Mathematik III für Physiker
WS 2002/03

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

0.1 Aufgabe

Gegeben seien zwei Möbius Transformationen $M_A(z) = \frac{a_1 z+b_1}{c_1 z+d_1}$ und $M_B(z) = \frac{a_2 z+b_2}{c_2 z+d_2}$, mit $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, man beweise, daß $(M_A \circ M_B)(z) = M_{A \cdot B}(z)$

0.2 Aufgabe

Man beweise, daß die Möbiustransformationen verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise abbildet.
[Hinweis: man beweise, daß jede Möbiustransformation als Komposition von Inversionen $z \mapsto \frac{1}{z}$, Dilatationen $z \mapsto \alpha z$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ fest), Rotationen $z \mapsto \exp(i\varphi)z$ ($\varphi \in \mathbb{R}$ fest) und Translationen $z \mapsto z + a$ ($a \in \mathbb{C}$ fest) dargestellt werden kann. Man zeige, daß jede von diesen Abbildungen verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise abbildet.]

0.3 Aufgabe

Man berechne die Fouriertransformierte von
$u(x) = e^{-(x+1)^2}$,
$u(x) = e^{-4x^2}$.

0.4 Aufgabe

Man berechne $\int_0^\infty \sin x^2 \, dx$.
[Hinweis: Man integriere die Funktion $f(z) = e^{iz^2}$ auf dem Weg $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, wo $\gamma_1 : z = t, t \in [0, R]$, $\gamma_2 : Re^{i\theta}, \theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $\gamma_3 : z = -t - it, t \in [-R, 0]$.
Dann berechne man das Integral, wenn $R \to \infty$.]

0.5 Aufgabe

Gegeben seien die reell differenziebare Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ und die reell differenzierbare Abbildung $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; zu diesem Zwecke identifiziere man $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Man beweise, daß

$$\frac{\partial(f \circ h)}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \circ h\right) \cdot \frac{\partial h}{\partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \circ h\right) \cdot \frac{\partial \overline{h}}{\partial z}, \qquad \frac{\partial(f \circ h)}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \circ h\right) \cdot \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \circ h\right) \cdot \frac{\partial \overline{h}}{\partial \bar{z}}.$$

$\left[\text{Hinweis:} \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]$

0.6 Aufgabe

Gegeben seien die zweimal reell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und die holomorphe Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Man beweise, daß $\Delta(f \circ h) = |h'|^2(\Delta f) \circ h$.
$\left[\text{Hinweis: } \Delta f = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f \right]$

Mathematik IV für Physiker

WS 2002/03

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

1 31.03.03

1.1 Aufgabe

Man berechne die folgenden Integrale:

1.1.1 $\star \int_{\gamma_1} f(z)dz$

1.1.2 $\star \int_{\gamma_2} f(z)dz$

1.1.3 $\int_{\gamma_1} g(z)dz$

1.1.4 $\int_{\gamma_2} g(z)dz$

wo $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, $g(z) = \frac{1}{z(1-z)}$,
$\gamma_1 = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $0 < r < 1$, r fest und
$\gamma_2 = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $R > 1$, R fest.

1.2 $\star$ Aufgabe

Man berechne das Integral von $f(z) = \frac{e^z}{2z}$ auf der Einheitskreislinie mit Mittelpunkt in $z_0 = 0$.

1.3 Aufgabe

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so daß $f|_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}$ und $f|_{\mathbb{R}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ mit einer auf $\mathbb{R}$ bzw. in einem reellen Intervall um x_0 konvergenten reellen Potenzreihe.
Man beweise daß f auf $\mathbb{C}$ mit der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - x_0)^k$ entwickelt werden kann. Man folgere daraus, dass für *derartige* Funktionen gilt: $\forall k : \quad a_k \in \mathbb{R}; \qquad \forall z : \quad \overline{f(z)} = f(\overline{z})$.

1.4 $\star$ Aufgabe

Sei $\gamma = e^{it} + \pi$, $t \in [0, 2\pi]$; man berechne

1.4.1 $\int_{\gamma} \frac{\cos(z)}{(z-\pi)^3} dz$

1.4.2 $\int_{\gamma} \frac{\cos(z)}{(z-\pi)^4} dz$

[Hinweis: Aufgabe1.3]

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 07.04.03 in der Vorlesung ab.]

Mathematatik IV für Physiker

SS 2003

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

2 11.04.03

2.1 $\star$ Aufgabe

Man berechne

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^m} \quad \text{für } |a| < z < |b| \text{ und } n, m \in \mathbb{N}$$

Hinweis: Differenzieren Sie die Cauchysche Integralformel.

2.2 $\star$ Aufgabe

Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $u : G \to \mathbb{R}$ sei harmonisch. Weiter seien $z_0 \in G, r > 0$ so, daß $\overline{B_r(z_0)} \subset G$. Zeigen Sie:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi = \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-z_0|=r} u(z)|dz|$$

Hinweis: $|dz| = r d\varphi$.

2.3 Aufgabe

Gegeben sei ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ und eine beliebige reguläre feste Kurve $\gamma \subset G$ mit Einheitsnormalenfeld ν. Sei $u : G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, harmonisch, und es gelte $u|_\gamma = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_\gamma = 0$ ist, dann ist $u \equiv 0$.

2.4 $\star$ Aufgabe

Man entscheide, ob die geschlossenen Kurven γ_1, γ_2 im angegebenen Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ jeweils homotop sind.

2.4.1 $G = \mathbb{C},\ \gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \to G,\ \gamma_1(t) = e^{it},\ \gamma_2(t) = 2 - e^{it}$

2.4.2 $G = \mathbb{C} \setminus \{0\},\ \gamma_1, \gamma_2$ wie in 2.4.1

2.4.3 $G = \mathbb{C},\ \gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \to G,\ \gamma_1(t) = e^{it},\ \gamma_2(t) = e^{2it}$

2.4.4 $G = \mathbb{C} \setminus \{0\},\ \gamma_1, \gamma_2$ wie in 2.4.3

2.4.5 $G = \mathbb{C} \setminus \{0\},\ ,\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to G$, geschlossene Kurven mit $\max_{t \in [a,b]} |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < \min_{t \in [a,b]} |\gamma_1(t)|$

2.5 Aufgabe

Gegeben sei die folgende Kurve γ, man berechne das folgende Integral $\forall \xi \in \mathbb{C} \setminus \gamma$

$$g(\xi) = \int_\gamma \frac{e^z}{z - \xi} dz.$$

2.6 $\star$ Aufgabe

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ sei stetig und in G holomorph. Man beweise:

$$\sup_G |f| = \sup_{\partial G} |f|.$$

2.7 $\star$ Aufgabe

Gegeben sei die Funktion $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z^2+1)}$. Man berechne die Laurentreihe mit Entwicklungspunkt 0 auf dem Kreis bzw. den Annuli $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$, $\Omega_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 25.04.03 in der Vorlesung ab.]

Mathematatik IV für Physiker
SS 2003

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

3 25.04.03

3.1 Aufgabe

Man bestimme für die folgenden Funktionen f alle Singularitäten, Laurentreihenentwicklungen in Umgebungen dieser Singularitäten, den Typ der Singularitäten, die Residuen und $\int\limits_{|\xi|=1} f(\xi)d\xi$, $\int\limits_{|\xi|=5} f(\xi)d\xi$

3.1.1 $f(z) = \sin\frac{1}{z}$

3.1.2 $\star$ $f(z) = \frac{z-3}{(z+2)^2(2z+1)}$

3.1.3 $f(z) = \frac{e^{(z^2)}-1}{z^n}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$.

3.2 $\star$ Aufgabe

Man berechne $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$.

[Hinweis: Sei $a = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\quad g(z) = \frac{e^{-z^2}}{1+e^{-2az}}$. Man zeige dann $g(z) - g(z+a) = e^{-z^2}$. Man integriere g für $R > 0$ entlang des viereckigen Weges durch $\{-R\}, \{R\}, \{R+a\}, \{-R+a\}$. Dann berechne man den Grenzwert für $R \to \infty$.]

3.3 Aufgabe

Sei G ein Gebiet, $\overline{B_\rho(z_0)} \subset G$. Seien $f, g : G \setminus \{z_1, ..., z_m\} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, die in $z_1, ..., z_m$ Polstellen oder hebbare Singularitäten haben. Außerdem haben f, g auf der Kreislinie $\partial B_\rho(z_0)$ weder Null- noch Polstellen. Man nenne $N(f)$ bzw. $N(g)$ die Anzahl der Nullstellen und $P(f)$ bzw. $P(g)$ die Anzahl der Polstellen (jeweils mit Vielfachheit gezählt) von f bzw. g in $B_\rho(z_0)$. Schließlich gelte auf $\partial B_\rho(z_0)$:

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|$$

Man zeige, daß $N(f) - P(f) = N(g) - P(g)$.
[Hinweis: man arbeite mit $f_\eta(z) = (1-\eta)f(z) + \eta g(z)$.]

3.4 Aufgabe

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ keine Eigenwerte von A. Dann heißt

$$R_A(z) := (A - z\,I)^{-1}$$

mit der Identität $I \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die *Resolvente* von A.

3.4.1 $\star$ Man zeige, daß $R_A(z)$ mit A kommutiert und die Eigenwerte $\mu = \dfrac{1}{\lambda - z}$ hat, wenn λ die Eigenwerte von A durchläuft.

3.4.2 $\star$ Man zeige: $R_A(z_1) - R_A(z_2) = (z_1 - z_2)\, R_A(z_1) R_A(z_2)\,.$

3.4.3 Sei λ fester Eigenwert von A mit der algebraischen Vielfachheit n_λ. Man zeige, daß dann die Resolvente $R_A(z)$ eine Laurentreihe der Gestalt

$$R_A(z) = \sum_{k=-n_\lambda}^{\infty} (z-\lambda)^k A_k\,,$$

besitzt, wobei die $n \times n$ Matrizen $A_k = A_k(\lambda)$ nur von λ, aber nicht von z abhängen. Ist $r > 0$ so klein gewählt, daß $\overline{B_r(\lambda)}$ außer λ keinen weiteren Eigenwert von A enthält, so gilt mit $\gamma(\varphi) = \lambda + r\, e^{i\varphi}$, wobei $0 \le \varphi < 2\pi$ ist:

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z^{-k-1} R_A(z)\, dz\,.$$

[Hinweis: Zeige zunächst, daß die Koeffizienten der Matrix $(\mathrm{Det}(A - z\,I)) \cdot R_A(z)$ Polynome in $(z-\lambda)$ (vom Grade $\le n-1$) sind.]

3.4.4 Für den Fall, daß A aus einem einzigen Jordanblock der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

besteht, berechne man $R_A(z)$ und die Laurententwicklung von $R_A(z)$ bezüglich λ.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 02.05.03 in der Vorlesung ab.]

Mathematatik IV für Physiker

SS 2003

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

4 02.05.03

4.1 Aufgabe

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, und jeder Eigenwert werde entsprechend seiner algebraischen Vielfachheit angegeben, (d.h. $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n_1}$, wobei n_1 die algebraische Vielfachheit von λ_1 ist). Man beweise: Ist eine andere Matrix $\tilde{A}$ hinreichend nahe an A, dann sind die Eigenwerte $\tilde{\lambda}_i$ von $\tilde{A}$ bei geeigneter Numerierung ebenfalls hinreichend nahe an λ_i.

[Hinweis: Das bedeutet $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0:$
$\forall i, j = 1, ..., n: \;\; |a_{ij} - \tilde{a}_{ij}| < \delta \Rightarrow \forall i = 1, ..., n: \;\; \left|\lambda_i - \tilde{\lambda}_i\right| < \varepsilon.$]

4.2 $\star$ Aufgabe

Für jeden Eigenwert λ der komplexen $n\times n$-Matrix A definiere man die komplexe $n\times n$-Matrix

$$P_\lambda = -A_{-1}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_A(z)\,dz\,,$$

wobei γ ein hinreichend kleiner Kreis um λ wie in Aufgabe 3.4.3 ist.

4.2.1

Es seien λ und λ' zwei (nicht notwendigerweise verschiedene) Eigenwerte von A und o.B.d.A. $s > r > 0$ so klein gewählt, dass in $\overline{B_r(\lambda)}$ bzw. $\overline{B_s(\lambda')}$ jeweils nur ein einziger Eigenwert von A liegt und überdies $\partial B_r(\lambda)$ sowie $\partial B_s(\lambda')$ disjunkt sind. Man definiere nun P_λ mit Hilfe des Weges $\gamma(\varphi) = \lambda + r\,e^{i\varphi}$ und $P_{\lambda'}$ mit Hilfe des Weges $\gamma'(\varphi) = \lambda' + s\,e^{i\varphi}$, wobei $0 \le \varphi < 2\pi$. Man zeige mit Hilfe der Resolventengleichung, dass

$$P_\lambda P_{\lambda'} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\gamma'}\int_\gamma \frac{R_A(z) - R_A(z')}{z - z'}\,dz\,dz' = \begin{cases} 0 & , \quad \lambda \neq \lambda' \\ P_\lambda & , \quad \lambda = \lambda'\,. \end{cases}$$

4.2.2

Es seien $\lambda_1, ..., \lambda_m$ alle paarweise verschiedenen Eigenwerte von A. Man zeige mit Hilfe des Residuensatzes, dass

$$\sum_{k=1}^m P_{\lambda_k} = I$$

gilt, wobei $I \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix bedeutet.

[Hinweis: Man berechne $-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_R(0)} R_A(z)\,dz$ über eine so große Kreislinie, dass deren Inneres alle Eigenwerte von A enthält. Nach Anwendung des Residuensatzes entwickle man $R_A(z)$ in eine für $|z| = R$ konvergente Reihe mit Potenzen $\frac{1}{z^k}$, $\;k \ge 1$.]

4.2.3

Nun sei $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Zeige, dass dann x auch Eigenvektor von $R_A(z)$ zum Eigenwert $\mu = \frac{1}{\lambda - z}$ ist, wenn $z \in \mathbb{C}$ kein Eigenwert von A ist, und hiermit für alle Eigenwerte λ' von A, dass

$$P_{\lambda'}\, x = \begin{cases} 0 & , \quad \lambda \neq \lambda' \\ x & , \quad \lambda = \lambda' . \end{cases}$$

4.3 Aufgabe

Man leite eine Differenzialgleichung her, die den Verkehrsfluss in einer Einbahnstraße modelliert.

[Hinweis: Man beschreibe die Fahrzeuge mit der kontinuierlichen Variablen $y \in \mathbb{R}$. Sei $x = \varphi(t, y) \in \mathbb{R}$ die umkehrbare Funktion, die den Ort beschreibt, wo sich das Fahrzeug y zum Zeitpunkt t befindet; sei $y = \tilde{\varphi}(t, x)$ ihre Umkehrfunktion. Es bezeichne $v(t, y)$ die Geschwindigkeit des Fahrzeugs y zum Zeitpunkt t, und man definiere $\rho(y, t)$ die Dichte des Verkehrs als Funktion von y, mit der Eigenschaft:

$\int\limits_{y_1}^{y_2} \rho(y, t)\, dy$ ist unabhängig von der Zeit t.

Schließlich definiere man die Dichte $\tilde{\rho}(x, t)$ und die Geschwindigkeit $\tilde{v}(x, t)$ als die entsprechenden Funktionen in Abhängigkeit von x.

Man bestimme eine Differentialgleichung für $\tilde{v}(x, t), \tilde{\rho}(x, t)$, d.h. für Geschwindigkeit und Dichte des Verkehrs in x zum Zeitpunkt t.

Man ersetze dazu y durch x in der folgenden Gleichung:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{y_1}^{y_2} \rho(y, t) dt.$$

Man erhält so eine Gleichung für die zwei gesuchten Funktionen $\tilde{\rho}, \tilde{v}$. Durch eine Modellannahme $\tilde{v} = \tilde{v}(\tilde{\rho})$ kann man $\tilde{v}$ als Unbekannte eliminieren.]

4.4 $\star$ Aufgabe

Gegeben seien die Differenzialgleichung und die Anfangswertvorgabe:

$$\begin{cases} u_t + 3uu_x = 0; \\ u(0, x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ (x-1)^2 \left(\frac{1}{2}x + 1\right), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases} \end{cases}$$

Man beschreibe ihre Charakteristiken und ihre Lösung.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 09.05.03 in der Vorlesung ab.]

Mathematik IV für Physiker
SS 2003

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

5 09.05.03

5.1 Aufgabe

Man studiere die Charakteristiken und die Lösungen für die folgenden Anfangswertprobleme:

5.1.1 $$\begin{cases} u_t + 3u_{x_3} + 5u_{x_1} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4, \\ u(0,x) = x_1^2 - x_2 & \text{für } x \in \mathbb{R}^4; \end{cases}$$

5.2.1 $$\begin{cases} u_t + 3u_{x_3} + 5u_{x_1} = tx & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4, \\ u(0,x) = x_1^2 - x_2 & \text{für } x \in \mathbb{R}^4. \end{cases}$$

5.2 $\star$ Aufgabe

Gegeben sei die Burgerssche Gleichung

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{in } [0,\infty) \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = \phi(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

mit stückweise konstantem Anfangsdatum

$$\phi(x) = \begin{cases} u_l \text{ falls } x < 0, \\ u_r \text{ falls } x > 0. \end{cases}$$

Man studiere jeweils die Charakteristiken, falls $u_r > u_l$ und falls $u_r < u_l$, und bestimme mit Hilfe der Rankine-Hugoniot-Bedingung schwache Lösungen. Man kontrolliere, ob die schwachen Lösungen die Entropie-Bedingung erfüllen.

5.3 Aufgabe

Gegeben sei das folgende System

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{u^2} u_x = 0 & \text{in } [0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = x^2 + 1 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Man berechne die Charakteristiken und für $0 \le t < 1$ die klassische Lösung.

5.4 $\star$ Aufgabe

Gegeben sei das Cauchyproblem für die Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0 & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \varphi(x) & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) = \psi(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

mit $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ und $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Sei $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ eine Lösung. Leiten Sie die d'Alembertschen Lösungsformeln für u auf die folgende Weise her: Man schreibe $u_{tt} - u_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) u$ und definiere $v = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) u$. Benutzen Sie die Lösungsformeln für die linearen Transportgleichungen erster Ordnung, um sukzessive v und dann u zu bestimmen.

5.5 $\star$ Aufgabe

Gegeben sei eine quadratische positiv semidefinite symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Man beweise mit Hilfe der Hauptachsentransformazion, dass eine positiv semidefinite symmetrische Wurzel $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ von B existiert, so dass also gilt $C^2 = B$.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 16.05.03 in der Vorlesung ab.]

Mathematatik IV für Physiker
SS 2003

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

6 16.05.03

6.1 Aufgabe

Gegeben seien die Funktionen $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}), \psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger. Man beweise, dass die Lösung $u(t,x)$ der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } [-T,T] \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \varphi(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,t) = \psi(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

in der $\mathcal{C}^2$-Norm stetig von den Anfangsdaten $\varphi(x)$, $\psi(x)$ abhängt.
[Das bedeutet, es existiert eine Konstante $K = K(T)$ so, dass $||u||_{\mathcal{C}^2} \leq K\left(||\varphi||_{\mathcal{C}^2} + ||\psi||_{\mathcal{C}^1}\right)$
]

6.2 ⋆ Aufgabe

Gegeben seien die Funktionen $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ und die Konstante $a \in \mathbb{R}$. Man finde die Lösung des Cauchyproblems:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \varphi(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) = \psi(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

6.3 ⋆ Aufgabe

Gegeben sei die Wellengleichung für eine fest eingespannte Saite der Länge π, das heißt

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (t,x) \in [0,\infty) \times [0,\pi]\,, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & t \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = f(x) & x \in [0,\pi]\,, \\ u_t(0,x) = g(x) & x \in [0,\pi]\,. \end{cases}$$

Für die Anfangsdaten gelte $f \in \mathcal{C}^3([0,\pi])$, $g \in \mathcal{C}^2([0,\pi])$, und es seien die folgenden Kompatibilitätsbedingungen erfüllt:

$$\begin{cases} f(0) = f(\pi), \\ f''(0) = f''(\pi) = 0, \\ g(0) = g(\pi) = 0. \end{cases}$$

Man benutze die Separation der Variabeln, um die Lösung zu finden.
[Man setze f und g ungerade und $2\pi -$ periodisch fort. Man entwickle die Anfangsdaten in Fourierreihen und betrachte die zeitliche Evolution der jeweiligen Moden.
Man beachte, dass die Konvergenz der Lösungsreihe in $\mathcal{C}^2$ zu zeigen ist.]

6.4 Aufgabe

Man beweise, dass die Regularitätsanforderungen an die Anfangsdaten für die Wellengleichung in drei Dimensionen

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = \varphi(x) & x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(0,x) = \psi(x) & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

im Allgemeinen notwendig sind. Das bedeutet, dass $\varphi \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3), \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ im Allgemeinen notwendig ist, um $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ zu erhalten.

[Man betrachte $\varphi = 0$ und ein konkretes $\psi \in \mathcal{C}^1$ radialsymmetrisch mit $\psi|_{B_1(0)} = 0$.
Man zeige, dass die Abbildung $t \mapsto \Delta u(t,0)$ im Allgemeinen nicht stetig für alle Zeiten ist.]

6.5 ⋆ Aufgabe

Man benutze die Energiemethode, um die Eindeutigkeit für das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (t,x) \in [0,\infty) \times [0,\ell]\,, \\ u(t,0) = u(t,\ell) = 0 & t \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = f(x) & x \in [0,\ell]\,, \\ u_t(0,x) = g(x) & x \in [0,\ell]\,, \end{cases}$$

zu zeigen.

[Man studiere die Differenzialgleichung mit Anfangsdaten $\varphi = \psi = 0$.
Man multipliziere die Differenzialgleichung mit u_t und integriere partiell.]

[Die mit ⋆ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 23.05.03 in der Vorlesung ab.]

Mathematatik IV für Physiker

SS 2003

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

7 23.05.03

7.1 $\star$ Aufgabe

Gegeben seien die Funktionen φ und ψ mit kompakten Trägern in $B_R(0)$. Es sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ die Lösung des Cauchyproblems für die Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = \varphi(x) & \text{auf } \mathbb{R}^n, \\ u_t(0,x) = \psi(x) & \text{auf } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

7.1.1 Man beweise, dass die Lösung $u(t, \,.\,)$ kompakten Träger in $B_{R+|t|}(0)$ hat.
Hinweis: Satz 17.5.

7.1.2 Man beweise, dass die Energie

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left(u_t^2(t,x) + \|\nabla u(t,x)\|^2 \right) \, dx$$

konstant bleibt.

7.2 Aufgabe

Gegeben sei die partielle Differenzialgleichung von Navier-Stokes

$$\begin{aligned} u_t - \nu \Delta u + \left(\sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) u + \frac{\nabla p}{\rho} &= 0, \\ \operatorname{div} u &= 0; \end{aligned}$$

die die Strömung einer inkompressiblen homogenen zähen Flüssigkeit in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschreibt. Die Lösungen sind gesucht als Abbildungen $u : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ für das Geschwindigkeitsfeld und $p : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ für den hydrodynamischen Druck. Die positiven Konstanten ν und ρ beschreiben Viskosität bzw. Dichte der Flüssigkeit. Man definiere $v(t,x) = au(bt, cx)$, $q(t,x) = dp(bt, cx)$, wo a, b, c und d konstant und positiv sind. Man bestimme die Differenzialgleichung für (v, q). Für welche Wahl der Konstanten $a, b, c, d > 0$ erfüllt (v, q) genau dieselbe Differenzialgleichung? In welchem Gebiet des $\mathbb{R}^3$? Und durch welche Wahl der Konstanten erreicht man $\nu = 1$, $\rho = 1$?

7.3 Aufgabe

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes glattes Gebiet. Setzen Sie voraus, dass (unter geeigneten Bedingungen an die Daten) ein Existenzsatz für das folgende Problem bekannt ist:

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = f & (t,x) \in \mathbb{R} \times \bar{\Omega}, \\ v|_{\partial\Omega} = 0 & t \in \mathbb{R}, \\ v(0,x) = v_t(0,x) = 0 & x \in \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Gegeben sei eine glatte Funktion $\chi : \mathbb{R} \times \bar{\Omega}$. Bestimmen Sie die Lösung u des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & t \in \mathbb{R}, x \in \Omega, \\ u(t,x) = \chi(t,x), & t \in \mathbb{R}, x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = \chi(0,x), & x \in \Omega, \\ u_t(0,x) = \chi_t(0,x) & x \in \Omega. \end{cases}$$

7.4 $\star$ Aufgabe

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ die Einheitskugel. Gegeben sei die sogenannte Helmoltzsche Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{in } B, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial B. \end{aligned} \tag{1}$$

Gesucht sind nichttriviale Lösungen u zu geeigneten Eigenwerten λ. Wir beschränken uns hier auf radialsymmetrische Lösungen $u(x) = v(r)$, $r = |x|$.

Nehmen Sie zunächst an, dass ein solches u gegeben ist und zeigen Sie, dass v dann die folgende Gleichung löst:

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{dv}{dr} + \lambda v = 0. \tag{2}$$

Man leite mit der Ersetzung $\tilde{w} = r^{\frac{n}{2}-1} v$ die Besselsche Differenzialgleichung mit $\alpha = \frac{n-2}{2}$ her:

$$\frac{d^2 \tilde{w}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\tilde{w}}{dr} + \left(\lambda - \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2\right) \tilde{w} = 0. \tag{3}$$

Man studiere (3) für $\lambda = 1$ und setze

$$\tilde{w}(r) = r^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$$

an. Bestimmen Sie die Potenzreihe und zeigen Sie Konvergenz.

Nehmen Sie nun ohne Beweis an, dass diese Lösung $\tilde{w} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ unendlich viele Nullstellen $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$ besitzt. Wie erhält man nun daraus radialsymmetrische Lösungen u von (1) und entsprechende Eigenwerte λ?

Was erhält man speziell im Fall $n = 3$?

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 30.05.03 in der Vorlesung ab.]

Mathematatik IV für Physiker

SS 2003

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

8 30.05.03

8.1 ⋆ Aufgabe

Das Ziel dieser Aufgabe besteht darin, sich einen Eindruck von dem Wachstum der Eigenwerte von $-\Delta$ unter homogenen Dirichletrandbedingungen zu verschaffen.

Dazu betrachten wir der Einfachheit halber das Würfelgebiet

$$\Omega := (0, \pi)^n .$$

Bestimmen Sie wie in Mathematik III, Übung 11.4., ein vollständiges Orthonormalsystem (w_k) in $L^2(\Omega)$ von Eigenfunktionen von

$$-\Delta w = \lambda w \text{ in } \Omega, \qquad w|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Gibt es beispielsweise in $n = 2$ auch vierfache Eigenwerte?

Es bezeichne $N(\lambda_0)$ die Anzahl der Eigenwerte $\leq \lambda_0$.

Zeigen Sie: Es gibt positive Konstanten $0 < c_1 \leq c_2$, die nur von der Raumdimension n abhängen, so dass

$$c_1 \lambda_0^{n/2} \leq N(\lambda_0) \leq c_2 \lambda_0^{n/2}.$$

Betrachten Sie dazu den Kreis $B_{\sqrt{\lambda_0}}(0) \subset \mathbb{R}^n$ und schätzen Sie ab, wieviele Punkte mit ganzzahligen Koordinaten dieser enthält. Betrachten Sie dazu Quadrate $Q_1 \subset B_{\sqrt{\lambda_0}}(0) \subset Q_2$.

Stellen Sie sich nun die Eigenwerte von (4) der Größe nach angeordnet vor:

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$$

Folgern Sie aus Ihren bisherigen Überlegungen, dass mit geeigneten Konstanten $0 < c_3 \leq c_4$, die ebenfalls nur von der Raumdimension n abhängen, gilt:

$$c_3 k^{2/n} \leq \lambda_k \leq c_4 k^{2/n}.$$

8.2 Aufgabe

Gegeben sei das Problem der schwingenden Platte auf einem beschränkten glatten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$:

$$\Delta\Delta u + u_{tt} = 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Omega. \tag{5}$$

Man studiere das Problem mit den Randbedingungen

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \partial\Omega : \qquad u = \Delta u = 0.$$

Entwickeln Sie wie in §19 der Vorlesung eine formale Reihendarstellung der allgemeinen Lösung von (5). Wie kann man Anfangswertvorgaben

$$u(0, x) = \varphi(x), \qquad u_t(0, x) = \psi(x)$$

realisieren?

Durch welche Glattheits- und Kompatibilitätsbedingungen an φ und ψ kann man Konvergenz in C^4 der formalen Lösungsreihe für u erreichen?

[Hinweis: Man benutze die Separation der Variabeln $u(x,t) = v(t)w(x)$; $(\Delta\Delta - k^4) = (\Delta - k^2)(\Delta + k^2)$.]

8.3 Aufgabe

Gegeben sei die Helmoltzsche Gleichung auf der Einheitskugel $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{auf } B, \\ u = 0 & \text{auf } \partial B. \end{cases}$$

Man bestimme die nichtradialsymmetrischen Lösungen zu geeigneten Eigenwerten. Man benutze die Separation der Variabeln $u(x) = v(r)w(\theta)$. Stellen Sie den Laplace-Operator in Polarkoordinaten dar, und leiten Sie Eigenwertprobleme für v und w her. Letztere Lösungen lassen sich leicht bestimmen, für erstere gelangen Sie wieder auf eine ganze Schar Besselscher Differenzialgleichungen. Man setze $v(r) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ an und bestimme die Potenzreihen. Zeigen Sie deren Konvergenz. Betrachten Sie zunächst nur den Eigenwertparameter 1. Man gelangt durch Betrachtung der Nullstellen der Besselfunktionen und Skalierung wieder zu Eigenfunktionen in der Einheitskugel.

8.4 ⋆ Aufgabe

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes glattes Gebiet. Setzen Sie voraus, dass (unter geeigneten Bedingungen an die Daten) ein Existenzsatz für das folgende Problem (Wärmeleitungsgleichung) bekannt ist:

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega, \\ v|_{\partial\Omega} = 0, & t \in \mathbb{R}, x \in \partial\Omega, \\ v(0,x) = \varphi(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

Gegeben sei eine hinreichend reguläre Funktion $f : \mathbb{R} \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie analog zum Vorgehen in §20 der Vorlesung die Lösung u des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & t \in \mathbb{R}, x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, & t \in \mathbb{R}, x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = \varphi(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

8.5 ⋆ Aufgabe

Gegeben sei eine glatte Funktion u, die die Wärmeleitungsgleichung $u_t - \Delta u = 0$ in $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ löst.

8.5.1

Man beweise, dass auch $u_\lambda(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ die Differenzialgleichung erfüllt.

8.5.2

Sei $n = 1$ und setzen Sie die Lösung in der selbstähnlichen Form $u(x,t) = v\left(\frac{x^2}{t}\right)$ an. Man zeige, dass dann gilt:

$$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0 \quad (\text{ für } \; z > 0). \tag{6}$$

8.5.3

Man beweise, dass eine allgemeine Lösung von (6) gegeben ist durch:

$$v(z) = c \int_0^z e^{-\frac{s}{4}} s^{-\frac{1}{2}} ds + d.$$

$\left[\begin{array}{l} \text{Die mit } \star \text{ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.} \\ \text{Die Lösungen geben Sie bitte am 06.06.03 in der Vorlesung ab.} \end{array}\right]$

Mathematatik IV für Physiker

SS 2003

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

9 06.06.03

9.1 Aufgabe

Eine integrierbare Funktion u in einem Gebiet Ω wird *schwach harmonisch (subharmonisch, superharmonisch) in* Ω genannt falls

$$\int_\Omega u\Delta\varphi\, dx = (\geq, \leq)0 \qquad \forall\varphi \geq 0, \varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega), supp(\varphi) \subset \Omega.$$

Man beweise, dass eine in $\mathcal{C}^2(\Omega)$ schwach harmonische (subharmonische, superharmonische) Funktion harmonisch (subharmonisch, superharmonisch) ist.

9.2 $\star$ Aufgabe

Gegeben seien ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine superharmonische Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Man beweise, dass

$$\forall x \in \Omega,\ \forall r > 0,\ r < dist(x, \partial\Omega) : \qquad u(x) \geq \frac{1}{ne_n r^{n-1}} \int\limits_{||\xi||=r} u(x+\xi) dS(\xi).$$

9.3 $\star$ Aufgabe

Man beweise *das starke Minimumprinzip für harmonische (superharmonische) Funktionen*: Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ eine harmonische (superharmonische) Funktion. Gibt es ein $x_0 \in \Omega$ so, dass $\forall x \in \Omega : u(x) \geq u(x_0)$, so ist u konstant.

9.4 $\star$ Aufgabe

Man beweise *den Satz von Liouville*:
Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch und beschränkt; dann ist u konstant.

[Hinweis: man nehme zwei beliebige feste Punkte $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$

$$u(x_1) - u(x_2) = \frac{1}{e_n r^n}\left[\int\limits_{B_r(x_1)} u(\xi)d\xi - \int\limits_{B_r(x_2)} u(\xi)d\xi\right] =$$

$$= \frac{1}{e_n r^n}\left[\int\limits_{B_r(x_1)\setminus B_r(x_2)} u(\xi)d\xi - \int\limits_{B_r(x_2)\setminus B_r(x_1)} u(\xi)d\xi\right].$$

Falls $r \to \infty$, zeige man , dass $\frac{1}{e_n r^n} \cdot Vol(B_r(x_1) \setminus B_r(x_2)) \to 0$.]

9.5 $\star$ Aufgabe

9.5.1 Gegeben seien ein Gebiet Ω, $T \in (0, \infty)$ und eine Lösung $u \in \mathcal{C}^2\left((0,T] \times \Omega\right)$ der strikten Wärmeleitungs*un*gleichung:

$$u_t - \Delta u > 0.$$

Man zeige, dass kein lokales Minimum von u auf $(0,T] \times \Omega$ existiert. Ist zusätzlich Ω beschränkt und $u \in \mathcal{C}^0\left([0,T] \times \overline{\Omega}\right)$ so wird das Minimum von u genau auf dem *parabolischen Rand* $P\Omega_T := (\{0\} \times \overline{\Omega}) \cup ([0,T] \times \partial\Omega)$ des Raum-Zeit-Zylinders $(0,T] \times \Omega$ angenommen.
[Hinweis: Vergleichen Sie den Beweis von Satz 21.7 der Vorlesung.]

9.5.2 Sei Ω ein beschränktes Gebiet, $T \in (0, \infty)$. Man beweise, dass das schwache Miminumprinzip auch für

$$u_t - \Delta u = 0 \qquad (\star)$$

erfüllt ist. D.h ist $u \in \mathcal{C}^0\left([0,T] \times \overline{\Omega}\right) \cup \mathcal{C}^2\left((0,T] \times \Omega\right)$ eine Lösung von $(\star)$, so gilt

$$\min_{[0,T]\times\overline{\Omega}} u = \min_{P\Omega_T} u.$$

[Hinweis: Man betrachte für $\varepsilon > 0$ die Funktion $v(t,x) = u(t,x) - \varepsilon |x|^2$.]

9.6 Aufgabe

Man beweise, dass die Wärmegleichung $u_t - \Delta u = 0$ irreversible Phänomena modelliert.
[Hinweis: Sei $u(x,t)$ Lösung und man definiere $\tilde{u}(x,t) = u(x,-t)$ die Lösung, die rückwärts in der Zeit läuft. Man beweise, dass $\tilde{u}$ im Allgemeinen keine Lösung mehr für die Wärmeleitungsgleichung ist.]

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 20.06.03 in der Vorlesung ab.]

Mathematik IV für Physiker
SS 2003

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

10 20.06.03

10.1 ⋆ Aufgabe

10.1.1 Man beweise, dass die singulären Grundlösungen des Laplace-Operators $-\Delta$ in $\mathbb{R}^n$

$$\Phi(\|x-y\|) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log(\|x-y\|), & n=2, \\ \frac{1}{(n-2)ne_n}\|x-y\|^{2-n}, & n \geq 3, \end{cases}$$

für jedes feste $y \in \mathbb{R}^n$ harmonisch bezüglich $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y\}$ sind.

10.1.2 Sei nun $n \geq 3$. Gegeben sei eine Funktion $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$. Man betrachte deren Newton-Potential

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\|x-y\|) f(y)dy$$

und beweise, dass $\lim_{\|x\|\to\infty} u(x) = 0$. Kann man etwas Derartiges auch für $n = 1, 2$ erwarten?

10.2 Aufgabe

Sei $n = 2$. Gegeben sie $\varphi : \partial B_1(0) \to \mathbb{R}$, gesucht ist $u : \overline{B} \to \mathbb{R}$ als Lösung von

$$\Delta u = 0 \text{ in } B, \qquad u = \varphi \text{ auf } \partial B.$$

Betrachten Sie $\tilde{\varphi} := \varphi(\cos t, \sin t)$. Nehmen Sie der Einfachheit halber $\tilde{\varphi} \in C^1(\mathbb{R})$ an. Entwickeln Sie $\tilde{\varphi}$ in eine Fourierreihe, und gewinnen Sie daraus eine Reihendarstellung von u.

10.3 Aufgabe

Zur Herleitung der Greenschen Funktion in der Einheitskugel:
Nehmen Sie $n \geq 3$ an, und machen Sie für beliebiges, aber festes $x \in B_1(0)$ den Ansatz:

$$G(x,y) = \Phi(\|x-y\|) - a(x)\Phi(\|b(x)x - y\|).$$

Die Funktionen a und b sind so zu bestimmen, dass für alle $y \in \partial B_1(0)$ gilt: $G(x,y) = 0$. Leiten Sie aus dieser Forderung die (Ihnen schon bekannte) Form von a und b her.

10.4 ⋆ Aufgabe

Es sei $u \in C^2(B_1(0)) \cap C^0(\overline{B_1(0)})$ superharmonisch. Leiten Sie schwaches und starkes Minimumprinzip für u in B direkt aus den Eigenschaften von Greenscher Funktion und Poissonkern her.

Nehmen Sie nun an, dass zusätzlich $u \in C^2(\overline{B_1(0)})$ und $u|_{\partial B_1(0)} = 0$ gilt. Zeigen Sie: Ist $u \not\equiv 0$, so gilt für die äußere Normalableitung überall auf ∂B_1:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) < 0.$$

10.5 $\star$ Aufgabe

Für jede Distribution $T \in \mathcal{D}'$ und glatte Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ beweise man, dass auch die wie folgt definierte Abbildung $(f \cdot T)$

$$\forall \varphi \in C_0^\infty : \qquad (f \cdot T)[\varphi] := T[f \cdot \varphi]$$

ebenfalls eine Distribution ist.

10.6 $\star$ Aufgabe

Gegeben sei die Funktion $u : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $u(x) := \Phi(\|x\|)$ mit der singulären Grundlösung aus Aufgabe 10.1 und T_u die davon erzeugte Distribution. Man beweise, dass

$$-\Delta T_u = \delta_0 \qquad\qquad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 27.06.03 in der Vorlesung ab.]

Mathematik IV für Physiker
SS 2003

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

11 27.06.03 Aufgaben für die letzte Übung und die Ferien

11.1 Aufgabe

Gegeben seien das Gebiet Ω und die Folge $\{x_k\} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, die gegen einen Punkt $x \in \partial\Omega$ konvergiert. Weiter sei $\{c_k\}$ eine beliebige Folge von reellen Werten. Sei δ_{x_k} die Diracsche Deltadistribution in x_k. Man beweise, dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \delta_{x_k}$ in $D'(\Omega)$ konvergiert.

11.2 Aufgabe

Gegeben seien ein beschränktes Intervall I und $u \in W^{1,p}(I)$, mit $Du = 0$ f.ü. in I. Man beweise, dass u f.ü. konstant in I ist.

11.3 Aufgabe

Gegeben sei ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
11.3.1 Man beweise, dass die Poincaré Ungleichung $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)}$ für $u \in C_0^\infty$ mit einer Konstanten $C = C(\Omega, p)$ gilt.
11.3.2 Durch ein Dichtheitsargument zeige man, dass

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \qquad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

11.3.3 Sei $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, es gelte $Du = 0$ f.ü. in Ω. Man zeige: Dann ist $u = 0$ f.ü. in Ω.

11.4 Aufgabe

Gegeben sei $\Gamma = \{(0,0,x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\}$, $\delta_\Gamma[\varphi] = \int_\Gamma \varphi(x)ds(x)$ und

$$H(x) = \begin{pmatrix} \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2} \\ \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt:

$$\operatorname{rot} T_H = 2\pi\delta_\Gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man beweise mit denselben Methoden, dass im Distributionssinne gilt:

$$\operatorname{div} B := \frac{\partial}{\partial x_1} T_{H_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} T_{H_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} T_{H_3} = 0.$$

11.5 Aufgabe

Gegeben sei $F = \{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, man definiere dann die „flächenartige“ Deltadistribution:

$$\delta_F[\varphi] := \int_F \varphi(x_1, x_2, 0)\, dx_1\, dx_2.$$

Seien dann

$$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H(x_3) \end{pmatrix}.$$

Man beweise, dass im Distributionssinne gilt:

$$\operatorname{div} T_E = \delta_F \text{ und } \operatorname{rot} T_E = 0.$$

11.6 Aufgabe

Gegeben seien ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, eine positiv definite symmetrische Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $c \in [0, \infty)$. Dann existiert zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ genau eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des Dirichletproblems

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j}(x) + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i u_{x_i}(x) + cu(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Definitionsgemaß bedeutet das: $u \in H_0^1$, und für jede Testfunktion $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ gilt:

$$+\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \int_\Omega u_{x_i} \varphi_{x_j}\, dx + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \int_\Omega u_{x_i} \varphi + c \int_\Omega u\varphi\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx.$$

Außerdem gibt es eine Konstante $\tilde{C} = \tilde{C}(n, \operatorname{diam}\Omega, A)$ so dass stets $\|u\|_{H_0^1} \leq \tilde{C}\|f\|_{L^2}$.