Methoden der mathematischen Physik

Übungsaufgaben , Serie 2:

PD Dr. B. Rummler

18.04. 2017

1) (*Normäquivalenz auf endlichdimensionalen linearen VR*)
Vorgegeben sei der endlichdimensionale lineare Vektorraum X über dem Körper $\mathbb{R}$. Die Dimension von X sei $N := dim X$. Eine Basis von X sei durch $\{\mathfrak{a}_j\}_{j=1}^{N}$ gegeben. Auf X seien die Normen $||.||_1$ und $||.||_2$ erklärt.

   a) Zeigen Sie die Äquivalenz der beide Normen, also: Die Existenz zweier positiver Konstanten m, M mit $0 < m < M < \infty$, so dass
   $m \cdot ||x||_1 \leq ||x||_2 \leq M \cdot ||x||_1$ für alle $x \in X$ gilt.

   b) Zeigen Sie, dass ein endlichdimensionaler linearer Teilraum X des normierten Raumes $\mathbb{Y}$ im Sinne von $X \subset \mathbb{Y}$ abgeschlossen ist.

   c) Zeigen Sie, dass ein System von Halbnormen $\{p_k(.)\}_{k=1}^{K}$ auf X mit der Eigenschaft, dass
   $x \in X$ mit $x \neq o_X$ $\exists\, k \in \{1, \ldots, K\}$ mit $p_k(x) \neq 0$
   eine Hausdorffsche Topologie auf X induziert. Konstruieren Sie mit diesem System von Halbnormen eine Metrik auf X!

2) Vorgegeben seien die Funktionen-Folgen $\{f_k(.)\}_{k=1}^{\infty}$ mit $f_k : \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^1 \quad \forall\, k = 1, 2, 3, \ldots$
Untersuchen Sie die Folgen auf punktweise Konvergenz, bei

   a) $f_k(t) := \frac{k}{2}\exp(-k\,|t|) \quad \forall\, t \in \mathbb{E}^1,\, k = 1, 2, 3, \ldots$
   b) $f_k(t) := \frac{2k}{\pi}(\exp(-kt) + \exp(kt))^{-1} \quad \forall\, t \in \mathbb{E}^1,\, k = 1, 2, 3, \ldots$
   c) $f_k(t) := \frac{k}{\pi}(1 + k^2t^2)^{-1} \quad \forall\, t \in \mathbb{E}^1,\, k = 1, 2, 3, \ldots$

3) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{\sqrt[6]{x}}{x}$ im Intervall $(0, 1]$.
Zu welchen Räumen $\mathbb{L}_p((0,1)) = \mathbb{L}_p(0,1)$, $p \geq 1$, gehört $f(x)$ (- als Repräsentant einer Äquivalenzklasse -)?

4) Die Menge $F \subset \mathbb{E}^n$ sei kompakt, $[X, \mathfrak{A}, \mu] := [\mathbb{R}^n, \mathfrak{A}_{\mu_L}, \mu_L]$ und der Abstand eines Punktes $\underline{x} \in \mathbb{E}^n$ von der Menge F sei erklärt durch:

$$\rho_F(\underline{x}) := \inf_{\underline{y} \in F}(||\underline{x} - \underline{y}||_{\mathbb{E}^n}) . \quad \text{Zeigen Sie:}$$

   a) Für alle $\underline{x} \in \mathbb{E}^n$ gilt für die charakteristische Funktion $\chi_F(.)$ von F :

$$\chi_F(\underline{x}) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1 + k\rho_F(\underline{x})} .$$

   b) Für $E \in \mathfrak{A}_{\mu_L}$ mit $\mu_L(E) < \infty$ gilt im Sinne der Konvergenz im $\mathbb{L}_p(E)$, $(p \in [1, \infty))$:
   $$\{[\frac{1}{1 + k\rho_F(\underline{x})}]\}_{k=1}^{\infty} \longrightarrow [\chi_F(\underline{x})]$$