Methoden der mathematischen Physik
Übungsaufgaben , Serie 4:

PD Dr. B. Rummler

19.05. 2017

1. Die Funktion $\tilde{g} : \mathbb{E}^2 \backslash \{\underline{0}\} =: D(\tilde{g}) \longrightarrow \mathbb{E}^1$ sei erklärt durch:

$$\tilde{g}(\underline{x}) := -\frac{\log \|\underline{x}\|_{\mathbb{E}^2}}{2\pi} \qquad \forall \, \underline{x} \in D(\tilde{g}) \, .$$

   Überprüfen Sie, dass $\tilde{g} \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^2)$ gilt.
   Zeigen Sie analog zum Beweis von Satz 1 (Abschnitt 2.2), dass die durch $\tilde{g}$ erklärte Distribution $\tilde{G}$ Fundamentallösung der Laplacegleichung im $\mathbb{R}^2$ ist.

2. Polar-(Kugel-)koordinaten im $\mathbb{R}^n$ erklärt man unter Verwendung von $r := \|\underline{x}\|_{\mathbb{E}^n}$ durch:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} r \cdot \cos \vartheta_1 \\ r \cdot \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \\ \vdots \\ r \cdot \sin \vartheta_1 \cdots \sin \vartheta_{n-2} \cos \vartheta_{n-1} \\ r \cdot \sin \vartheta_1 \cdots \sin \vartheta_{n-2} \sin \vartheta_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (\circ) \, .$$

$$\text{bei} \quad \vartheta_j \in [0, \pi] \, \forall \, j = 1, \dots, n-2 \text{ und } \vartheta_{n-1} \in [0, 2\pi)$$

   Berechnen Sie die Jacobi-Determinante der Transformation und geben Sie für die Kugel mit dem Radius $r = R$ das Oberflächenelement an.

3. Vorgegeben sei die Helmholtzsche Gleichung im $\mathbb{R}^3$ bei $k \in \mathbb{N}$ in Gestalt der Gleichung für Fundamentallösungen $\tilde{G}$ $(I_H\delta)$:

$$-(\triangle \tilde{G} + k^2 \tilde{G}) = \delta \qquad (I_H\delta)$$

   Desweiteren seien die Funktionen $\tilde{g}_\pm : \mathbb{E}^3 \backslash \{\underline{0}\} =: D(\tilde{g}_\pm) \longrightarrow \mathbb{E}^1$ erklärt durch:

$$\tilde{g}_\pm(\underline{x}) := \frac{\exp\,(\pm i \, k \|\underline{x}\|_{\mathbb{E}^3})}{4\pi \|\underline{x}\|_{\mathbb{E}^3}} \qquad \forall \, \underline{x} \in D(\tilde{g}) \, .$$

   Überprüfen Sie, ob die Funktionen $\tilde{g}_\pm$ zu $L_1^{loc}(\mathbb{R}^3)$ gehören und ob durch die mittels $\tilde{g}_\pm$ erklärten Distributionen $\tilde{G}_\pm$ Fundamentallösungen (von $(I_H\delta)$) sind.

4. Geben Sie alle harmonischen Polynome höchstens zweiten Grades im $\mathbb{E}^3$ an. Leiten Sie aus der Laplace-Gleichung unter Verwendung der Polar-(Kugel-)koordinaten im $\mathbb{R}^3$ aus Aufgabe 6. eine partielle Differentialgleichung für die harmonischen Polynome auf dem Rand ω_3 der Einheitskugel $K(\underline{0}, 1)$ im $\mathbb{E}^3$ her.
   Erzeugen Sie aus den harmonischen Polynomen höchstens zweiten Grades eingeschränkt auf ω_3 ein $\mathbb{L}_2(\omega_3)$-Orthonormalsystem.