^1*(bzw.* C^l*), wenn* $\exists\{\underline{\varphi}^{(j)}\}_{j=1}^N : \underline{\varphi}^{(j)} : D(\underline{\varphi}^{(j)}) = \overline{\omega}_j \subset \mathbb{E}^{n-1} \to \mathbb{E}^n$ *mit* $\overline{\omega}_j$ *sind Normalbereiche des* $\mathbb{E}^{n-1}$ *bei* $j = 1,\dots,N$ *und* $\underline{\varphi}^{(j)} \in (\mathbb{C}^1(\overline{\omega}_j))^n$ *(bzw.* $(\mathbb{C}^l(\overline{\omega}_j))^n$
sowie:

1. $\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^{N} \underline{\varphi}^{(j)}(\overline{\omega}_j), \quad \underline{\varphi}^{(j)}(\omega_j) \cap \underline{\varphi}^{(k)}(\underline{\omega}_k) = \emptyset \quad (j \neq k)$

2. $\forall \underline{t} \in \overline{\omega}_j : \operatorname{Rang}\left(\frac{\partial \underline{\varphi}^{(j)}}{\partial \underline{t}}\right) = n-1$

Bemerkung 2.3.3 (OI2)**.**
Die Abbildungen $\underline{\varphi}^{(j)}$ *kann man auch im Sinne der Einschränkung von* $\underline{\Phi}^{(j)} : G_j \in \mathbb{E}^{n-1} \to \mathbb{E}^n$ *bei* $\overline{\omega}_j \subset G_j$ *und* $\underline{\Phi}^{(j)} \in (C^l(G))^n$ *über* $\underline{\varphi}^{(j)}(\underline{t}) := \underline{\Phi}^{(j)}(\underline{t}) \quad \forall \underline{t} \in \overline{\omega}_j$ *erklären.*

Bemerkung 2.3.4 (OI3)**.**
$\overline{\Omega}$ *sei Normalbereich im* $\mathbb{E}^n$ *und* $\underline{\psi} : \overline{\Omega} \to \mathbb{E}^n$ *mit* $\underline{\psi} \in (\mathbb{C}^l(\overline{\Omega})) \to \mathbb{E}^n$ *mit* $\frac{D\underline{\psi}}{D\underline{x}} \neq 0 \quad \forall \underline{x} \in \overline{\Omega}$*, dann ist* $\underline{\psi}(\overline{\Omega}) = \overline{G}$ *wieder ein Normalbereich des* $\mathbb{E}^n$*.*

Beweis. (Einfach Verkettung der Abb. und Def. überprüfen) □

Definition 2.3.7 (Def. (OI4)„*k*-dim diffbare Mannigfaltigkeit“)**.**
Eine Menge $M \subset \mathbb{E}^n$ *heißt k-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse* C^l *für* $k \leq n-1$*, wenn* $\forall \underline{x}^o \in M\ \exists U(\underline{x}^o)$ *und Abb.* $\underline{\varphi} \in \underline{C}^l(\omega))$*,* $\omega \in \tau_{\mathbb{E}^k}$*, so dass* $\underline{\varphi}(\omega) = U(\underline{x}^o) \cap M$ *gilt mit* $\underline{\varphi}$ *als eineindeutige Parametrisierung von* $U(\underline{x}^o) \cap M$*.*
$\underline{\varphi}$ *nennt man die lokale Karte von* $U(\underline{x}^o) \cap M$*. Das System* $\{\underline{\varphi}^{(\alpha)}\}_{\alpha \in M}$ *nennt man einen Atlas von* M*.*

Definition 2.3.8 (Def. (OI5) „Abgeschlossenes Flächenstück“).
Es sei $n \geq 2 : \mathfrak{F} \subset \mathbb{E}^n$ mit $\mathfrak{F}$ abgeschlossen. $\mathfrak{F}$ heißt abgeschlossenes Flächenstück der Klasse C^1(bzw. C^l), wenn es eine eineindeutige Abbildung (Parametrisierung) $\underline{\varphi}$ von $\mathfrak{F}$ gibt mit $\underline{\varphi} : \overline{\omega} = D(\underline{\varphi}) \to \mathbb{E}^n$, mit $\overline{\omega} \in \mathbb{E}^{n-1}$ (und dort Normalbereich), so dass $\mathfrak{F} = \underline{\varphi}(\overline{\omega})$, $\underline{\varphi} \in (\mathbb{C}^1(\overline{\omega}))^n$, sowie Rang $\left(\frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial \underline{t}}\right)(\underline{t}^o) = n-1 \quad \forall \underline{t}^o \in \overline{\omega}$. *$\partial\mathfrak{F} := \underline{\varphi}(\partial\omega)$ nennen wir den Rand von $\mathfrak{F}$.*

Bemerkung 2.3.5 (OI4).
$\mathfrak{F}$ und $\partial\mathfrak{F}$ sind unabhängig von der konkreten Wahl der Parametrisierung $\underline{\varphi}$ (und $\overline{\omega}$)

Beweis. Es sei $\mathfrak{F} = \underline{\varphi}(\overline{\omega}) = \underline{\varphi}^o(\overline{\omega}_0)$: Konstruiere reguläre Abbildung.

$$\underline{\psi} : \overline{\omega} \to \overline{\omega}_0 : \frac{D\underline{\psi}}{D\underline{t}}(\underline{t}^o) \neq 0 \quad \forall \underline{t}^o \in \overline{\omega} \qquad \text{bei} \qquad \overline{\omega} \underset{\underline{\psi}^{-1}}{\overset{\underline{\psi}}{\rightleftharpoons}} \overline{\omega}_0$$

Verkettung liefert Beweis. □

Bemerkung 2.3.6 (OI5).
$\partial\mathfrak{F}$ ist bei $n \geq 3$ formal(Änderung der Raumdimension) selbst Vereinigung endl. vieler abgeschlossener Flächenstücke der Dimension $n-2$. (Bei $n = 3$ sind das Jordankurven γ.)

Satz 2.3.3 (Satz (OI1)).
Jede kompakte $(n-1)$-dim. Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{E}^n$ der Klasse C^l kann man in endlich viele $(n-1)$-dim. abgeschlossene Flächenstücke $\mathfrak{F}_j$ der Klasse C^l zerlegen, so dass $M = \bigcup_{j=1}^{N} \mathfrak{F}_j$ und bei $j \neq k$;$\mathfrak{F}_j \cap \mathfrak{F}_k \in \{\emptyset, \tilde{\mathfrak{F}}\}$ ist. Hier bezeichnet $\tilde{\mathfrak{F}}$ ein $(n-2)$-dim. abgeschl. Flächenstück.

Beweis. Idee:
Wählen aus $\{\underline{\varphi}^{(\alpha)}\}_{\alpha \in M}$ endlich viele aus. Sichern hier: $\underline{\varphi}^{(j)}(\omega_j) \cap \underline{\varphi}^{(k)}(\omega_k) = \emptyset$.
Argumentieren mit achsenparallelen Quadern $U^{(j)}(\underline{x}^{0,j})$. Rest: Erkennen von $\underline{\varphi}^{(j)}(\partial\omega_j) \cap \underline{\varphi}^{(k)}(\partial\omega_k)$ als $(n-2)$ abgeschlossene Flächenstücke. □

Erklären nun die Normale $\underline{N}$ an ein $(n-1)$-dim. abgeschl. Flächenstück $\mathfrak{F} \subset \mathbb{E}^n$ der Klasse C^1.
Rang $\left(\frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial \underline{t}}\right)(\underline{t}^o) = n-1 \quad \forall \underline{t}^o \in \overline{\omega}$: Dafür setzen wir

$$(D_{(k)}\underline{\varphi})(\underline{t}^o) := (-1)^{k-1} \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial t_{n-1}} \\ \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial t_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_{n-1}} \end{bmatrix} \text{ bei } k = 1, \ldots, n$$

Hier können wegen Rang $\left(\frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial \underline{t}}\right)(\underline{t}^o) = n-1$ nicht alle $(D_{(k)}\varphi)(\underline{t}^o)$ verschwinden.
Erhalten deshalb: $D_{(\underline{\varphi})}(\underline{t}^o) := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} ((D_{(k)}(\underline{\varphi}))(\underline{t}^o))^2} \neq 0$ und damit:

$$\underline{N}(\underline{t}^o) = \underline{N}\left(\underline{x}(\underline{t}^o) = \underline{\varphi}(\underline{t}^o)\right) = \sum_{k=1}^{n} (D_{(k)}\underline{\varphi})(\underline{t}^o)\underline{e}_k \qquad \text{mit kanon. Einheitsvektoren } \underline{e}_k,\ k = 1, \ldots, n$$

Hier ist $\|\underline{N}\|_{\mathbb{E}^n}(\underline{t}^o) = D_{(\underline{\varphi})}(\underline{t}^o) \neq 0$. Setzen schließlich $\underline{n} = \frac{1}{\|\underline{N}\|}\underline{N}$ als Flächeneinheitsnormalen-Vektoren.

Zunächst sind hier die $\{\underline{N}, \left\{\frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial t_j}\right\}^{n-1}\}$ linear unabhängig im $\mathbb{E}^n$, weil $\det\left(\underline{N}, \frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial \underline{t}}\right) = D^2_{(\varphi)} \neq 0$ und Determinantengesetze („gleiche Zeilen oder Spalten") liefern Orthogonalität: $\underline{N}^T \cdot \frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial t_j} = 0$.

Definition 2.3.9 (Oberflächenmaß).
Das Oberflächenmaß $\nu(.)$ erklären wir analog Definition 2.3.1: Sei $\mathfrak{F}$ ein $(n-1)$-dim. abgeschl. Flächenstück der Klasse C^1.

$$[\overline{\omega}, \mathfrak{A}_{\mu_L}(\overline{\omega}), \mu_L] \quad \underset{\overleftarrow{\varphi^{-1}}}{\xrightarrow{\varphi}} \quad [\mathfrak{F}, \mathfrak{C}(\mathfrak{F}), \nu] \quad ; \mathfrak{C}(\mathfrak{F}) := \underline{\varphi}(\mathfrak{A}_{\mu_L}))(\mathfrak{F})$$

durch:

$$|\mathfrak{W}| = \nu(\mathfrak{W}) := \int_{\vartheta} \|\underline{N}(\underline{t})\|_{\mathbb{E}^n} d\mu_L(\underline{t}) \quad \forall \mathfrak{W} = \underline{\varphi}(\vartheta)\,,\, \vartheta \in \mathfrak{A}_{\mu_L}(\overline{\omega})$$

$$d.h.: \quad |\mathfrak{F}| = \int_{\overline{\omega}} \|\underline{N}(\underline{t})\|_{\mathbb{E}^n} d^*\underline{t} = \int_{\mathfrak{F}} d\nu(O) = \int_{\mathfrak{F}} dO$$

Definition 2.3.10 (Def. (OI6) „Oberflächenintegral").
$\mathfrak{F}$ sei $(n-1)$-dim. abgeschl. Flächenstück der Klasse C^1.
$\mathfrak{F} \subset G \subset \mathbb{E}^n$, sowie $f : G \to \mathbb{E}^1$ und $\underline{v} : G \to \mathbb{E}^n$. $f_{\mathfrak{F}} \in V_1(\mathfrak{F}, \nu)$ bzw. $\tilde{f}_{\mathfrak{F}} := \underline{v}^T \cdot \underline{n} \in V_1(\mathfrak{F}, \nu)$.
Wir nennen

(I) $\int\limits_{\mathfrak{F}} f_{\mathfrak{F}}(\underline{x}) dO = \int\limits_{\mathfrak{F}} f_{\mathfrak{F}}(\underline{x}) d\nu(O)$ *Oberflächenintegral 1.Art*

(II) $\int\limits_{\mathfrak{F}} \tilde{f}_{\mathfrak{F}}(\underline{x}) dO = \int\limits_{\mathfrak{F}} \underline{v}^T(\underline{x}) \underbrace{\underline{n}_{\mathfrak{F}}(\underline{x}) dO}_{d\underline{O}} = \int\limits_{\mathfrak{F}} \underline{v}^T(\underline{x}) d\underline{O}$ *Oberflächenintegral 2. Art*

Bemerkung 2.3.7 (OI6).
Bei diffbaren Mannigfaltigkeiten und Rand $\partial\Omega$ von Normalbereichen muss man bei (II) OI 2. Art die Normalenrichtungen „vereinheitlichen". Nun sei $\overline{\Omega}$ Normalbereich der Klasse C^1 im $\mathbb{E}^n$. Rand $\partial\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{N} \underline{\varphi}^{(j)}(\overline{\omega}_j)$, die $\underline{\varphi}^{(j)}(\overline{\omega}_j)$ Randflächen von Ω und $\underline{\varphi}^{(j)}(\omega_j) \cap \underline{\varphi}^{(k)}(\omega_k) = \emptyset$.
Geschrieben mit Flächen $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}_j \cap \overset{\circ}{\mathfrak{F}}_k = \emptyset \quad \forall j \neq k$.

Lemma 2.3.1 (OI1).
$\underline{x} \in \underline{\varphi}^{(j)}(\underline{t}) \in \underline{\varphi}^{(j)}(\omega_j)$ sei „innerer" Randpunkt - d.h. „innerer" Punkt der Randfläche $\mathfrak{F}_j$.
Weiterhin seien bei $0 < \delta : \underline{g}(h) : \underline{g} \in (C^1(-\delta, \delta))^n$ mit $\underline{g}(0) = \underline{x}$ und
$\det\left(\underline{\kappa}, \frac{\partial \underline{\varphi}^{(j)}}{\partial \underline{t}}\right)(0, \underline{t}) > 0 \quad (\circ)$ *, wobei $\underline{\kappa} := \frac{d}{dh}\underline{g}_{|h=0}$.*

Dann existiert $\eta = \eta(\underline{x}, \underline{g}) > 0$ derart, dass mit $\begin{array}{l} G^+ := \{\underline{g}(h), h \in (0, \eta)\} \\ G^- := \{\underline{g}(h), h \in (-\eta, 0)\} \end{array}$ $\forall \underline{x} \in \underline{\varphi}^{(j)}(\omega_j)$ *und $\underline{g}$ (nach oben) genau einer der folgenden Fälle zutrifft:*

a) $G^- \subset \Omega,\ G^+ \subset \overline{\Omega}^c,\ \varepsilon_j = 1$

b) $G^+ \subset \Omega,\ G^- \subset \overline{\Omega}^c,\ \varepsilon_j = -1$

c) $G^-, G^+ \subset \Omega,\ \varepsilon_j = 0$

Bemerkung 2.3.8 (OI7). *Der Fall c) behandelt (repräsentiert) innere Schnittflächen von Ω. (Schlitzflächen oder Schlitz-Kurven)*

Beweis. (Lemma 2.3.1:) $\underline{x}^o = \underline{\varphi}(\underline{t}^o) = \underline{\varphi}^{(j)}(\underline{t}^o)$ mit $\underline{\varphi} = \underline{\varphi}^{(j)}$
Setzen

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{(1)}\underline{\varphi}(\underline{t}^o) \\ \vdots \\ D_{(n)}\underline{\varphi}(\underline{t}^o) \end{bmatrix} \quad , \underline{y} = \begin{bmatrix} s \\ \underline{t} \end{bmatrix} \in \mathbb{R} \times \omega_j := W_j \qquad \text{und} \qquad \underline{\psi}\underbrace{(s,\underline{t})}_{=\underline{y}} := \underline{a}s + \underline{\varphi}(\underline{t}) \ .$$

Dann gilt:

$$\frac{D(\underline{\psi})}{D\underline{y}} = \sum_{k=1}^{n} a_k D_{(k)}\underline{\varphi}(\underline{t}) \overset{\underline{t}=\underline{t}^o}{=} (D_{(\underline{\varphi})}(\underline{t}^o))^2 > 0 \qquad \Rightarrow \exists V = U(s^o, \underline{t}^o) \subset \mathbb{R} \times \omega_j : \frac{D\underline{\psi}}{D\underline{y}} > 0 \quad \forall \underline{y} \in V \ .(\heartsuit)$$

Wir können hier einfach $s^o = 0$ wählen.
Nach oben existiert Umgebung $U_1(\underline{x}^o)$ mit $U_1(\underline{x}^o) = \underline{\psi}(V)$ (bei Existenz der inv. Abb. $\underline{\psi}^{-1}_{|U_1(\underline{x}^o)}$).
Erklären jetzt ϑ als offene Randstück-Parameter-Menge: $\vartheta := \{\underline{t} \in \omega_j : [0, \underline{t}]^T \in V\}$
$\Rightarrow \underline{\varphi}(\vartheta)$ ist offen in $\underline{\varphi}(\omega_j)$ und in $\partial\Omega$. $\Rightarrow A := \partial\Omega \backslash \underline{\varphi}(\vartheta)$ abgeschlossen und $\underline{x}^o \notin A$.
Wir können gegebenenfalls durch Verkleinern von V sichern, dass gilt: $\underline{x}^o \in U_1$ und $A \cap U_1 = \emptyset$
Daraus folgt sofort: dass gilt $U_1 \cap \partial\Omega \subset \underline{\varphi}(\vartheta)$!
Nun sei wieder $s = s^o = 0$.
O.B.d.A. nehmen wir an, dass gilt: $U_1 \cap \partial\Omega = \{\underline{\varphi}(\underline{t}) : \|\underline{t} - \underline{t}^o\|_{\mathbb{E}^{n-1}} < \beta\}$

$$\text{Wir setzen} \qquad V_\beta := \{\underline{y} : \| \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \underline{t}^o \end{bmatrix}}_{\underline{y}^o} - \underbrace{\begin{bmatrix} s \\ \underline{t} \end{bmatrix}}_{\underline{y}} \|_{\mathbb{E}^n} < \beta\} \qquad \text{und} \qquad \begin{matrix} U_1^+ := \underline{\psi}\{\underline{y} \in V_\beta, s > 0\} \\ U_1^- := \underline{\psi}\{\underline{y} \in V_\beta, s < 0\} \end{matrix}$$

Die Mengen U_1^+ , U_1^- sind offen und zusammenhängend und enthalten keine Randpunkte mehr.
Die Mengen $U_1^+ \cap \Omega, U_1^+ \cap \overline{\Omega}^C$ sind offen und eine der Menge ist leer. Analog für U_1^-.
Wären nun $U_1^+, U_1^- \subset \overline{\Omega}^c$, so könnte $\underline{x}^o$ nicht Randpunkt sein, d.h. $U_1^+, U_1^- \subset \Omega$. Andere Fälle analog. Damit verbleiben nur noch die Fälle a)-c) zunächst für U_1^+ , U_1^-.
Nun sei $\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{t}) \in U_1 \cap \underline{\varphi}(\omega_j)$ und $\underline{g}$ entspreche den Vorraussetzungen.
Dann existiert $\eta_1 > 0$: $\quad G_1 := \{\underline{g}(h), h \in (-\eta_1, \eta_1)\} \subset U_1$ und $\underline{\psi}^{-1}(G_1) \subset V_\beta$.

D.h. $\underline{\psi}^{-1}(G_1)$ hat die Darstellung: $\qquad \underline{\psi}^{-1}(G_1) := \{\begin{bmatrix} s(h) \\ \underline{t}(h) \end{bmatrix}, h \in (-\eta_1, \eta_1)\}$

In Umgebung von $h = 0$ sind hier s und $\underline{t}$ nach h diffbar und mit $\underline{g}(0) = \underline{x}^o$ gilt:

$\underline{g}(h) = s(h) \cdot \underline{a} + \underline{\varphi}(\underline{t}(h)) \quad \forall h \in (-\eta_1, \eta_1)$

Die Differentiation nach h liefert: $\underline{\kappa} := \frac{d}{dh}\, \underline{g}_{|h=0} = \frac{ds}{dh}(0) \cdot \underline{a} + \frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial \underline{t}} \frac{dt}{dh}(0)$

Mit ($\circ$) und ($\heartsuit$) liefern Determinanten-Rechenregeln: $\underbrace{\det(\underline{\kappa}, \frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial \underline{t}})}_{>0} = \frac{ds}{dh}(0) \underbrace{\frac{D\underline{\psi}}{D\underline{y}}_{|\underline{y}^o}}_{>0} \Rightarrow \frac{ds}{dh}(0) > 0$

Wegen $s(0) = 0$ und $s(h)$ monoton wachsend - sind alle oben für U_1^+, U_1^- untersuchten Inklusionen in Ω bei möglicher Änderung von η_1 zu η von G_1 direkt auf G^+ und G^- übertragbar. Rest: Klappt für ganz $\underline{\varphi}(\omega_j)$ mit einfachen Zusammenhangs - und Stetigkeitsargumenten. $\square$

Definition 2.3.11 (Def. (OI7) „Oberflächenintegral“).
M sei Rand eines Normalbereiches $M = \partial\Omega$ bzw. abgeschlossenes Flächenstück im $\mathbb{E}^n$, mit der Darstellung $M = \bigcup_{j=1}^{N} \mathfrak{F}_j$ als Vereinigung abgeschlossener Flächenstücke im $\mathbb{E}^n$ der Klasse C^1, bei $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}_j \cap \overset{\circ}{\mathfrak{F}}_k = \emptyset \quad \forall j \neq k$.

Dann gilt: $\mathfrak{C}(M) = \overline{\sigma\left(\bigcup_{j=1}^{N} \underline{\varphi}^{(j)}(\mathfrak{A}_{\mu_L}(\overline{\omega}_j))\right)}^{\nu}$, $\nu(A) := \sum_{j=1}^{N} \int_{(\underline{\varphi}^{(j)})^{-1}(A \cap \underline{\varphi}^{(j)}(\overline{\omega}_j))} D_{(\underline{\varphi}^j)}(\underline{t})d\underline{t} \quad \forall A \in \mathfrak{C}$

Es seien $f : G \to \mathbb{E}^1, \underline{v} : G \to \mathbb{E}^n$ mit $M \subset G$, sowie $f_{\mathfrak{F}_j}, \underline{v}^T \cdot \underline{n}_{\mathfrak{F}_j} = \tilde{f} \in V_1(\mathfrak{F}_j, \nu), \quad \forall j = 1, \ldots, N$
Wir nennen

(i) $\int_M f_M(\underline{x})dO = \sum_{j=1}^{N} \int_{\mathfrak{F}_j} f_{\mathfrak{F}_j}(\underline{x})dO$ *Oberflächenintegral 1.Art und*

(ii) $\int_M \tilde{f}_M(\underline{x})dO = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j \int_{\mathfrak{F}_j} \tilde{f}_{\mathfrak{F}_j}(\underline{x})dO = \sum_{j=1}^{N} \int_{\mathfrak{F}_j} \underline{v}^T(\underline{x})d\underline{O}$ *Oberflächenintegral 2. Art,*
mit $d\underline{O}_{|\mathfrak{F}_j} := \varepsilon_j \cdot \underline{n}_{\mathfrak{F}_j} dO_{|\mathfrak{F}_j}$

Ist $\overline{\Omega}$ Normalbereich, dann ε_j aus Lemma 2.3.1. Sonst beginnen wir mit $\mathfrak{F}_1$. Setzen $\varepsilon_1 = 1$ und bauen uns zu M ein Gebiet, wobei $\underline{N}$ nach außen zeigt.

2.4 Partielle Integration und Integralsätze

Definition 2.4.1 (Säulenförmiges Gebiet (PI1)).
$G = \Omega$ sei beschränktes Gebiet, $\overline{G}$ Normalbereich und $G \subset C^1$, $\partial G \subset C^1$ (stückweise). Wir nennen G säulenförmig bzgl $x_1 (x_j,\ j = 1, \ldots, n)$ wenn $\forall \underline{x}^\# \in P_{\underline{x}^\#} G = G^\#$ mit $\underline{a} = \begin{pmatrix} a(\underline{x}^\#) \\ \underline{x}^\# \end{pmatrix}$ und $\underline{b} = \begin{pmatrix} b(\underline{x}^\#) \\ \underline{x}^\# \end{pmatrix}$, $\underline{a}, \underline{b} \in \overline{G}$, stets ihre Verbindungsstrecke in $\overline{G}$ liegt.

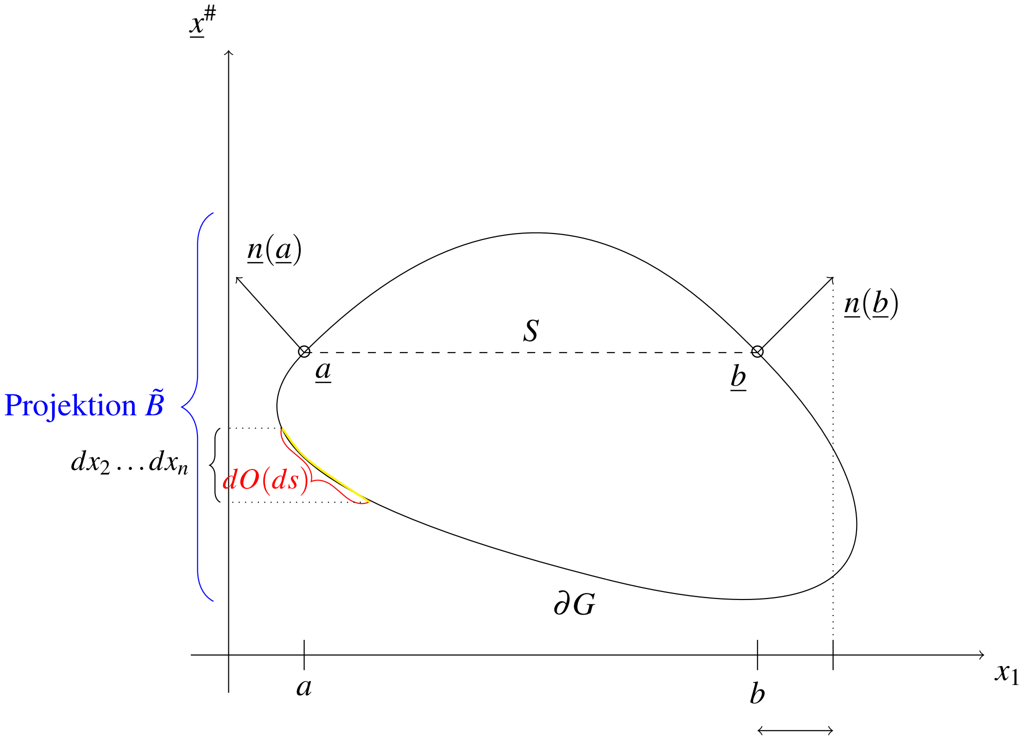
Bemerkung 2.4.1 (PI1).
Alle folgenden Argumentationen lassen sich lokal auf beliebige Normalbereiche der Klasse C^1 übertragen.

Satz 2.4.1 (Satz Partielle Integration im $\mathbb{E}^n$ (PI1))**.**
Seien $f,g \in C^1(\overline{G})$, G säulenförmig bzgl. x_j, dann gilt die folgende Integral-Identitätät:

$$\int\limits_G \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) g d^*\underline{x} = \int\limits_{\partial G} f(\underline{x})g(\underline{x})\cos(\underline{e}_j,\underline{n})dO - \int\limits_{\overline{G}} f\cdot\frac{\partial g}{\partial x_j} d^*\underline{x} \qquad j=1,\dots,n$$

Bemerkung 2.4.2 (PI2)**.**
Hier reicht $f,g \in C^0(\overline{G}) \cap C^1(G)$

Beweis. Satz 2.4.1 (Skizze)



$$n_1 = \cos(\underline{e}_1, \underline{n}(\underline{b})) = \underline{e}_1^T \cdot \underline{n}(\underline{b})$$

Nutzen die Formel $(S_\#)$ aus 2.1:

$$\int\limits_G f\underbrace{(x_1,\underline{x}^\#)}_{\underline{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \underline{x}^\#\end{bmatrix}} d^*\underline{x} = \int\limits_{P_{\underline{x}^\#}\overline{G}=G^\#} \int\limits_{a(\underline{x}^\#)}^{b(\underline{x}^\#)} f(x_1,\underline{x}^\#)dx_1 d^*\underline{x}^\# \qquad , (S_\#) \text{ liefert hier:}$$

$$\int\limits_{\overline{G}} \frac{\partial f}{\partial x_1} g d^*\underline{x} = \int\limits_{G^\#}\int\limits_{a(\underline{x}^\#)}^{b(\underline{x}^\#)} \frac{\partial f}{\partial x_1} g dx_1 d^*\underline{x}^\# \overset{\text{part. Int.}}{=} \underbrace{\int\limits_{G^\#} [f(\underline{b})g(\underline{b}) - f(\underline{a})g(\underline{a})]d^*\underline{x}^\#}_{(A)} - \int\limits_{\overline{G}} f\frac{\partial g}{\partial x_1} d^*\underline{x}$$

Hier gilt: $d^*\underline{x}^\# = \cos(\underline{e}_1,\underline{n})dO$ und $n_1(\underline{a}) = \underline{e}_1^T \cdot \underline{n}(\underline{a}) \leq 0$ sowie $n_1(\underline{b}) = \underline{e}_1^T \cdot \underline{n}(\underline{b}) \geq 0$

$$(A) = \int\limits_{\partial G: n_1(\dots)\geq 0} f(\underline{x})g(\underline{x})\cdot n_1 dO + \int\limits_{\partial G: n_1(\dots)\leq 0} -f(\underline{x})g(\underline{x})\cdot(-n_1)dO = \int\limits_{\partial G} f\cdot g\cdot n_1 dO$$

$\square$

Bemerkung 2.4.3 (PI3).

Satz 2.4.1 allg. für $g = 1$ bewiesen in Grundkurs Analysis, Teil 3, S. 117 ff.

Satz 2.4.2 (Gaußscher Integralsatz PI2).

Ω sei Normalbereich der Klasse C^1 im $\mathbb{E}^n$ und $\partial\Omega = \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega$, wobei $\partial_1\Omega = \bigcup_{j=1}^{N} \mathfrak{F}_j$ mit $\varepsilon_j = \pm 1$ und $\partial_2\Omega = \bigcup_{j=N+1}^{N_1} \mathfrak{F}_j$ mit $\varepsilon_j = 0$.

Dann gilt für $\underline{v} \in (\mathbb{C}^1(\overline{\Omega}))^n$:

$$\int\limits_{\overline{\Omega}} \operatorname{div} \underline{v}\, d^*\underline{x} = \oint\limits_{\partial_1\Omega} \underline{v}^T d\underline{O}$$

Beweis. Setze $g = 1,\ f = v_k,\ k = 1, \ldots, n$

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\overline{\Omega}} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} d^*\underline{x} = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\partial_1\Omega} v_k \cdot n_k dO = \int\limits_{\partial_1\Omega} \underline{v}^T d\underline{O}$$

□

Bemerkung 2.4.4 (PI4).

Im $\mathbb{E}^2$ haben wir für die Oberflächenintegrale entsprechende Kurvenintegrale. Ist Ω ein Normalbereich der Klasse C^1 im $\mathbb{E}^2$, so besteht sein Rand $\partial\Omega$ aus glatten Jordankurven. Hier gilt speziell mit entsprechender Parametrisierung:

$$\underline{n} = \frac{1}{\|\underline{\dot{x}}(t)\|_{\mathbb{E}^2}} \begin{bmatrix} \dot{x}_2(t) \\ -\dot{x}_1(t) \end{bmatrix} \qquad , \qquad \underline{\tau} = \frac{1}{\|\underline{\dot{x}}(t)\|_{\mathbb{E}^2}} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

Damit hat der Gaußscher Integralsatz die Gestalt:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{v}\, d^*\underline{x} = \oint_{\partial\Omega} (v_1\, dx_2 - v_2\, dx_1)$$

Die folgende Gleichung nennt man den „Stokesschen - oder auch Greenschen Integralsatz" der Ebene:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_2(\underline{x})}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1(\underline{x})}{\partial x_2} \right) d^*\underline{x} = \int_{\Omega} \operatorname{rot} \underline{v}\, d^*\underline{x} = \oint_{\partial\Omega} \underline{v}^T \cdot \tau\, ds = \oint_{\partial\Omega} \underline{v}^T d\underline{x}$$

Beweis. Einfach Formel der partiellen Integration aus Satz 2.4.1 anwenden. □

Satz 2.4.3 (Stokesscher Integralsatz PI3).

$\mathfrak{F}$ sei abgeschlossenes Flächenstück der Klasse C^1 im $\mathbb{E}^3$, $\underline{v} \in (C^1(G))^3$ und $\mathfrak{F} \subset G$, $\partial\mathfrak{F} = \partial_1\mathfrak{F} \cup \partial_2\mathfrak{F},\ \partial_1\mathfrak{F} = \bigcup_{j=1}^{N} \gamma_j$ (keine Schlitzkurven) und $\partial_2\mathfrak{F}$ bestehe nur aus Schlitzkurven.

Dann gilt:

$$\int\limits_{\mathfrak{F}} (\operatorname{rot} \underline{v})^T dO = \int\limits_{\partial_1\mathfrak{F}} \underline{v}^T d\underline{x}$$

Beweis. Es reicht, den Beweis für $\partial\mathfrak{F} = \partial_1\mathfrak{F} = \gamma$ zu führen, wobei $\mathfrak{F} = \underline{\varphi}(\overline{\varpi})$ sei, also Bild des Normalbereichs $\overline{\varpi}$ im $\mathbb{E}^2$:
Wir betrachten dazu den ersten Summanden im Kurvenintegral 2. Art:

$$\int\limits_{\gamma=\underline{\varphi}(\partial\omega)} v_1 dx_1 = \int\limits_{\partial\omega} v_1(\underline{x}(\underline{t}))(\frac{\partial x_1}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2}dt_2) = (\circ)$$

Auf $\overline{\varpi}$ können wir den ebenen Stokesschen (Greenschen) Integralsatz im Sinne von Bem. 2.4.4 anwenden und erhalten:

$$(\circ) = \int\limits_{\overline{\varpi}} \{\frac{\partial}{\partial t_1}(v_1\frac{\partial x_1}{\partial t_2}) - \frac{\partial}{\partial t_2}(v_1\frac{\partial x_1}{\partial t_1})\}d\omega \overset{\text{ausrechnen}}{=} \int\limits_{\overline{\varpi}} \{\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\cdot\frac{D(x_3,x_1)}{D\underline{t}} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\cdot\frac{D(x_1,x_2)}{D\underline{t}}\}d^*\underline{t}$$

Damit können wir das Ergebnis mit den Komponenten des Einheitsnormalenvektors $\underline{n}$ schreiben:

$$\int\limits_{\gamma=\underline{\varphi}(\partial\omega)} v_1 dx_1 = \int\limits_{\mathfrak{F}=\underline{\varphi}(\overline{\varpi})} \{\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\cdot n_2 - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\cdot n_3\}dO$$

Analoges Vorgehen für den zweiten und dritten Summanden des Kurvenintegrals 2. Art liefert die Behauptung des Satzes. □