Rechenregeln für Fourier- und Laplace-Transformationen

PD Dr. B. Rummler / Dr. Uwe Risch

11.12. 2014

1. Rechenregeln für die Fourier-Transformation im $\mathbb{E}^1$

   Es seien f und g komplexwertige Funktionen: $f\,,g\,:\mathbb{E}^1 \longrightarrow \mathbb{E}^1_{\mathbb{C}}$.
   f und g seien über $(-\infty,\infty)$ absolut integrierbar, das heißt:

   $\exists\ \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$ und $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\,dt$

   Die Faltung der komplexwertigen, absolut integrierbaren Funktionen f und g werde erklärt durch:

   $f * g = g * f = (f * g)(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt$

   Für die durch

   (I) $\mathfrak{F}(f) = \mathfrak{F}(f(x))(\xi) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} exp(-ix\xi)f(x)\,dx = \hat{f}(\xi)$

   erklärte Fourier-Transformation $\mathfrak{F}(f)$ der komplexwertigen, absolut integrierbaren Funktion f gelten die folgenden Rechenregeln, wobei die Aussagen gegebenenfalls für alle komplexwertigen, absolut integrierbaren Funktionen f und g und für alle $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ anwendbar sind:

   (I i) Linearität $\mathfrak{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot \mathfrak{F}(f) + \beta \cdot \mathfrak{F}(g)$

   (I ii) Stauchungssatz $\mathfrak{F}(f(ax))(\xi) = \frac{1}{a}\mathfrak{F}(f(x))(\frac{\xi}{a})\ \forall\, a \in \mathbb{R}\,,\ a \neq 0$

   (I iii) Verschiebungssatz $\mathfrak{F}(f(x-a))(\xi) = \exp(-ia\xi)\mathfrak{F}(f(x))(\xi)\ \forall\, a \in \mathbb{R}$

   (I iv) Differentiationsformel $\mathfrak{F}(f'(x))(\xi) = i\xi\mathfrak{F}(f(x))(\xi)$
   (Hier ist f auf ganz $\mathbb{E}^1$ differenzierbar mit komplexwertiger, absolut integrierbarer Ableitung f'.)

   (I v) Integrationssatz $\mathfrak{F}(g(x))(\xi) = \frac{1}{i\xi}\mathfrak{F}(f(x))(\xi)\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}\,,\ \xi \neq 0$

   (Hier sei die Funktion g auf ganz $\mathbb{E}^1$ als komplexwertige, absolut integrierbarer Funktion erklärt durch:

   $$g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt. \qquad)$$

   (I vi) Faltungssatz $\mathfrak{F}((f * g)(x))(\xi) = \mathfrak{F}(f)(\xi) \cdot \mathfrak{F}(g)(\xi)$

   Schließlich wird die inverse Fourier-Transformation erklärt durch:

   $\mathfrak{F}^{-1}(\phi) = \mathfrak{F}^{-1}(\phi(\xi))(x) := \int_{-\infty}^{\infty} exp(ix\xi)\phi(\xi)\,d\xi$

2. <u>Rechenregeln für die Laplace-Transformation im $\mathbb{E}^1$</u>

Es seien f und g reellwertige Funktionen: $f\,,g\,:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{E}^1$.
f und g seien von exponentieller Ordnung. Das heißt:

Es existieren Konstanten: $M_f,\,M_g\,,\gamma_f,\,\gamma_g\,\in\,(0,\infty)$, so dass

$|f(t)|\,\leq\,M_f\exp(\gamma_f t)$ und $|g(t)|\leq M_g\exp(\gamma_g t)\quad\forall\,t\,\in\,[0,\infty)$

Die Faltung der reellwertigen Funktionen f und g von exponentieller Ordnung werde erklärt durch:

$f\,*_L\,g\,=\,g\,*_L\,f\,=\,(f*_L g)(t)\;:=\;\int_0^t f(t-s)g(s)\,dt\,\{=\,2\pi\cdot(f\,*\,g)\,\}$

Für die durch

(II) $\mathfrak{L}(f)\,=\,\mathfrak{L}(f(t))(p)\;:=\;\int_0^\infty exp(-pt)f(t)\,dt$

erklärte Laplace-Transformation $\mathfrak{L}(f)$ der reellwertigen Funktion f exponentieller Ordnung gelten die folgenden Rechenregeln, wobei die Aussagen gegebenenfalls für alle reellwertigen, Funktionen f und g exponentieller Ordnung und für alle $\alpha,\,\beta\,\in\,\mathbb{R}$ anwendbar sind:

(II i) LINEARITÄT $\mathfrak{L}(\alpha f+\beta g)\,=\,\alpha\cdot\mathfrak{L}(f)+\beta\cdot\mathfrak{L}(g)$

(II ii) STAUCHUNGS-(ÄHNLICHKEITS-)SATZ
$\mathfrak{L}(f(at))(p)\,=\,\frac{1}{a}\mathfrak{L}(f(t))(\frac{p}{a})\;\forall\,a\,\in\,\mathbb{R}\,,\,a\,>\,0$

(II iii a) DÄMPFUNGSSATZ $\mathfrak{L}(\exp(-at)f(t))(p)\,=\,\mathfrak{L}(f(t))(p+a)\;\forall\,a\,\in\,\mathbb{R}$

(II iii b) VERSCHIEBUNGSSATZ $\mathfrak{L}(f(t-a))(p)\,=\,\exp(-ap)\mathfrak{L}(f(t))(p)\;\forall\,a\,\in\,\mathbb{R}$

(II iv) DIFFERENTIATIONSFORMELN: (Hier sei f entsprechend differenzierbar!)

(II iv a) $\mathfrak{L}(t^n f(t))(p)\,=\,(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}\mathfrak{L}(f(t))(p)\;\forall\,n\,\in\,\mathbb{N}$

(II iv b) $\mathfrak{L}(f'(t))(p)\,=\,p\mathfrak{L}(f(t))(p)\,-\,f(0)$

(II iv c) $\mathfrak{L}(f''(t))(p)\,=\,p^2\mathfrak{L}(f(t))(p)\,-\,pf(0)\,-\,f'(0)$

(II iv d) $\mathfrak{L}(f^{(n)}(t))(p)\,=\,p^n\mathfrak{L}(f(t))(p)\,-\,p^{n-1}f(0)\,-\,p^{n-2}f'(0)\,-\,...\,-\,f^{(n-1)}(0),$
$\forall\,n\,\in\,\mathbb{N}$

(II v) INTEGRATIONSSÄTZE

(II v a) $\mathfrak{L}(\int_0^t f(\tau)\,d\tau)(p)\,=\,\frac{1}{p}\mathfrak{L}(f(t))(p)\;\forall\,p\,\in\,\mathbb{C}\,,\,p\,\neq\,0$

(II v b) $\mathfrak{L}(\frac{1}{t}f(t))(p)\,=\,\int_p^\infty\mathfrak{L}(f(t))(s)\,ds\;\forall\,t\,\in\,\mathbb{R}\,,\,t\,>\,0$

(II vi) FALTUNGSSATZ $\mathfrak{L}((f*_L g)(t))(p)\,=\,\mathfrak{L}(f)(p)\cdot\mathfrak{L}(g)(p)$

Bemerkung: Die Inverse der Laplace-Transformation wird über geeignete Kurvenintegrale 2.Art im Komplexen erklärt. Für gewisse Klassen von Funktionen findet man deren Laplace-Transformationen und damit auch die Inversen (die ursprünglichen Funktionen) in Tabellenform.