Mathematik III für Physiker
WS 2002/03

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

1 15.10.2002

1.1 Aufgabe

Berechnen Sie

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}dxdy$$

1.2 ⋆ Aufgabe

Gegeben sei das Gebiet $D = \{(x,y) : y < x, x < 0 \text{ und } 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Berechnen Sie

$$\int_D \frac{x}{x^2+y^2}dxdy$$

1.3 Aufgabe

Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Drahts bzgl. $(3,2)$. Der Draht hat eine konstante Dichte δ und seine Koordinaten erfüllen die Gleichung $x^2 + y^2 - 6x - 4y = -12$

(Das Tragheitsmoment eines Körpers K bzgl. eines Punkts P ist $\Omega = \int_D d^2(x)\delta(x)\ ds(x)$ (Linienintegral).
wo $d(x) = dist(x,P)$ und $\delta(x)$ die Dichte sind.)

(Der Draht hat nur eine Hauptdimension, die anderen sind so klein, daß man sie vernachlässigen kann.)

1.4 Aufgabe

Der Satz von Steiner sagt:
Seien K ein Körper mit Masse M und $L \subset \mathbb{R}$ eine Gerade durch den Schwerpunkt von K.
Sei L' eine zu L parallele Gerade im Abstand d.
Seien Θ_L bzw. $\Theta_{L'}$ die Trägheitsmomente von K bzgl. dieser Achsen. Dann gilt

$$\Theta_{L'} = \Theta_L + Md^2$$

Man beweise diesen Satz.

1.5 $\star$ Aufgabe

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, man beweise die folgenden Rotationsformeln:

$$F(R) = \int_{\|x\| \leq R} f(\|x\|)\ dx = ne_n \int_0^R r^{n-1} f(r)\ dr$$

wo $e_n = vol_n(B_1(0))$ ist.

1.6 $\star$ Aufgabe

Man berechne die folgenden Integrale:

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} xye^{-(x^2+y^2)} d(x,y)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y)$$

1.7 $\star$ Aufgabe

Man berechne das Newton-Potential einer Kugel $K \subset \mathbb{R}^3$ mit Dichte $\mu : K \to \mathbb{R}$ radialsymmetrisch..

(Hinweis: das Potential u erzeugt von K in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^3 \setminus K$ ist

$$u(Q) = \int_K \frac{\mu(x)}{\rho(x,Q)}\ dx$$

wo $\rho(x,Q) = \|x - Q\|$ den Abstand von x bis Q.)

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben. Die Lösungen geben Sie bitte am
22.10.02 in der Vorlesung ab.]

Mathematik III für Physiker
WS 2002/03

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

2 21.10.2002

2.1 Aufgabe

Berechnen Sie den zweidimensionalen (Flächen -) Inhalt einer Halbkugel von Radius R.

(Hinweis: man verwende man die Polarkoordinaten.)

2.2 Aufgabe

Gegeben sei die Fläche $\phi\,(D) \subset \mathbb{R}^3$ wobei $D = (-1,1) \times (-\pi,\pi)$ und mit

$$\phi(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \sin(\beta) \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\phi(D)} z\, dS(x,y,z).$$

2.3 ⋆ Aufgabe

Gegeben seien ein kompaktes Gebiet G mit glattem Rand Σ und mit äußerem Normalvektor ν und das Vektorfeld $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$.

Man beweise

$$\int_{\Sigma} \vec{F} \times \nu\, dS(x,y,z) = 0.$$

2.4 ⋆ Aufgabe

Schreiben Sie die Tangential- und die äußeren Normalvektoren einer Ellipse mit der Gleichung $x^2 + 4y^2 = 1$.

2.5 ⋆ Aufgabe

Gegeben seien das Gebiet $G = \left\{ (x,y) : \begin{array}{ll} \text{falls } x \leq 0: & \frac{1}{4}x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \\ \text{falls } x > 0: & x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \end{array} \right\}$

und das Vektorfeld

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} e^y + 5y + xy \\ -y^2(2x - \frac{1}{2}) \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie den Fluß von $\vec{f}$ auf ∂G.

2.6 $\star$ Aufgabe

Gegeben sei ein Torus T, dessen Oberfläche von $\phi : G \to \mathbb{R}^3$ beschrieben wird, wo

$$G = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$$

$$\phi(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)(R + r\cos(\beta)) \\ \sin(\alpha)(R + r\cos(\beta)) \\ r\sin(\beta) \end{pmatrix}$$

Man berechne den Tangentialraum in $(x, y, z) \in \phi(G)$, den Normalenvektor in $(x, y, z) \in \phi(G)$ und das Integral von $f(x, y, z) = xyz$ auf dem Rand des Torus mit $R = 5$ und $r = 1$.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben. Die Lösungen geben Sie bitte am 28.10.02 in der Vorlesung ab.]

Mathematatik III für Physiker

WS 2002/03

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

3 28.10.2002

3.1 Aufgabe

Gegeben sei eine beliebige reguläre geschlossene Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ (d.h. der relative Rand $\bar{S} \setminus S = \emptyset$) und das Vektorfeld $\vec{F} \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Man beweise daß

$$\int_S \langle rot(\vec{F}), \vec{\nu} \rangle dS = 0.$$

3.2 Aufgabe

Gegeben seien eine kompakte Jordan–meßbare Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetige Funktion $f : K \to \mathbb{R}$. Weiter sei $p \in (1, \infty)$. Man beweise

$$\int_K |f(x)| dx \le Vol(K)^{1-\frac{1}{p}} \|f\|_{\mathcal{L}_p(K)}$$

(Hinweis: $\|f\|_{\mathcal{L}_p(K)} = \left(\int_K |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$. Die Hölder Ungleichung sagt: $\int_K |f(x) \cdot g(x)| dx \le \|f\|_{\mathcal{L}_p(K)} \cdot \|g\|_{\mathcal{L}_q(K)}$ mit $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.)

3.3 $\star$ Aufgabe

Es sei D ein reguläres Gebiet; ν bezeichne das äußere Einheitsnormalenfeld an ∂D und $\Delta = \sum_j \partial_j \partial_j$ den Laplace–Operator. Die Funktionen f, g seien in einer Umgebung von $\bar{D}$ zweimal stetig differenzierbar. Man beweise die Greensche Formel:
$\int_D \left(\Delta f(x) \cdot g(x) - \Delta g(x) \cdot f(x)\right) dx = \int_{\partial D} [\langle \nabla f(x), \nu(x) \rangle g(x) - f(x) \langle \nabla g(x), \nu(x) \rangle] dS(x).$

3.4 Aufgabe

Gegeben seien ein reguläres Gebiet D mit äußerem Normalenfeld ν wie in der vorherigen Aufgabe und zwei Funktionen u, v, die in einer Umgebung von $\bar{D}$ zweimal stetig differenzierbar sind. Ferner seien u, v Eigenfunktionen für $-\Delta$ unter „Dirichletrandbedingungen“, das heißt $-\Delta u = \lambda_1 u$, $-\Delta v = \lambda_2 v$ auf D und $u|_{\partial D} = v|_{\partial D} = 0$. Man beweise, daß aus $\lambda_1 \neq \lambda_2$ folgt: $\langle u, v \rangle_{L^2(D)} := \int_D u(x) v(x) \, dx = 0$.

3.5 $\star$ Aufgabe

Sei $n \ge 3$, $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar, es bezeichne $f(x) := -\Delta u(x)$. Es gebe ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$, so daß für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ gilt: $u(x) = 0$. Man beweise:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \qquad u(x) = \frac{1}{n(n-2)e_n} \int_{\mathbb{R}^n} \|x - y\|^{2-n} f(y) \, dy.$$

Dabei bezeichnet $e_n = \int_{B_1(0)} dy$ das Volumen der n–dimensionalen Einheitskugel.

3.6 Aufgabe

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige differenzierbare Funktion. Man rotiere die Kurve $y = f(x)$ in $\mathbb{R}^3$ um die x–Achse. Berechnen Sie den zweidimensionalen Inhalt der so konstruierten Fläche.

3.7 $\star$ Aufgabe

Gegeben sei den Zylinder in $\mathbb{R}^4$, $Z = \big\{(w, x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\, 0 \leq w \leq 1\big\}$. Man berechne den Fluß durch den Rand ∂Z von

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ +xyz \\ -xyz \\ z^3 \end{pmatrix}.$$

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben. Die Lösungen geben Sie bitte am 04.11.02 in der Vorlesung ab.]

Mathematatik III für Physiker

WS 2002/03

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

4 04.11.2002

4.1 Aufgabe

Wir betrachten die Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Mit $N = (0,0,1)$ bezeichnen wir ihren Nordpol. Zeigen Sie, daß die *stereograpische Projektion*

$$\varphi : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2, \varphi(x_1, x_2, x_3) := \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}\right)$$

bijektiv ist, und man bestimme die Umkehrabbildung $\psi := \varphi^{-1}$.

(Man erhält $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, indem man eine Gerade durch $(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \setminus \{N\}$ und N legt und deren Schnittpunkt mit der x_1–x_2–Ebene bestimmt.)

Zeigen Sie: ψ ist stetig differenzierbar und konform (lokal winkeltreu), d.h. für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\left\|\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right\| = \left\|\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right\| \neq 0, \quad \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right\rangle = 0.$$

4.2 ⋆ Aufgabe

Gegeben seien $R > 0$, die Menge $G = (-\rho, \rho) \times (0, 2\pi)$ mit $R > \rho > 0$, die Abbildung $\Phi : \bar{G} \to \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) := \Phi(r, t) := \left(\left(R - r \sin \frac{t}{2}\right) \cos t, \left(R - r \sin \frac{t}{2}\right) \sin t, r \cos \frac{t}{2}\right),$$

diese Abbildung definiert das *Möbius Band*.

Man beweise:

Φ ist auf G injektiv, $\langle \Phi_r, \Phi_t \rangle = 0$, Rang $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = 2$, $\Phi(\partial G) \cap \Phi(G) = \emptyset$.

$\Phi(r, t) = R(\cos t, \sin t, 0) + r \cdot a(t)$, mit $|a(t)| = 1$

Diese Fläche ist nicht orientierbar (d.h. $\Phi(r, 0) = \Phi(-r, 2\pi)$ und für den Normalenvektor $\nu = \frac{\Phi_r \times \Phi_t}{|\Phi_r \times \Phi_t|}$ hat man $\nu(r, 0) = -\nu(-r, 2\pi)$.

4.3 ⋆ Aufgabe

Man zeige: die Funktion $t \mapsto \phi(t) := (\sin t, \sin 2t)$ bildet das offene Intervall $I = (0, 2\pi)$ bjiektiv auf die kompakte Menge $\phi(I) \subset \mathbb{R}^2$ ab; die Umkehrfunktion ist im Punkt (0,0) unstetig. Skizzieren Sie das Bild $\phi(I)$. Nehmen Sie dazu Stellung, ob der von $\phi(I)$ umschlossene Bereich die Voraussetzungen des Satzes von Gauß erfüllt, und ob insbesondere ein globales stetiges äußeres Einheitsnormalenfeld existiert. Sehen Sie einen pragmatischen Ausweg?

4.4 $\star$ Aufgabe

Sei $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$. Man beweise (hier zunächst für $n = 2, 3$) mittels Polarkoordinaten die folgende Formel:

$$\int_{B_R} f(x)dx = \int_0^R \int_{\partial B_r} f(x)dS(x)dr = \int_0^R r^{n-1} \int_{\partial B_1} f(rx)dS(x)dr.$$

Definition

Sei X eine beliebige nichtleere Menge. Wir nennen eine Funktion

$$\mu : \mathcal{P}(X) \to \bar{\mathbb{R}}$$

eine *äußeres Maß* auf X, falls gilt:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. stets gilt: $M \subset N \Rightarrow \mu(M) \le \mu(N)$;
3. stets gilt: $\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k\right) \le \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(M_k)$.

4.5 Aufgabe

Wir definieren die folgende Abbildung $\mu^\star : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, so daß $\mu^\star(\emptyset) = 0$ und für $M \neq \emptyset$:

$$\mu^\star(M) = \sup\{|x_i - y_i|,\ i = 1, \ldots, n,\ x, y \in M\}.$$

Ist $\mu^\star$ ein äußeres Maß ?

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben. Die Lösungen geben Sie bitte am 11.11.02 in der Vorlesung ab.]

Mathematik III für Physiker
WS 2002/03

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

5 11.11.2002

5.1 Aufgabe

Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so gilt:
K ist eine Lebesguesche Nullmenge genau dann, wenn K auch eine Jordansche Nullmenge ist.

5.2 $\star$ Aufgabe

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fest. Das Dirac-Maß δ_{x_0} in x_0 wird definiert durch

$$\delta_{x_0} = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_0 \in M \\ 0 & \text{falls } x_0 \notin M \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß das Dirac-Maß δ_{x_0} in der Tat ein Maß auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ist.

5.3 $\star$ Aufgabe

Seien $f_k : D \to \bar{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$ meßbare Funktionen. Man beweise, daß der $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ ebenfalls meßbar ist.

5.4 Aufgabe

Sei $G_1 = [0,1]$; man schneide das offene Stück der Länge $1/q$ mit $q \geq 3$ in der Mitte heraus und man nenne die neue Menge G_2; man entferne jeweils ein $(1/q)^2$ langes offenes Stück aus der Mitte der zwei neuen Intervalle, und sie wird G_3. Wenn man unendlich oft dieselbe Prozedur mit offenen Stücken der Länge $(1/q)^n$ in allen neuen Intervallen wiederholt, bekommt man die sogenannte *Cantormenge* C_q.
Zeigen Sie: $C_q = \partial C_q = \partial([0,1] \setminus C_q)$.
Berechnen Sie $\lambda(C_q)$. Für welche q ist C_q Jordan–meßbar? Und Lebesgue–meßbar? Welches Maß hat der Rand der offenen Menge $[0,1] \setminus C_q$?

5.5 $\star$ Aufgabe

Betrachten Sie zunächst für $k \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$f_k : [0,\infty) \to [0,\infty), f_k(x) := \begin{cases} k^2 x(1-kx), & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{k}; \\ 0, & \text{falls } x > \frac{1}{k}. \end{cases}$$

(a) Bestimmen die für $x \in [0,\infty)$

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x).$$

(b) Nehmen Sie nun der Einfachheit halber $k \in (0, \infty)$ als reell an und bestimmen sie

$$F(x) := \sup_{k \in (0,\infty)} f_k(x).$$

(c) Berechnen Sie

$$\int_{(0,\infty)} f_k(x)\,dx, \qquad \int_{(0,\infty)} f(x)\,dx, \qquad \int_{(0,\infty)} F(x)\,dx.$$

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben. Die Lösungen geben Sie bitte am 18.11.02 in der Vorlesung ab.]

Mathematatik III für Physiker

WS 2002/03

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

6 18.11.2002

6.1 Aufgabe

Gegeben seien die Menge $G = (0, 2\pi)$ und die Folge $f_k(x) = \frac{k\sin(x)}{kx+1}$. Kann man den Satz von der majorisierten Konvergenz von Lebesgue benutzen?
Falls ja, finde man auch die Grenzfunktion.

6.2 Aufgabe

Es bezeichne $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ die n–dimensionale Einheitskugel und $e_n = \int_B 1\,dx$ ihr Volumen. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Man zeige:

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B} \|x\|^\alpha = \begin{cases} \infty, & \text{falls } \alpha \geq -n, \\ \dfrac{n\,e_n}{|\alpha+n|} & \text{falls } \alpha < -n. \end{cases}$$

6.3 Aufgabe

Seien $f : E_1 \to E_2$ eine Abbildung, $\mathcal{E}_1$ eine $\sigma-$Algebra auf E_1. Man zeige, daß $\{A \subset E_2 : f^{-1}(A) \in \mathcal{E}_1\}$ eine $\sigma-$Algebra ist auf E_2 ist.

6.4 $\star$ Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ meßbar. Gegeben seien zwei Funktionen $f, g : D \to [-\infty, \infty]$, meßbar. Man beweise, daß die Menge $P = \{x \in D : \ f(x) < g(x)\}$ meßbar ist.

6.5 $\star$ Aufgabe

Man beweise und erkläre die folgende Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{2}} = 2.$$

6.6 Aufgabe

Man beweise, daß die Menge der Punkte, wo eine Folge von reellen, meßbaren Funktionen (punktweise) konvergiert, eine meßbare Menge ist.

6.7 $\star$ Aufgabe

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}), f \geq 0$. Man berechne

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-n(\sin x)^2}\,dx.$$

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben. Die Lösungen geben Sie bitte am 25.11.02 in der Vorlesung ab.]

Mathematik III für Physiker

WS 2002/03

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

7 25.11.2002

Definition

Sei V ein reeller (oder komplexer) Vektorraum. Wir nennen eine Funktion $N : V \to \mathbb{R}$ *Seminorm auf V* falls

(a) $N(v) \geq 0$ für jedes $v \in V$

(b) $N(v) = 0$ falls $v = 0$

(c) $N(cv) = |c| N(v)$ für jedes $v \in V$ und jedes $c \in \mathbb{R}$ bzw. jedes $c \in \mathbb{C}$

(d) $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$ für jedes $u, v \in V$

Wir nennen N *Norm* falls wir (b) durch (b*) ersetzen, wobei

(b*) $N(v) = 0$ genau dann, wenn $v = 0$.

7.1 Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ meßbar. Sei $f \in L^1(D)$. Man beweise, daß die Abbildung

$$f \longmapsto \|f\| := \int_D |f(x)|\, dx$$

eine Seminorm auf $L^1(D)$ ist.

Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ meßbar. Seien $f, f_k \in L^1(D)$, wir sagen daß die Folge $\{f_k\}$ *gegen f in $L^1(D)$ konvergiert*, falls

$$\lim_{k \to \infty} \|f_k(x) - f(x)\|\, dx = 0.$$

7.2 $\star$ Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ meßbar.

(a) Seien $f_k, f \in L^1(D)$, und es gelte $f_k \to f$ in $L^1(D)$. Man beweise:

$$\int_D f_k(x)\, dx \to \int_D f(x)\, dx, \qquad \|f_k\| \to \|f\|.$$

(b) Seien $f_k, F \in L^1(D)$, und die Folge $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiere für fast alle $x \in D$ gegen ein $f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$. Ferner gelte für alle $k \in \mathbb{N}$ und fast alle $x \in D$: $|f_k(x)| \leq F(x)$. Man zeige:

$$f_k \to f \text{ in } L^1(D).$$

7.3 $\star$ Aufgabe

Man beweise, daß die *Gamma-Funktion*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

beliebig oft stetig differenzierbar ist.

7.4 $\star$ Aufgabe

Gegeben seien eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, die Abbildung

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_n e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} & \|x\| < 1 \\ 0 & \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

wo c_n so ist, daß $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$, und ein reeller Wert $h > 0$; man beweise, daß die Abbildung

$$(f)_h(x) = \frac{1}{h^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x-y}{h}\right) f(y)dy$$

in $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt.
Hinweis: Parameterabhängige Integrale, Satz von Fubini.

7.5 Aufgabe

Sei $n \geq 3$, wie üblich bezeichne e_n das n-dimensionale Volumen der Einheitskugel $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Weiter sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, außerdem gebe es ein $R > 0$, so daß für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| \geq R$ gilt: $f(x) = 0$. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$u(x) := \frac{1}{n(n-2)e_n}\int_{\mathbb{R}^n} \|x-y\|^{2-n} f(y)\, dy$$

wohldefiniert und zweimal stetig differenzierbar ist, und daß für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$-\Delta u(x) = f(x).$$

Hinweis: Eine elementare Variablensubstitution, parameterabhängige Integrale, Satz von Gauß.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben. Die Lösungen geben Sie bitte am 02.12.02 in der Vorlesung ab.]

Mathematatik III für Physiker

WS 2002/03

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

8 02.12.2002

Terminvorschlag für die erste Leistungskontrolle: Mittwoch, 18.12.02, während der Übungszeit.

8.1 $\star$ Aufgabe

Man berechne und begründe die Ableitung der Funktion auf $t \in (a, b)$, $a > 0$

$$t \longmapsto \int_0^1 \log(x^2 + t^2) dx.$$

8.2 Aufgabe

Seien $x \in \mathbb{R}$ und

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xy^2}}{1 + y^2} dy.$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ existiert das Integral?
Können wir die Ableitung von F bzgl. x berechnen?
Falls ja, wie lautet sie?

8.3 $\star$ Aufgabe

Seien $A = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq \|x\| \leq 1\}$ und $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \geq 1\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. $f_\alpha, g_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Abbildungen, definiert durch

$$f_\alpha(x) = \frac{1_A(x)}{\|x\|^\alpha} \qquad g_\alpha(x) = \frac{1_B(x)}{\|x\|^\alpha}$$

Für welche $p \in [1, \infty)$ ist die Funktion f_α in $L^p(\mathbb{R}^n)$? Und g_α?

8.4 Aufgabe

Seien $1 \leq p_1 \leq p_2$ und $D \subset \mathbb{R}^n$ eine meßbare Menge mit $\lambda(D) < \infty$. Man beweise, daß für alle auf D meßbaren Funktionen

$$\|f\|_{p_1} \leq \lambda(D)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \|f\|_{p_2}$$

gilt, und man folgere daraus $L^{p_2}(D) \subset L^{p_1}(D)$.

8.5 $\star$ Aufgabe

Sei $1 \leq p < q < \infty$. Man zeige:

- Es gibt Funktionen $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \setminus L^q(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^n) \setminus L^p(\mathbb{R}^n)$.
- Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beschränkt, und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, so gilt auch $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$.
- Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, so folgt $f \in L^s(\mathbb{R}^n)$ für alle $s \in [p, q]$, und es gilt

  $$\|f\|_s \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha},$$

  wobei $\alpha \in [0,1]$ so bestimmt wird, daß $\frac{1}{s} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$.
  Hinweis: Hölder–Ungleichung.

8.6 Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine meßbare Menge. In dieser Aufgabe betrachten wir nur reellwertige Funktionen. Zeigen Sie, daß

$$\mathcal{K} := \{f \in L^p_{\mathbb{R}}(D) : \quad \text{für fast alle } x \in D \text{ gilt } f(x) \geq 0\}$$

eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von $L^p_{\mathbb{R}}(D)$ ist. Außerdem gilt:

$$\lambda \in [0, \infty), \;\; f \in \mathcal{K} \Rightarrow \lambda f \in \mathcal{K};$$

d.h., $\mathcal{K}$ ist ein „Kegel“ in $L^p_{\mathbb{R}}(D)$.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben. Die Lösungen geben Sie bitte am 09.12.02 in der Vorlesung ab.]

Mathematatik III für Physiker
WS 2002/03

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

9 09.12.2002

Definition

Wir nennen zwei Normen $\|\cdot\|^\diamond, \|\cdot\|^*$ auf einem Vektorraum V *äquivalent*, falls zwei Konstanten C_1, C_2 existieren, so daß

$$C_1\|v\|^\diamond \leq \|v\|^* \leq C_2\|v\|^\diamond$$

für alle $v \in V$.

9.1 Aufgabe

Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Man beweise, daß die $L^p(D)$–Normen paarweise nicht äquivalent sind.

Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $u \in L^2(D)$; wir nennen $v \in L^2(D)$ *schwache* oder *Distributions–Ableitung von u in Richtung x_j*, falls für jede Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(D)$ auf D gilt:

$$\int_D \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} u \, dx = -\int_D \varphi \, v \, dx.$$

9.2 ⋆ Aufgabe

Man berechne die schwachen Ableitungen der folgenden Funktionen auf D

a)

$$D = (-1,1) \subset \mathbb{R}, \qquad u(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ x, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

b)

$$D = (-1,1) \subset \mathbb{R}, \qquad u(x) = |x|.$$

Ist die Funktion

$$D = (-1,1) \subset \mathbb{R}, \qquad \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ 1, & \text{falls } x > 0, \end{cases}$$

schwach differenzierbar auf D?

9.3 $\star$ Aufgabe

a) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Seien $u, v, w \in L^2(G)$ so, daß sowohl v als auch w schwache Ableitung von u in x_j-Richtung sind. Man zeige $v = w$ in $L^2(G)$.

b) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sei $f \in C^1(\overline{G})$. Man beweise, daß f auch schwach differenzierbar ist und daß die schwachen und die klassischen Ableitungen von f in $L^2(G)$ übereinstimmen.

9.4 $\star$ Aufgabe

Sei $f_k(x)$ die Folge

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^{-\frac{1}{k}} & 0 < x \leq 1 \\ x^{-k} & x > 1 \end{cases} .$$

Man beweise:

a) Für $k \geq 2$ ist $f_k \in L^1(\mathbb{R})$;

b) $\lim\limits_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k = 1$.

9.5 Aufgabe

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ meßbar. Man zeige daß auch die Faltung

$$(x, y) \longmapsto f(x - y)g(y)$$

in $\mathbb{R}^{2n}$ meßbar ist.
Hinweis: Transformationsformel in $\mathbb{R}^{2n}$.

9.6 $\star$ Aufgabe

a) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\{b_1, \ldots, b_n\} \subset \mathcal{H}$ linear unabhängig. Entwickeln Sie ein rekursives Verfahren, um ein orthonormiertes System $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset \mathcal{H}$ mit der Eigenschaft

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} : \qquad \text{Span } (b_1, \ldots, b_j) = \text{Span } (e_1, \ldots, e_j)$$

zu berechnen.
Hinweis: $e_1 := \frac{1}{\|b_1\|} b_1$, $\tilde{e_2} := b_2 - \langle b_2, e_1 \rangle e_1$, $e_2 := \frac{1}{\|\tilde{e_2}\|} \tilde{e_2}$, usw.

b) Wenden Sie dieses Verfahren in $L^2(-1, 1)$ an auf $b_1(x) = 1, b_2(x) = x, \ldots, b_4 = x^3$.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben. Die Lösungen geben Sie bitte am 16.12.02 in der Vorlesung ab.]

Mathematik III für Physiker
WS 2002/03

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

10 19.12.2002

10.1 ⋆ Aufgabe

Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2)\, d(x,y)$$

und stellen Sie eine Verbindung mit dem (Gaußschen Fehler–) Integral

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\, dx$$

her.

10.2 Aufgabe (Helmholtz-Zerlegung)

$L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n) = \{u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^n, u^{(j)} \in L^2$ für $j = 1, ..., n\}$ ist zusammen mit dem Skalarprodukt $(u, v) = \sum\limits_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} u^{(j)} \overline{v^{(j)}} dx$ offensichtlich ein Hilbertraum.

Sei

$$A = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n) : \text{ für fast alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ gilt } \sum_{j=1}^{n} x_j u^{(j)}(x) = 0 \right\};$$

$$B = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n) : \text{ für fast alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und alle } 1 \leq j, k \leq n \text{ gilt } \frac{u^{(j)}(x)}{x_j} = \frac{u^{(k)}(x)}{x_k} \right\}.$$

Zeigen Sie

a) A und B sind abgeschlossene Teilräume von $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$ die zueinander orthogonal sind.

b) Zu jedem $u \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$ gibt es $u_1 \in A, u_2 \in B$ mit $u = u_1 + u_2$.

10.3 ⋆ Aufgabe

Man zeige, daß

(a) die trigonometrischen Polynome $e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ikt) \quad (k \in \mathbb{Z})$ in $L^2(-\pi, \pi)$

(b) die Legendre-Polynome $L_k(x) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \frac{1}{2^k\, k!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k (1 - x^2)^k \quad (k \in \mathbb{N}_0)$ in $L^2(-1, 1)$

ein Orthonormalsystem bilden.

10.4 $\star$ Aufgabe

Man berechne die Fourierkoeffizienten der $2\pi-$periodischen Funktion, für die auf $[-\pi, \pi]$ $f(x) = x^2$ gilt.
Man beweise die Gleichungen

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^2}; \qquad \frac{\pi^4}{90} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

Hinweis: Parseval.

10.5 Aufgabe

Gegeben sei die ungerade $2\pi-$periodische Funktion, die von

$$f(x) = x^{-\alpha} e^x \qquad x \in (0, \pi)$$

erzeugt wird. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ können wir die Fourierreihe finden?
Man berechne die Fourierreihe für $\alpha = 0$.

10.6 Aufgabe

Man betrachte die eindimensionale Wärmegleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ auf } x \in (0, \pi),\ t \in (0, \infty)$$

mit den Randbedingungen

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$

und der Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = \phi(x),$$

wobei $u = u(x, t)$ als reellwertige Lösung gesucht wird. Gegeben sei dabei das zweimal stetig differenzierbare (reellwertige) Anfangsdatum ϕ, welches die Kompatibilitätsbedingung

$$\phi(0) = \phi(\pi) = 0$$

erfülle. Man setze ϕ ungerade nach $[-\pi, \pi]$ und dann 2π-periodisch nach ganz $\mathbb{R}$ fort. Man bestimme die Fourierreihe dieser Funktion und zeige, daß diese gleichmäßig konvergiert. Man beweise, daß man die Lösung in der Form

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) e^{-k^2 t}$$

finden kann und daß hierdurch insbesondere eine für $t > 0$ zweimal stetig differenzierbare Funktion gegeben wird.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben. Die Lösungen geben Sie bitte am 13.01.03 in der Vorlesung ab.]

Mathematik III für Physiker

WS 2002/03

Prof. H.C. Grunau, E. Sassone

11 13.01.2002

11.1 $\star$ Aufgabe

Man berechne die Fourierreihe für die folgende periodische Funktion:

11.2 $\star$ Aufgabe

Man berechne die Fourierreihe für die Funktion $f_p(t)$, die wie folgt definiert ist:

$$f_p(t+4) = f_p(t)$$

$$f_p(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad -2 \leq t < -1 \\ 1 & \text{falls} \quad -1 \leq t < 1 \\ 0 & \text{falls} \quad 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

11.3 Aufgabe

Seien $I = [a, b]$, $\mathcal{H} = L^2(I)$, $V_1 = \{\, f \in \mathcal{H} : \int_I f(x)\, dx = 0\}$ und
$V_2 = \{\, f \in \mathcal{H} : f(x) \equiv k, \quad \text{konstant} \quad \}$.
Man beweise, daß V_1 und V_2 orthogonal sind, man berechne die zwei Projektoren P_1 und P_2 für eine beliebige Funktion $g(x) \in \mathcal{H}$ und man prüfe die Gleichung $< P_2\, g_1, g_2 >=< g_1, P_2\, g_2 >$.

11.4 $\star$ Aufgabe

Wir betrachten in dieser Aufgabe ausschließlich reellwertige Funktionen.

(a) Man betrachte $e_k(t) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kt)$, $(k \in \mathbb{N}, t \in (0, \pi))$ und zeige, daß $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $L^2(0, \pi)$ ein vollständiges Orthonormalsystem bilden.
Hinweis: Setzen Sie beliebiges $f \in L^2(0, \pi)$ ungerade nach $(-\pi, \pi)$ fort und bestimmen Sie auf diesem Intervall die klassische Fourierreihe.

(b) Man imitiere den Beweis von Satz 8.10 der Vorlesung, um zu zeigen: Die Funktionen

$$(0, \pi) \times (0, \pi) \ni (s, t) \mapsto e_k(s) \cdot e_\ell(t)$$

$((k, \ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2((0, \pi) \times (0, \pi))$.

(c) Gegeben sei auf dem Gebiet $G = (0, \pi) \times (0, \pi)$ die Funktion $f(x, y) = x(y-1)$. Man finde die Fourierreihe von f bezüglich dem vollständigen Orthonormalsystem aus (b).

11.5 Aufgabe

Auch hier betrachten wir ausschließlich reellwertige Funktionen. Gegeben seien $I = [a, b]$ und der „abgeschlossene konvexe Kegel“ K von positiven Funktionen in $L^2(I)$:

$$K = \{f \in L^2(I) : \quad \text{fast überall in } I \text{ gilt } f \geq 0\}.$$

Man berechne seinen dualen Kegel:

$$K^* := \{g \in L^2(I) : \quad \text{für alle } f \in K \text{ gilt: } \langle f, g \rangle \leq 0\}.$$

Beachten Sie: Ist K sogar ein abgeschlossener Teilraum, so ist der duale Kegel das orthogonale Komplement. Man überlege sich, wie der Projektionssatz auf abgeschlossene konvexe Kegel verallgemeinert werden kann.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben. Die Lösungen geben Sie bitte am 20.01.03 in der Vorlesung ab.]

Mathematatik III für Physiker
WS 2002/03

Prof. H.C. Grunau, E. Sassone

12 20.01.2003

12.1 ⋆ Aufgabe

Man beweise, daß die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen in Polarkoordinaten gleich

$$\begin{cases} u_\theta = -\rho v_\rho \\ v_\theta = \rho u_\rho \end{cases}$$

sind.

[Diese Gleichungen sind wahr für $\rho > 0$, denn die Polarkoordinaten sind singulär im Ursprung.]

12.2 ⋆ Aufgabe

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, und sei $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$. Man beweise, daß f konstant ist.

12.3 ⋆ Aufgabe

a) Sei $\phi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, man parametrisiere bezüglich des Drehwinkels ϕ um den Mittelpunkt die Kreislinie durch -1 und 1, so daß der Nullpunkt, der Kreismittelpunkt und der Punkt 1 den Winkel ϕ_0 bilden.

b) Gegeben sei die Abbildung $L : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $L(z) = \frac{z-1}{z+1}$. Man zeige, daß die vorgegebene Kreislinie auf die Gerade $\{w : w = re^{-i\phi_0}, r \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$ abgebildet wird.

c) Sei $H : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $H(w) = \frac{1+w}{1-w}$. Man beweise, daß H und L zueinander invers sind.

d) Man verwende die Abbildungen L, H und $z \mapsto -z^2$ um das Bild des Äußeren des Kreises aus a) mit $0 \leq \phi_0 < \frac{\pi}{4}$ unter der Abbildung $f(z) = \frac{2z}{1+z^2}$ zu beschreiben.

12.4 Aufgabe

(a) Gegeben sei eine harmonische Funktion u auf der konvexen Menge $G \subset \mathbb{C}$. Man beweise die Existenz einer harmonischen Funktion v, so daß $u + iv$ auf G holomorph ist.

(b) Gegeben sei die Funktion $u(x, y) = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$ auf der ganzen Ebene $\mathbb{R}^2$, man berechne ihre konjugiert harmonische Funktion $v(x, y)$, so daß $f(x, y) = u(x, y)+iv(x, y)$ holomorph ist.

12.5 Aufgabe

Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ sei holomorph (und zusätzlich zweimal reell stetig differenzierbar), $f \neq 0$ in D. Man zeige, daß auch $h(x,y) = \log|f(x+iy)|$ harmonisch ist.

12.6 Aufgabe

Man beweise, daß die Funktionen $\sin(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ surjektiv sind.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben. Die Lösungen geben Sie bitte am 27.01.03 in der Vorlesung ab.]

Mathematatik III für Physiker

WS 2002/03

1. Klausur, 18.12.2002, Ohne Hilfsmittel

Prof. H.C. Grunau, E. Sassone

Jede Aufgabe wird mit 5 Punkten bewertet. Ab 12 erreichten Punkten betrachten wir die Teilnahme an dieser Klausur als erfolgreich. Viel Erfolg!

1 Aufgabe

Man berechne den Fluß von

$$\vec{F}(x,y,z) = (z, x^2 y, y^2 z)$$

durch die Oberfläche des Körpers

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad 2\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1 + x^2 + y^2\}.$$

Hinweis: Satz von Gauß.

2 Aufgabe

Man berechne das folgende Integral

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) dy\, dx.$$

3 Aufgabe

Man zeige mit Hilfe des Satzes über parameterabhängige Integrale, daß man die Funktion

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \qquad (x > 0)$$

beliebig oft unter dem Integral differenzieren darf.

4 Aufgabe

Man gebe an und beweise, für welche $p \geq 1$ die folgenden Funktionen in $L^p(D)$ liegen:

$$D = (0,1] \quad f(x) = \tfrac{x-1}{\sqrt[6]{x}};$$

$$D = [0,1] \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt[6]{x}} & x \neq 0, \\ -2 & x = 0. \end{cases}$$

Hinweis: Geben Sie integrierbare Majoranten bzw. nicht integrierbare positive Minoranten an.

5 Aufgabe

Man formuliere den Satz von majorisierten Konvergenz von Lebesgue.

b.w.

6 Aufgabe

Sei $D = (-1, 1)$, und man betrachte im Hilbertraum $L^2(D)$ die folgenden Teilräume:

$$V_1 := \{f \in L^2(D) : \quad \text{für fast alle } x \in (-1,1) \text{ gilt: } f(x) = f(-x)\};$$

$$V_2 := \{f \in L^2(D) : \quad \text{für fast alle } x \in (-1,1) \text{ gilt: } f(x) = -f(-x)\}.$$

Zeigen Sie: V_1, V_2 sind abgeschlossene Untervektorräume von $L^2(D)$ und es gilt:

$$\forall f \in V_1, \forall g \in V_2 : \ \langle f, g \rangle = \int_D f(x)\overline{g(x)}\, dx = 0.$$

Für beliebiges $f \in L^2(D)$ setzen Sie:

$$f_1(x) := \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right); \qquad f_2(x) := \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right).$$

Man zeige:

$$f_1 \in V_1, \qquad f_2 \in V_2, \qquad f = f_1 + f_2.$$

Mathematatik III für Physiker

WS 2002/03

2. Klausur, 03.02.2003, Ohne Hilfsmittel

Prof. H.C. Grunau, E. Sassone

Jede Aufgabe wird mit 5 Punkten bewertet. Ab 14 erreichten Punkten betrachten wir die Teilnahme an dieser Klausur als erfolgreich. Viel Erfolg!

1 Aufgabe

Man berechne die Fourierkoeffizienten für die folgende auf $(-\pi, \pi)$ periodische Funktion: $f(x) = 2\sin(x)\cos(x)$.
Man berechne auch die Fourierkoeffizienten für $2(\cos^2(x) - \sin^2(x))$.
Hinweis: Mit ein wenig Theorie können Sie langwierige Rechnungen vermeiden.

2 Aufgabe

Man berechne die Fourierkoeffizienten für die 2π–periodische Funktion g, die auf $(-\pi, \pi]$ wie folgt gegeben ist: $g(x) = \begin{cases} -\pi - x & \text{falls} \quad x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}), \\ x & \text{falls} \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ \pi - x & \text{falls} \quad x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$

Man wende die Parsevalrelation auf die Funktion g an, um $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$ zu berechnen.

Erinnerungshilfe

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(kx)\,dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(kx)\,dx.$$

Parsevalrelation:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2\,dx = \frac{\pi}{2}a_0^2 + \pi\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2).$$

3 Aufgabe

Man gebe die Definition der Vollständigkeit eines Orthonormalsystems in einem Hilbertraum sowie eine dazu äquivalente Bedingung an.

4 Aufgabe

Gegeben seien zwei auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen f und g. Man beweise direkt aus der reellen Theorie und ohne Verwendung der komplexen Kettenregel, daß die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen auf $\mathbb{C}$ auch für $f \circ g$ erfüllt sind.

5 Aufgabe

Gegeben seien die Menge $G = \{z \in \mathbb{C} : -\frac{\Pi}{4} < \mathrm{Im}(z) < 0, 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$ und die Funktion $f(z) = e^z$. Man bestimme $f(G)$.

6 Aufgabe

Sind die Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(x+iy) = e^{x^2+x-y^2-2+iy(2x+1)}$ und $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \quad g(z) = \frac{z}{|z|^2}$ holomorph?

7 Aufgabe

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, und es gelte $\forall z \in \mathbb{C} : \quad |f(z)|^2 = 1$. Man zeige: Dann ist f konstant.