Prof. Dr. H.-Ch. Grunau

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I
Sommersemester 2015

1 07.04.2015

Aufgabe 1.1 Gegeben seien die Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$. Man berechne die Oberfläche des von a, b erzeugten Parallelogramms. Leiten Sie Ihre Formel aus elementaren Tatsachen der linearen Algebra her.

Aufgabe 1.2 Seien $x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ und $z := x_2 \times \ldots \times x_n$. Man zeige:

$$|z|^2 = \det\left((x_2, \ldots, x_n)^T \circ (x_2, \ldots, x_n)\right).$$

Hinweis. Überlegen Sie sich eine allgemeinere Identität für Skalarprodukte von Kreuzprodukten und verwenden Sie zu deren Herleitung die allgemeinen Eigenschaften von Skalarprodukt, Kreuzprodukt und Determinante.

Aufgabe 1.3 Ein Torus T mit Radien $0 < r < R$ werde durch

$$\Phi : G \;=\; [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,$$

$$\Phi(\alpha, \beta) \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\alpha)(R + r\cos(\beta)) \\ \sin(\alpha)(R + r\cos(\beta)) \\ r\sin(\beta) \end{pmatrix}$$

parametrisiert. Man berechne die Oberfläche (d.h., das zweidimensionale Volumen) des Torus.

Aufgabe 1.4 (a) Sei $R > 0$ und $f \in C^0(\overline{B_R(0)})$. Man beweise die folgende Formel:

$$\int_{B_R(0)} f(x)\,dx = \int_0^R \int_{\partial B_r(0)} f(x)\,dS(x)dr = \int_0^R r^{n-1} \int_{\partial B_1(0)} f(rx)\,dS(x)dr.$$

Hinweis. Parametrisieren Sie obere und untere Halbsphären als Graphen.

(b) Sei $\mathbb{S}_R^{n-1} = \partial B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ die Sphäre von Radius R in $\mathbb{R}^n$ und $e_n := \mathrm{vol}_n(B_1(0)) := \int_{B_1(0)} dx$ das Volumen der Einheitskugel. Man beweise, dass

$$\mathrm{vol}_{n-1}(\mathbb{S}_R^{n-1}) := \int_{\partial B_R(0)} dS(x) = n e_n R^{n-1}.$$

(c) Formulieren Sie die Formel aus Aufgabenteil (a) für radialsymmetrische Funktionen.

Aufgabe 1.5 Zeigen Sie unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes, dass

$$\int_{B_1(0)} \log(|x|)\,dx = -\frac{e_n}{n}.$$

Hinweis. Man zeige zunächst für $F(x) := x\,\log(|x|)$ ($x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$), dass

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0)} \mathrm{div}(F)\,dx = 0.$$

Aufgabe 1.6 Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei positiv semidefinite symmetrische Matrizen. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Spur}(A \circ B) \geq 0.$$

Dabei bezeichnet $\mathrm{Spur}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$ die Spur der Matrix $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen am Dienstag, den 14.04.2015 in der Vorlesung ab.

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I
Sommersemester 2015

2 14.04.2015

Wir erinnern an die Definition der *Rotation* eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{rot}(F) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres Gebiet gemäß Definition 0.5 der Vorlesung mit äußerem Einheitsnormalenfeld ν an $\partial\Omega$ und $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld. Man beweise, dass

$$\int_\Omega \operatorname{rot}(F)\, dx = -\int_{\partial\Omega} F \times \nu \, dS.$$

Aufgabe 2.2 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein reguläres Gebiet mit äußerem Einheitsnormalenfeld ν an $\partial\Omega$. Seien $f, g \in C^2(\overline{\Omega})$. Man beweise die Greensche Formel:

$$\int_\Omega (\Delta f(x) \cdot g(x) - \Delta g(x) \cdot f(x))\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial \nu}(x) g(x) - f(x) \frac{\partial g}{\partial \nu}(x) \right) dS(x),$$

wobei $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x) = \nabla f(x) \cdot \nu(x)$ die äußere Normalenableitung in $x \in \partial\Omega$ bezeichnet.

Aufgabe 2.3 (a) Sei $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar. Differentialoperatoren werden auf Vektorfelder stets komponentenweise angewandt wie z.B.:

$$\Delta E = \begin{pmatrix} \Delta E_1 \\ \Delta E_2 \\ \Delta E_3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} E = -\Delta E + \operatorname{grad} \operatorname{div} E.$$

(b) Seien $E, B : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbare Lösungen der ladungsfreien Maxwell-Gleichungen im Vakuum:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div}_x E(t,x) = \operatorname{div}_x B(t,x) = 0 \\ \dfrac{\partial E}{\partial t} = \operatorname{rot}_x B, \quad \dfrac{\partial B}{\partial t} = -\operatorname{rot}_x E \end{array} \right\} \text{ auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3.$$

Beweisen Sie, dass E und B in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ die Wellengleichungen erfüllen:

$$E_{tt} - \Delta E = 0, \quad B_{tt} - \Delta B = 0.$$

Aufgabe 2.4 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein reguläres Gebiet mit äußerem Normalenfeld ν an $\partial\Omega$. Es sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dann gilt notwendigerweise

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \, dS(x) = -\int_{\Omega} f(x)\, dx.$$

Aufgabe 2.5 Betrachten Sie für eine Konstante $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die eindimensionale *Wellengleichung*

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad \text{für } (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Man benutze die Koordinatentransformation

$$\begin{cases} \xi & = & x + ct, \\ \eta & = & x - ct, \\ v(\xi,\eta) & := & u(t,x). \end{cases}$$

Studieren Sie das Differentialgleichungsproblem in den neuen Koordinaten (ξ, η) und bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

Aufgabe 2.6 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

(a) Sei u *strikt subharmonisch*, das heißt $-\Delta u < 0$ in Ω. Man beweise, dass u in Ω kein lokales Maximum besitzt.

(b) Sei nun u *subharmonisch* ($-\Delta u \leq 0$ in Ω). Man beweise, dass u sein Maximum auf dem Rand annimmt, d.h.

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Hinweis. Man wende (a) auf die Funktion $v_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon |x|^2$ mit beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ an.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen am Dienstag, den 21.04.2015 in der Vorlesung ab.

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I
Sommersemester 2015

3 21.04.2015

Aufgabe 3.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein reguläres Gebiet. Sei $u \in C^2([0,\infty) \times \overline{\Omega})$ eine Lösung der Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f \quad \text{in} \quad [0,\infty) \times \Omega, \\ u &= g \quad \text{in} \quad [0,\infty) \times \partial\Omega, \\ u(0) &= \varphi, \qquad u_t(0) = \psi \quad \text{in} \quad \Omega, \end{aligned}$$

wobei $f, g \in C^2([0,\infty) \times \overline{\Omega})$ und $\varphi, \psi \in C^2(\overline{\Omega})$ die vorgegebenen Anfangsdaten sind. Zeigen Sie, dass für jede Funktion $v \in C^2([0,\infty) \times \overline{\Omega})$, welche der Wellengleichung mit denselben Daten genügt, stets gilt: $v = u$ (Eindeutigkeit der Lösung).
Hinweis. Zeigen Sie, dass $w := u - v$ der homogenen Wellengleichung genügt, multiplizieren Sie diese mit w_t und führen Sie partielle Integration durch.

Aufgabe 3.2 (Navier-Stokes-Gleichungen) Wir betrachten die wohl bekannteste Gleichung aus der Fluiddynamik, die Navier-Stokes-Gleichung. Genauer handelt es sich zum Einen um die Impulsbilanz eines inkompressiblen Newtonschen Fluids in vereinfachter Form:

$$\varrho \left(u_t + \left(\sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) u \right) - \eta \Delta u + \nabla p = 0 \tag{1}$$

und zum Anderen um die Kontinuitätsgleichung (Inkompressibilitätsbedingung):

$$\operatorname{div}_x(u) = 0. \tag{2}$$

Dabei sind $\varrho, \eta > 0$ gegebene physikalische Konstanten; Dichte und Viskosität. Wir nehmen an, dass hinreichend glatte Lösungen $p : [0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u : [0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ von (1) und (2) in $[0,\infty) \times \mathbb{R}^3$ existieren.

(a) Zeigen Sie, dass entlang einer Stromlinie $s \mapsto \gamma(s)$ mit $\gamma'(s) = u(\gamma(s))$ für die stationären ($u_t = 0$), inkrompressiblen, reibungsfreien ($\eta = 0$) Navier-Stokes-Gleichungen (man spricht dann auch von den Euler-Gleichungen) die Gleichung

$$\frac{\varrho}{2} |u(\gamma(s))|^2 + p(\gamma(s)) = c(\gamma)$$

gilt. Dieses ist auch als das Bernoulli-Gesetz bekannt.

(b) Studieren Sie geeignete Skalierungen von Zeit, Ort, Druck und Geschwindigkeitsfeld, so dass das so genannte hydrodynamische Ähnlichkeitsgesetz gilt, d.h. dass die mit Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reskalierten Größen $(t,x) \mapsto \alpha p(\gamma t, \delta x)$, $(t,x) \mapsto \beta u(\gamma t, \delta x)$, dieselben Differentialgleichungen (1), (2) erfüllen.

(c) Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes glattes Gebiet und $p : [0, \infty) \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $u : [0, \infty) \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ seien hinreichend glatte klassische Lösungen des Navier-Stokes-Systems (1), (2) in $[0, \infty) \times \overline{\Omega}$. Weiter werde das Geschwindigkeitsfeld u homogenen Dirichletrandbedingungen (Haftrandbedingungen) unterworfen:

$$u(t, x) = 0 \text{ für } t \geq 0, x \in \partial\Omega.$$

Zeigen Sie: Unter diesen starken Annahmen gilt für alle $T > 0$ die Energiebilanz

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |u(T, x)|^2 \, dx + \frac{\eta}{\varrho} \int_0^T \int_\Omega |\nabla u(t, x)|^2 \, dx \, dt = \frac{1}{2} \int_\Omega |u(0, x)|^2 \, dx.$$

Differenzieren Sie diese Gleichung bzgl. T und verwenden Sie die Poincaré-Friedrichs-Ungleichung, um daraus für die betrachteten klassischen Lösungen herzuleiten, dass mit einer geeigneten Konstanten $c = c(\Omega, \eta, \varrho) > 0$ für $T > 0$ gilt:

$$\int_\Omega |u(T, x)|^2 \, dx \leq e^{-cT} \int_\Omega |u(0, x)|^2 \, dx.$$

Bemerkung. Die Existenz solcher **klassischen** Lösungen nachzuweisen ist eines der ungelösten Clay-Milleniums-Probleme.

Aufgabe 3.3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und harmonisch. Konstruieren Sie eine holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{Re}\,(f) = u$. Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass die Voraussetzung einfachen Zusammenhangs im Allgemeinen notwendig ist.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen am Dienstag, den 28.04.2015 in der Vorlesung ab.
Für die Bearbeitung von Aufgabe 3.2 (c) können Sie bis zu 5 Zusatzpunkte erwerben.

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I
Sommersemester 2015

4 28.04.2015

Aufgabe 4.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ ein Gebiet und es sei $u \in C^2(\Omega)$ eine harmonische Funktion. Gegeben sei auch eine reguläre Kurve $\Gamma \subset \Omega$, die ein stetiges Normaleneinheitsvektorfeld $\nu(x,y)$, $(x,y) \in \Gamma$ hat. Schließlich gelte:

$$u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,y) = 0 \quad \text{für alle} \quad (x,y) \in \Gamma.$$

Zeigen Sie, dass für alle $(x,y) \in \Omega$ gilt: $u(x,y) = 0$.
Hinweis. Aufgabe 3.3 und ein Zusammenhangsargument.

Aufgabe 4.2 (a) Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und radialsymmetrisch, d.h. es existiert eine Funktion $\hat{u} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, so dass

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n : \qquad u(x) \;=\; \hat{u}(|x|).$$

Beweisen Sie, dass $\hat{u} \in C^2([0,\infty))$ und dass mit $r = |x|$ gilt:

$$(\Delta u)(x) \;=\; \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\hat{u}(r).$$

(b) Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Man definiere

$$v(r,\varphi) \;=\; u(r\cos\varphi, r\sin\varphi), \quad r \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass

$$(\Delta u)(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \;=\; \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\varphi) \;+\; \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\varphi) \;+\; \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}(r,\varphi).$$

Für die Bearbeitung von Aufgabe 4.4 dürfen Sie das folgende Resultat ohne Beweis verwenden.

Satz 4.3 *Sei $1 \leq p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere konvexe beschränkte offene Menge. Dann existiert eine positive Konstante C, die nur von p und Ω abhängt, so dass für alle $u \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt:*

$$\|u - \overline{u}\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)};$$

dabei bezeichnet

$$\overline{u} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(y)\, dy\,.$$

den Mittelwert von u auf Ω.

Aufgabe 4.4 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere konvexe beschränkte reguläre offene Menge mit äußerer Einheitsnormale ν. Für $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$ sei $u \in C^2([0,\infty) \times \overline{\Omega})$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung unter *Neumannrandbedingungen*:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } [0,\infty) \times \overline{\Omega}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(t,x) = 0 & \text{für } (t,x) \in [0,\infty) \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = \varphi(x) & \text{für } x \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $t \geq 0$ gilt:

$$\int_\Omega u(t,x)\,dx = \int_\Omega \varphi(x)\,dx.$$

(b) Wie oben bezeichne

$$\overline{\varphi} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \varphi(y)\;dy$$

den Mittelwert von φ auf Ω. Zeigen Sie, dass es eine nur von Ω abhängige Konstante $C = C(\Omega) > 0$ gibt, so dass für alle $t \geq 0$ gilt:

$$\|u(t,\,.\,) - \overline{\varphi}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{-Ct} \|\varphi(\,.\,) - \overline{\varphi}\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Aufgabe 4.5 Sei $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ radialsymmetrisch und integrierbar mit $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 1$. Zeigen Sie, dass für jede harmonische Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n : \qquad u(x) \;=\; \lim_{R\to\infty} \int_{B_R(x)} u(y) f(x-y)\,dy.$$

Hinweis. Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen.

Aufgabe 4.6 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(a) Sei $u \in C^2(\Omega)$ eine harmonische Funktion. Zeigen Sie, dass für jedes $x_0 \in \Omega$ und $0 < R < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ gilt:

$$|\nabla u(x_0)| \;\leq\; \frac{n}{R} \max_{x \in \partial B_R(x_0)} |u(x) - u(x_0)|.$$

Hinweis. Differenzieren Sie die Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen und verwenden Sie den Satz von Gauß.

(b) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine harmonische Funktion. Zeigen Sie: Ist u zudem in ganz $\mathbb{R}^n$ beschränkt, so ist u konstant.

(c) Verwenden Sie die Argumente aus dem Beweis von Teil (a), um zu zeigen: Jede harmonische Funktion $u \in C^2(\Omega)$ ist beliebig oft differenzierbar.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen am Dienstag, den 05.05.2015 in der Vorlesung ab.

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I
Sommersemester 2015

5 05.05.2015

Aufgabe 5.1 Wir betrachten noch einmal das folgende Anfangsrandwertproblem für die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & t > 0,\ x \in (0,\pi), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & t > 0, \\ u(0,x) = \varphi(x) & x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Sei $\varphi \in C^2([0,\pi])$ und erfülle die Kompatibiltätsbedingungen $\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0$. Zeigen Sie, dass das Anfangsrandwertproblem eine Lösung

$$u \in C^0\left([0,\infty) \times [0,\pi]\right) \cap C^\infty\left((0,\infty) \times [0,\pi]\right)$$

besitzt.
Hinweis. Beachten Sie, dass

$$v_k(t,x) := \exp(-k^2 t) \cdot \sin(kx),$$

$k \in \mathbb{N}$, die Differentialgleichung und die Randbedingungen erfüllt. Setzen Sie φ zunächst ungerade und dann 2π-periodisch als C^2-Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fort. Betrachten Sie die Fourierreihe dieser Funktion und finden Sie so eine geeignete Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so dass die Funktion

$$u(t,x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_k v_k(t,x)$$

die gewünschten Eigenschaften hat.

Aufgabe 5.2 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ offen. Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ subharmonisch, d.h. $-\Delta u \leq 0$ in Ω. Außerdem nehmen wir an, dass

(i) $u < 0$ in Ω und $u(x_0) = 0$, u ist in x_0 differenzierbar,

(ii) es existiert eine Kugel $B_R(y) \subset \Omega$ mit $x_0 \in \partial B_R(y)$.

Zeigen Sie, dass unter den obigen Voraussetzungen gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

Hinweis. Man betrachte auf $A := B_R(y) \setminus \overline{B_\rho(y)}$ $(0 < \rho < R)$ die Funktion $v_\varepsilon(x) = \varepsilon\Big(\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}}\Big)$ mit hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ und wende das schwache Maximumprinzip auf $w = u + v_\varepsilon$ an.

Aufgabe 5.3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, welches im Streifen $\{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_1 \leq d\}$ liegt. Für $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ gelte $-\Delta u + c(x) \cdot u \leq 0$ mit einer Funktion $c(\,.\,) < 0$.

(a) Zeigen Sie für $c = -1$ unter der Bedingung $d \in (0, \log 2)$ die folgende Abschätzung

$$\sup_{\Omega} u \leq \frac{1}{2 - e^d} \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

(b) Können Sie eine ähnliche Abschätzung auch für ein allgemeines $c(\,.\,) < 0$ geben? Begründen Sie!

Hinweis zu (a). Betrachten Sie die Fälle $\sup_{\Omega} u \leq 0$ und $\sup_{\Omega} u > 0$ getrennt. Im zweiten Fall setze man $v = u - \sup_{\partial\Omega} u - (e^d - e^{x_1}) \sup_{\Omega} u$ und zeige $-\Delta v \leq 0$.

Aufgabe 5.4 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen. Für $T > 0$ bezeichne Q_T den Zylinder $(0, T] \times \Omega$. Gegeben sei eine positiv definite Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Sei $u \in C^2(Q_T) \cap C^0(\overline{Q_T})$ mit

$$\forall\, (t,x) \in Q_T : \qquad u_t(t,x) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) \geq 0. \tag{$*$}$$

Zeigen Sie, dass u sein Minimum auf dem parabolischen Rand $\partial_p Q_T := (\{0\} \times \Omega) \cup ([0,T] \times \partial\Omega)$ annimmt, d.h.

$$\min_{(t,x) \in \overline{Q_T}} u(t,x) = \min_{(t,x) \in \partial_p Q_T} u(t,x).$$

Hinweis. Nehmen Sie zunächst an, dass in $(*)$ die strikte Ungleichung gilt. Betrachten Sie im allgemeinen Fall $u_\varepsilon(t,x) = u(t,x) - \varepsilon \exp(x_1)$.

Aufgabe 5.5 Betrachten Sie für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und ein Randdatum $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ eine Lösung $u \in C^2(\overline{\Omega})$ des Dirichlet-Problems für die Minimalflächengleichung

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0 & \text{für } x \in \Omega, \\ u = \varphi & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Schreiben Sie den nichtlinearen Operator $L(u) := -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)$ formal als linearen Operator $L(u)(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x)$ mit Koeffizienten $a_{ij}(x)$, die natürlich von der unbekannten Lösung u abhängen. Finden Sie Elliptizitätskonstanten für $L(u)$, die Sie aus der Vorlesung mit den Bezeichnungen λ bzw. Λ kennen. Zeigen Sie:

$$\forall x \in \Omega : \qquad \min_{\partial\Omega} \varphi \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} \varphi.$$

Bitte geben Sie Ihre Lösungen am Dienstag, den 19.05.2015 in der Vorlesung ab.

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I
Sommersemester 2015

6 19.05.2015

Aufgabe 6.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $u \in C^2(\Omega)$ eine harmonische Funktion. Man beweise, dass $|\nabla u|^2$ auf Ω subharmonisch ist.

Aufgabe 6.2 Seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $\Phi : \Omega' \to \Omega$ ein C^2-Diffeomorphismus, d.h. Φ ist bijektiv mit $\Phi \in C^2(\Omega', \Omega)$ und $\Phi^{-1} \in C^2(\Omega, \Omega')$. Man definiere den **Maßtensor** $G = (g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ durch

$$G(\xi) \;=\; D\Phi(\xi)^T \circ D\Phi(\xi), \quad \xi \in \Omega'.$$

(a) Seien $u, v \in C^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass

$$\forall\, \xi \in \Omega' : \qquad \nabla u(\Phi(\xi)) \,\cdot\, \nabla v(\Phi(\xi)) \;=\; \sum_{k,\ell=1}^{n} g^{k\ell}(\xi) \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \xi_k}(\xi) \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial \xi_\ell}(\xi),$$

wobei $\widetilde{u}(\xi) \;=\; u(\Phi(\xi))$ und $\widetilde{v}(\xi) \;=\; v(\Phi(\xi))$ ($\xi \in \Omega'$) und $\big(g^{k\ell}(\xi)\big)_{k,\ell=1,\dots,n} = G(\xi)^{-1}$.

(b) Man setze $g(\xi) := \det(G(\xi))$. Zeigen Sie $|\det D\Phi| \;=\; \sqrt{g}$ in Ω'. Beweisen Sie hiermit, dass für $u \in C^2(\Omega)$ und $v \in C^1_0(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega v\, \Delta u\, dx \;=\; \sum_{k,\ell=1}^{n} \int_{\Omega'} \widetilde{v}\, \frac{\partial}{\partial \xi_\ell}\Big(\sqrt{g}\, g^{k\ell} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \xi_k}\Big)\, d\xi.$$

Schließen Sie hieraus, dass

$$\forall\, \xi \in \Omega' : \qquad \Delta u(\Phi(\xi)) \;=\; \frac{1}{\sqrt{g(\xi)}} \sum_{k,\ell=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_\ell}\Big(\sqrt{g(\xi)}\, g^{k\ell}(\xi) \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \xi_k}(\xi)\Big).$$

Aufgabe 6.3 Sei $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine Abbildung $\Phi \in C^1(\Omega', \mathbb{R}^n)$ heißt **konform** oder auch winkeltreu, falls für jedes $\xi \in \Omega'$ gilt $\|D\Phi(\xi)\| > 0$ und $U(\xi) := \frac{D\Phi(\xi)}{\|D\Phi(\xi)\|}$ eine orthogonale Matrix ist, wobei

$$\|D\Phi(\xi)\| \;=\; \sup_{|z|=1} |D\Phi(\xi) \circ z|$$

bezeichnet. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein weiteres Gebiet und sei $\Phi : \Omega' \to \Omega$ ein konformer C^2-Diffeomorphismus. Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabe 6.2, dass für jedes $u \in C^2(\Omega)$ gilt:

$$\|D\Phi\|^n \Delta u \circ \Phi \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\Big(\|D\Phi\|^{n-2} \frac{\partial}{\partial \xi_i}(u \circ \Phi)\Big) \quad \text{in} \quad \Omega'.$$

Aufgabe 6.4 Sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C^0(\partial B_1(0))$, und eine Funktion $f \in C^2(\overline{B_1(0)})$ derart, dass f eine Fortsetzung in $C^2_0(\mathbb{R}^n)$ besitzt. Man zeige: Für das Dirichletproblem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } B_1(0), \qquad u = \varphi \quad \text{auf } \partial B_1(0)$$

existiert eine Lösung $u \in C^2(B_1(0)) \cap C^0(\overline{B_1(0)})$.

Aufgabe 6.5 (a) Sei u eine nichtnegative, in $\overline{B_R(0)} \subset \mathbb{R}^n$ harmonische Funktion. Man beweise:

$$\frac{R^{n-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{n-1}}u(0) \le u(x) \le \frac{R^{n-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}}u(0).$$

Hinweis. Verwenden Sie zunächst die Poissonsche Integralformel für den Fall $R = 1$ und anschließend ein Skalierungsargument.

(b) Sei nun $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch und beschränkt. Wie folgt aus (a) der Satz von Liouville? Überlegen Sie sich, dass es sogar reicht, Beschränktheit von u nur von unten oder von oben zu fordern.

Aufgabe 6.6 (Schwarzsches Spiegelungsprinzip) Sei $\Omega^+ \subset \mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ ein Gebiet. Mit T bezeichnen wir das relative Innere der Menge $\partial\Omega^+ \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$, welche als nichtleer angenommen wird. Wir nehmen außerdem an: u ist stetig in $\Omega^+ \cup T$, harmonisch in Ω^+ und $u = 0$ auf T. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\widetilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für} \quad x \in \Omega^+ \cup T, \\ -u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n) & \text{für} \quad x \in \Omega^-, \end{cases}$$

harmonisch in $\Omega^+ \cup T \cup \Omega^-$ ist, wobei

$$\Omega^- := \{x \in \mathbb{R}^n : (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n) \in \Omega^+\}.$$

Bitte geben Sie Ihre Lösungen am Dienstag, den 26.05.2015 in der Vorlesung ab.

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I
Sommersemester 2015

7 26.05.2015

Aufgabe 7.1 Betrachten Sie eine besonders interessante Möbiustransformation, nämlich die Inversion $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, definiert durch

$$\Phi(x) = \frac{x}{|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

(a) Zeigen Sie: Φ ist konform.

(b) Sei $R > 0$. Beweisen Sie, dass Φ die Sphäre $\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; |x - Re_n| = R\}$ auf die Hyperebene $H_R = \mathbb{R}^{n-1} \times \left\{\frac{1}{2R}\right\}$ abbildet. Schließen Sie hieraus, dass Φ die Kugel $B_{1/2}(\frac{1}{2}e_n)$ konform auf den Halbraum $\{x \in \mathbb{R}^n; x_n > 1\}$ abbildet.

(c) Zeigen Sie, dass für $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ und $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt:

$$(\Delta u \circ \Phi)(x) = |x|^{n+2} \Delta \left(|x|^{2-n} (u \circ \Phi)(x) \right).$$

Aufgabe 7.2 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, eine offene, beschränkte Menge. Wir schwächen die Voraussetzungen von Satz 3.2. aus der Vorlesung ab: Sei $p > \frac{n}{2}$, $f \in L^p(\Omega, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass für das Newton-Potential

$$V(x) := \frac{1}{(n-2)ne_n} \int\limits_{\Omega} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy$$

gilt:

(a) Das Newton-Potential $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist wohldefiniert und genügt mit einer Konstanten $C_1 = C_1(\Omega, p) > 0$ einer Abschätzung

$$|V(x)| \leq C_1 \|f\|_{L^p(\Omega)} \frac{1}{1 + |x|^{n-2}}.$$

(b) Unter der Voraussetzung $n > p > \frac{n}{2}$ gilt für jedes $\alpha \in (0, 2 - (n/p))$:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, x_1 \neq x_2 : \qquad |V(x_1) - V(x_2)| \leq C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)} |x_1 - x_2|^\alpha.$$

Dabei ist $C_2 = C_2(\Omega, p, \alpha) > 0$ eine geeignete Konstante. Insbesondere ist V also stetig.

Hinweis. Bei der Bearbeitung von (a) wählen Sie $R > 0$ so, dass $\Omega \subset B_R(0)$ und unterscheiden Sie die Fälle $|x| \leq 2R$ bzw. $|x| > 2R$. Verwenden Sie Dreiecks- und Hölderungleichungen. Bei der Bearbeitung von (b) gehen Sie mit einer ähnlichen Fallunterscheidung vor. Spalten Sie von der Differenz der singulären Terme unter dem Integral eine geeignte Potenz $\alpha \in (0, 1)$ ab.

Aufgabe 7.3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Man beweise, dass eine Funktion $u \in C^0(\Omega)$ genau dann subharmonisch im Sinne von Definition 4.1 der Vorlesung ist, wenn u lokal die Mittelwertungleichung erfüllt; das heißt, dass für jedes $x \in \Omega$ ein $r_0 = r_0(x) \in (0, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)]$ existiert, so dass gilt:

$$u(x) \leq \frac{1}{ne_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS(y) \quad \text{für alle} \quad 0 < r < r_0.$$

Aufgabe 7.4 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Es existiere eine Lösung $\tilde{u} \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ des Dirichletproblems $\Delta\tilde{u} = 0$ in Ω, $\tilde{u} = \varphi$ auf $\partial\Omega$. Es sei u die in Satz 4.8 der Vorlesung konstruierte Perronsche Lösung zum Randdatum φ. Zeigen Sie, dass $u = \tilde{u}$ in Ω.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen am Dienstag, den 02.06.2015 in der Vorlesung ab.
Für die Bearbeitung der Aufgabe 7.2 (b) können Sie bis zu 10 Zusatzpunkte erwerben.

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I
Sommersemester 2015

8 02.06.2015

Aufgabe 8.1 Betrachten Sie den Annulus $A(\varepsilon, \varrho, x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x - x_0| < \varrho\}$ mit $0 < \varepsilon < \varrho$, $n \geq 3$. Zeigen Sie, dass die Greensche Funktion $G = G_{-\Delta, A(\varepsilon,1,0)}$ zu $-\Delta$ in $A(\varepsilon, 1, 0)$ mit $0 < \varepsilon < 1$ durch

$$G(x,y) := \frac{1}{(n-2)ne_n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\varepsilon^{k(n-2)}}{|y - \varepsilon^{2k}x|^{n-2}} - \frac{\varepsilon^{k(n-2)}}{\left| |x|y - \varepsilon^{2k}\frac{x}{|x|} \right|^{n-2}} \right).$$

gegeben ist. Diskutieren Sie insbesondere zunächst die Konvergenzeigenschaften dieser Reihendarstellung.

Aufgabe 8.2 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein reguläres Gebiet mit C^2-glattem Rand. Zeigen Sie, dass Ω in jedem $x_0 \in \partial\Omega$ einer äußeren Kugelbedingung genügt, d.h. für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ existiert eine Kugel $B_R(x_1)$ mit $\{x_0\} = \overline{B_R(x_1)} \cap \overline{\Omega}$.
Hinweis. Mittels einer geeigneten Drehung um den Punkt x_0 überführe man das Gebiet Ω in ein Gebiet Ω', wobei x_0 unverändert bleibt, so dass sich der Rand von Ω' in einer Umgebung von x_0 der Form $V = U \times (a,b)$ als Graph einer C^2-Funktion f mit horizontaler Tangentialhyperebene darstellen lässt. D.h.: $V \cap \partial\Omega' = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in U, x_n = f(x')\}$, $V \cap \Omega' = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in U, b < x_n < f(x')\}$, $\nabla f(x_0') = 0$.

Aufgabe 8.3 Seien α, β zwei Multiindizes und u eine lokal integrierbare Funktion auf einem Gebiet Ω. Außerdem möge die schwache Ableitung $D^\beta u$ existieren. Man beweise: Existiert eine der zwei schwachen Ableitungen $D^{\alpha+\beta}u$ oder $D^\alpha\left(D^\beta u\right)$, dann existieren beide und sind fast überall gleich in Ω.

Aufgabe 8.4 Bestimmen Sie alle $\beta \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion

$$u(x) = |x|^\beta, \quad x \in (B_1(0) \setminus \{0\}) \subset \mathbb{R}^n$$

zu $W^{1,1}(B_1(0))$ gehört.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen am Dienstag, den 09.06.2015 in der Vorlesung ab.

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I
Sommersemester 2015

9 09.06.2015

Aufgabe 9.1 Gegeben sei ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sei u eine auf $\overline{\Omega}$ stetige Funktion; wir bezeichnen:

$$\Phi_p(u) = \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Man beweise, dass:

(a) $[1, \infty) \ni p \mapsto \Phi_p(u)$ ist (i.A. nicht strikt) monoton wachsend.

(b) $\lim\limits_{p \to \infty} \Phi_p(u) = \sup\limits_\Omega |u|$.

Aufgabe 9.2 Gegeben seien ein reguläres C^2-glattes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Man beweise die folgende Ungleichung:

$$\text{Für beliebiges } \varepsilon > 0 \text{ gilt:} \qquad \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \le \varepsilon \int_\Omega (\Delta u)^2 \, dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega u^2 \, dx.$$

Gilt diese Ungleichung auch für $u \in W_0^{2,2}(\Omega)$?

Hinweis. Lassen Sie sich vom Beweis der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung in 0.11 inspirieren.

Aufgabe 9.3 Man beweise, dass eine Funktion u in einem beschränkten Gebiet Ω schwach differenzierbar ist genau dann, wenn sie in einer Umgebung eines jeden Punktes schwach differenzierbar ist.

Hinweis. Benutzen Sie eine geeignete Teilung der Eins.

Aufgabe 9.4 Sei $-\infty < a < b < \infty$. Zeigen Sie , dass für alle $u \in C^1([a, b])$ gilt:

$$[u]_{C^{0,1/2}([a,b])} \ \le \ \|u'\|_{L^2(a,b)},$$

wobei $[u]_{C^{0,1/2}([a,b])} := \sup\limits_{\substack{x,y \\ x \neq y}} \dfrac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{1/2}}$.

Schließen Sie hieraus, dass $W^{1,2}(a, b)$ stetig in $C^{0,1/2}([a, b])$ eingebettet ist, wobei wir $C^{0,1/2}([a, b])$ mit der folgenden Norm versehen:

$$\|u\|_{C^{0,1/2}([a,b])} := \|u\|_{C^0([a,b])} + [u]_{C^{0,1/2}([a,b])}.$$

Hinweis. Zeigen Sie die Ungleichung zunächst für klassisch differenzierbare Funktionen, und arbeiten Sie dann mit Hilfe eines Dichtheitsarguments.

Aufgabe 9.5 Zeigen Sie, dass für alle $u \in W_0^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ gilt:

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le \| \, |\nabla u| \, \|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$$

Hinweis. Arbeiten Sie zunächst mit glatten Funktionen, und wenden Sie zweimal den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung an.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen am Dienstag, den 16.06.2015 in der Vorlesung ab.

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I
Sommersemester 2015

10 16.06.2015

Aufgabe 10.1 Beweisen Sie, dass ein stetiger linearer Operator $\gamma : W^{1,1}(B_1(0)) \to L^1(\partial B_1(0))$ existiert, so dass

$$\forall\, u \in C^1(\overline{B_1(0)}) : \qquad u|_{\partial B_1(0)} = \gamma(u).$$

Hinweis. Beweisen Sie die Behauptung

$$\|u|_{\partial B_1(0)}\|_{L^1(\partial B_1(0))} \le C\|u\|_{W^{1,1}(B_1(0))}$$

mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes zunächst für $u \in C^1(\overline{B_1(0)})$ und wenden Sie anschließend ein Dichtheitsargument an.

Aufgabe 10.2 Gegeben seien ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f \in L^2(\Omega)$. Eine Funktion $u \in H_0^2(\Omega)$ heißt eine schwache Lösung des Problem

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$*$}$$

falls für alle Testfunktionen $\psi \in H_0^2(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Omega \Delta u\, \Delta\psi\, dx = \int_\Omega f\psi\, dx.$$

Man beweise, dass zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ genau eine schwache Lösung $u \in H_0^2(\Omega)$ des Problems $(*)$ existiert.
Hinweis. Betrachten Sie $H_0^2(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle := \int_\Omega \Delta u\, \Delta v\, dx$$

und zeigen Sie, dass dieses eine zu $\|\,.\,\|_{H_0^2(\Omega)}$ äquivalente Norm induziert.

Aufgabe 10.3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Wir nennen $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Oberlösung für $-\Delta u \ge 0$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$, falls für alle *nichtnegativen* Testfunktionen $\psi \in H_0^1(\Omega)$ gilt:

$$u \in H_0^1(\Omega), \qquad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\psi\, dx \ge 0.$$

Man zeige, dass für solche schwachen Oberlösungen stets gilt:

$$u \ge 0 \quad \text{f.ü. in } \Omega.$$

Aufgabe 10.4 Man beweise, dass die Funktion $\gamma : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\gamma(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\gamma_t - \Delta\gamma = 0$$

ist.

Aufgabe 10.5 Sei $n = 1$ und $u(t,x) = v\left(\frac{x^2}{t}\right)$ für $t > 0$, $x > 0$.

(a) Man zeige, dass

$$u_t = u_{xx} \quad \text{für } t > 0, x > 0$$

genau dann, wenn

$$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0 \quad \text{für } z > 0. \tag{$*$}$$

(b) Man zeige, dass die allgemeine Lösung von $(*)$

$$v(z) = c_1 \int_1^z e^{-s/4} s^{-1/2}\, ds + c_2$$

lautet.

(c) Man leite $v\left(\frac{x^2}{t}\right)$ bezüglich $x > 0$ ab und man wähle eine spezielle Konstante c_1 so, dass man für u_x die eindimensionale Fundamentallösung erhält.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen am Dienstag, den 23.06.2015 in der Vorlesung ab.

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I
Sommersemester 2015

11 23.06.2015

Aufgabe 11.1 Sei u eine glatte Lösung des Problems

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n.$$

(a) Man beweise, dass für $\lambda \in \mathbb{R}$
$$u_\lambda(t,x) := u(\lambda^2 t, \lambda x)$$
ebenfalls eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

(b) Mit (a) beweise man, dass
$$v(t,x) := x \cdot \nabla u(t,x) + 2tu_t(t,x)$$
eine weitere Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

Aufgabe 11.2 Sei $\varphi : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Zeigen Sie die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $u \in C^0([0,\infty) \times [0,\pi]) \cap C^\infty((0,\infty) \times [0,\pi])$ für das Problem
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & \text{auf } (0,\infty) \times (0,\pi), \\ u(0,x) = \varphi(x), & x \in [0,\pi], \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t \in (0,\infty). \end{cases}$$

Hinweis. Man setze das Anfangsdatum φ ungerade und 2π-periodisch als stetige Funktion nach $\mathbb{R}$ fort und benutze den Existenz- und Eindeutigkeitssatz auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}$. Man zeige, dass für diese Lösung gilt: $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$.

Aufgabe 11.3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes reguläres Gebiet, $\Omega_T = (0,T] \times \Omega$ ein entsprechender Raum-Zeit-Zylinder und $u \in C^{1,2}(\overline{\Omega_T})$ eine Lösung des Anfangsrandwertproblems:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega_T, \\ u|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0, \\ u(0,\,.\,) = \varphi \in C^2(\overline{\Omega}). \end{cases} \tag{1}$$

Es sei auch $u_t \in C^{1,2}(\overline{\Omega_T})$ und $\varphi(x) \not\equiv 0$.
Betrachten Sie *das zweite Moment der Temperatur* des Körpers Ω zur Zeit t:

$$\mathcal{E}(t) = \|u(t,\,.\,)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Beweisen Sie, dass für jedes $0 \le t_1 < t < t_2 \le T$ gilt: $\mathcal{E}(t) > 0$ und

$$\mathcal{E}(t) \le \mathcal{E}(t_1)^{\frac{t_2-t}{t_2-t_1}}\, \mathcal{E}(t_2)^{\frac{t-t_1}{t_2-t_1}}. \tag{2}$$

Hinweis. Man studiere $\mathcal{E}'(t)$ und $\mathcal{E}''(t)$ und zeige

$$\mathcal{E}''(t) = 4\int_\Omega (u_t)^2\,dx.$$

Benutzen Sie die Höldersche Ungleichung, um zu zeigen:

$$(\mathcal{E}'(t))^2 \leq \mathcal{E}(t)\mathcal{E}''(t).$$

Für $t > 0$ nahe 0 hat man $\mathcal{E}(t) > 0$; für diese Zeiten existiert $t \mapsto \log \mathcal{E}(t)$; man zeige die Konvexität dieser Funktion und folgere daraus (2) für diese Zeiten. Nehmen Sie nun an, dass eine minimale Zeit $t_2 > 0$ existiert mit $\mathcal{E}(t_2) = 0$ und leiten Sie daraus mittels (2) einen Widerspruch her.
Überlegen Sie sich, dass man so für das Anfangsrandwertproblem (1) in der beschriebenen Funktionenklasse zumindest Eindeutigkeit rückwärts in der Zeit hat. Ansonsten ist das Rückwärtslösen der Wärmeleitungsgleichung schlecht gestellt und meist auch unmöglich.

Aufgabe 11.4 Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beschränkte stetige Funktion. Sei $u : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Lösung des Cauchyproblems

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, \,.\,) = \varphi & \text{in } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

wobei $u \in C_b^0([0, \infty) \times \mathbb{R}^n) \cap C^{1,2}((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$. Man zeige ohne die Verwendung von Satz 7.8 der Vorlesung:

$$\sup_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^n} u = \sup_{\mathbb{R}^n} \varphi, \qquad \inf_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^n} u = \inf_{\mathbb{R}^n} \varphi.$$

Hinweis. Man wähle $M > 0$, so dass $|u| \leq M$. Für beliebiges, aber festes $R > 0$ arbeite man auf $[0, \infty) \times B_R(0)$ mit der Vergleichsfunktion

$$v(t, x) := \frac{4Mn}{R^2} \left(t + \frac{|x|^2}{2n} \right) + \sup_{\mathbb{R}^n} \varphi.$$

Bitte geben Sie Ihre Lösungen am Dienstag, den 30.06.2015 in der Vorlesung ab.

Prof. Dr. H.-Ch. Grunau

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I
Sommersemester 2015

12 30.06.2015

Aufgabe 12.1 Betrachten Sie die Funktion $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$$\psi(t) := \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{falls } t > 0, \\ 0 & \text{falls } t \le 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $t > 0$ die Abschätzung gilt:

$$\left| \left(\frac{d}{dt} \right)^k \psi(t) \right| \le k! \left(\frac{2}{t} \right)^k e^{-1/(4t^2)}.$$

Hinweis. Betrachten Sie $z \mapsto \psi(z)$ für $\mathrm{Re}(z) > 0$ als holomorphe Funktion. Für $t > 0$ betrachten Sie den Weg $[0, 2\pi] \ni s \mapsto \gamma(s) := t + (t/2)e^{is}$. Verwenden Sie die Cauchysche Integralformel. Zeigen Sie, dass

$$\forall x \in [-1, 1] : \qquad \frac{3 + 4x + 2x^2}{(\frac{5}{4} + x)^2} \ge 1.$$

Aufgabe 12.2 Betrachten Sie wie in Aufgabe 12.1 die Funktion $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$$\psi(t) := \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{falls } t > 0, \\ 0 & \text{falls } t \le 0, \end{cases}$$

sowie für $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$

$$u(t, x) := \begin{cases} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k \psi(t) \frac{x^{2k}}{(2k)!} & \text{falls } t > 0, \\ 0 & \text{falls } t \le 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) $u \in C^0([0, \infty) \times \mathbb{R}) \cap C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$. Es gilt sogar $C^\infty((-\infty, \infty) \times \mathbb{R})$!

(b) $u_t - u_{xx} = 0$ in $(0, \infty) \times \mathbb{R}$, $u(0, x) \equiv 0$.

Aufgabe 12.3 Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Anfangsdatum $u_0 \in \mathbb{R}$ das maximale Existenzintervall (T^-, T^+) für das Anfangswertproblem

$$u_t + u = |u|^2 u \quad \text{für} \quad t \in (T^-, T^+), \qquad u(0) = u_0.$$

Aufgabe 12.4 (Gronwallsches Lemma) Sei $-\infty < t_0 < t_1 \le \infty$, $\psi : [t_0, t_1) \to \mathbb{R}$ sei stetig. Es gebe Konstanten $a \in \mathbb{R}$, $b \ge 0$, so dass

$$\forall t \in [t_0, t_1) : \qquad \psi(t) \le a + b \int_{t_0}^t \psi(\tau)\, d\tau.$$

Dann folgt:

$$\forall t \in [t_0, t_1) : \qquad \psi(t) \le a \cdot e^{b(t - t_0)}.$$

Hinweis. Zeigen Sie mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\forall t \in [t_0, t_1) : \qquad \psi(t) < (a + \varepsilon) \cdot e^{b(t - t_0)}.$$

Aufgabe 12.5 Sei $T > 0$, $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$. Weiter seien $u, v \in C_b^0([0, T] \times \mathbb{R}^n) \cap C^{1,2}((0, T] \times \mathbb{R}^n)$ Lösungen des Cauchyproblems, wie in Satz 9.2 der Vorlesung konstruiert:

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t - \Delta u = f \circ u & \text{in } \mathbb{R}^n_T, \\ u(0, .) = \varphi & \text{in } \mathbb{R}^n; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} v_t - \Delta v = f \circ v & \text{in } \mathbb{R}^n_T, \\ v(0, .) = \varphi & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{array}\right.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Gronwallschen Lemmas Eindeutigkeit, d.h.

$$u = v \;\text{ in }\; \overline{\mathbb{R}^n_T}.$$

Aufgabe 12.6 Sei $m > 1$ eine feste reelle Zahl. Man bestimme Lösungen $u \geq 0$ für die nichtlineare Gleichung

$$m\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta(u^m) = 0, \qquad \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n,$$

mit Hilfe des Separations- und Selbstähnlichkeitsansatzes

$$u(t, x) = h(t) f(\xi), \qquad \xi = \frac{|x|^2}{t^\sigma},$$

wobei die positive Zahl σ geeignet zu bestimmen ist. Man mache den Ansatz $h(t) = t^{-n\sigma/2}$, leite die gewöhnliche Differentialgleichung für f her und löse diese so, dass man bekommt:

$$\left\{\begin{array}{l} u_m(t, x) = t^{-\frac{n}{\kappa}} \left\{1 - \gamma_m \left(\frac{|x|^2}{t^{2/\kappa}}\right)\right\}_+^{\frac{1}{m-1}}, \qquad t > 0, \\ \gamma_m = \frac{m-1}{2\kappa}, \quad \kappa = n(m-1) + 2. \end{array}\right.$$

In welchem Sinne existiert $\Delta(u_m^m)$?

Man beweise, dass u_m für $m \searrow 1$ lokal gleichmäßig in $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ gegen ein Vielfaches der Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung strebt.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen der Aufgaben 12.1 bis 12.5 am Dienstag, den 07.07.2015 in der Vorlesung ab.

Aufgabe 12.6 erfordert ein wenig Ausdauer und ist für die vorlesungsfreie Zeit bestimmt.