

Methoden der mathematischen Physik

Übungsaufgaben, Serie 1:

PD Dr. B. Rummeler

31.03. 2017

1) Gegeben sei das Randwertproblem (RWP):

$$-u''(x) = -\frac{d^2}{dx^2}u(x) = f(x) \quad , \quad u(0) = u(\pi) = 0.$$

a) Lösen Sie das RWP mit Hilfe der bekannten Lösungstheorie linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen, und zwar für die beiden Fälle

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

und

$$f(x) = x(\pi - x), \quad x \in [0, \pi].$$

b) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit der Lösungsdarstellung vermittels der zugehörigen Green'sche Funktion $G(x, s)$?

2) Lösen Sie das Anfangs-Rand-Wert-Problem für $u : [0, \infty) \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{E}^1$:

$$\begin{aligned} u_t(t, x) - 16 \cdot u_{xx}(t, x) &= 0 & \forall (t, x) \in (0, \infty) \times (0, \pi) \\ u(t, 0) = u(t, \pi) &= 0 & \forall t \in (0, \infty) \\ u(0, x) &= \sin(x) - 2 \sin(5x) & \forall x \in (0, \pi) \end{aligned}$$

3) Vorgegeben seien die Funktionen $f_\kappa : D(f_\kappa) := [-1, 1] \subset \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{E}^1$ mit $f_\kappa(x) = |x|^\kappa \quad \forall x \in [-1, 1]$ bei $\kappa \in (0, 5]$.

Untersuchen Sie, für welche κ die Funktion f_κ zu den folgenden Banachräumen gehört:

a) $\mathbb{C}^1[-1, 1]$

b) $\mathbb{C}^{0,1}[-1, 1]$

c) $\mathbb{C}^{0,\beta}[-1, 1]$ bei $\beta \in (0, 1)$ und β fix.