Methoden der mathematischen Physik
Übungsaufgaben , Serie 3:

PD Dr. B. Rummler

28.04. 2017

1) Die Funktion $h : (-\infty, \infty) = D(h) \longrightarrow \mathbb{E}^1$ sei erklärt durch:

$$h(s) := \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2} - its\right) dt \qquad \forall\, s \in (-\infty, \infty)\,.$$

Bekannt ist außerdem, dass $h(0) = \sqrt{2\pi}$ gilt.
Zeigen Sie: Die Funktion h genügt der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$h'(s) = -s \cdot h(s) \qquad \text{und}$$

bestimmen Sie h!

2) Nutzen Sie das Ergebnis der 1. Aufgabe für die Berechnung der Fouriertransformation

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{1}{2}||\underline{x}||^2_{\mathbb{E}^n}}) = \mathcal{F}(\exp(-\frac{||\underline{x}||^2_{\mathbb{E}^n}}{2}))\,!$$

3) Vorgegeben sei die Heaviside-Funktion $H : (-\infty, \infty) = D(H) \longrightarrow \mathbb{E}^1$ und die Funktion $u : (-\infty, \infty) = D(u) \longrightarrow \mathbb{E}^1$, mit:

$$u(t) := 4\sin(t) \cdot H(t)$$

Überprüfen Sie, ob u im distributionelen Sinne Lösung der Gleichung

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = 4\delta$$

ist.

4) Zeigen Sie vermittels *partieller* Fouriertransformation die Richtigkeit der Poisson'sche Lösungformel für das Dirichletsche Randwertproblem der Laplace-Gleichung in der Halbebene $\mathcal{H}_+$:

Die Lösung $u : \overline{\mathcal{H}}_+ \longrightarrow \mathbb{E}^1$ des Randwertproblemes

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = 0 \qquad \text{in} \quad \mathcal{H}_+ := \{\underline{x} \in \mathbb{E}^2 \,:\, x_2 > 0\} \quad \text{mit}$$

$$u(x_1, 0) = f(x_1) \quad \forall\, x_1 \in (-\infty, \infty) \,\text{und} \quad f \in C(\mathbb{R}^1) \quad \text{sowie}$$

f beschränkt, wird durch die Poisson'sche Lösungformel

$$u(x_1, x_2) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_2}{(x_1 - t)^2 + x_2^2} f(t)\, dt \qquad \forall\, \underline{x} \in \mathcal{H}_+$$

beschrieben. Untersuchen Sie zudem, in welchem Sinne die Randbedingungen angenommen werden.