Partielle Differentialgleichungen II

Sommersemester 2012

H.-Ch. Grunau

1 25.01.2012

1.1 Aufgabe (5 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R}), \psi \in C_0^1(\mathbb{R})$, d.h. die **Träger** der Anfangsdaten seien **kompakt**. Es sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ die Lösung des Cauchyproblems für die Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \varphi(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,t) = \psi(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Weiter bezeichne $k(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_t(t,x)^2 \, dx$ die kinetische und $p(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_x(t,x)^2 \, dx$ die potentielle Energie der Lösung u zur Zeit t. Man zeige:

(a) $t \mapsto k(t) + p(t)$ ist konstant.

(b) Für hinreichend große positive Zeiten gilt *Gleichheit zwischen potentieller und kinetischer Energie*:

$$\exists T_0 > 0 \text{ geeignet:} \qquad \forall t \geq T_0 : \qquad k(t) = p(t).$$

1.2 Aufgabe (5 Punkte)

Gegeben seien die messbaren und beschränkten Funktionen $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Gesucht ist eine Lösung $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Cauchyproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{für } (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \varphi(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) = \psi(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

Definieren Sie u für $t \geq 0$ mit Hilfe der d'Alembertschen Formel. Zeigen Sie, dass u schwache Lösung von (1) in dem Sinne ist, dass für alle Testfunktionen $\chi \in C_0^2([0,\infty) \times \mathbb{R})$ gilt:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u(t,x) \left(\chi_{tt} - \chi_{xx} \right) \, dxdt = - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \chi_t(0,x) \, dx + \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \chi(0,x) \, dx.$$

Definition (Raum der Testfunktionen, Distributionen)

Für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definiert man den Raum der Testfunktionen $\mathcal{D} = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \exists K \subset \Omega \text{ kompakt } : \operatorname{supp} \varphi \subset K\}$. Diesen Raum versieht man mit folgendem Konvergenzbegriff: $\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} \varphi$ genau dann, wenn ein Kompaktum $K \subset \Omega$ existiert mit $\forall k : \operatorname{supp}(\varphi_k) \subset K$ und wenn für alle Multiindizes α gilt, dass $D^\alpha \varphi_k \to D^\alpha \varphi$ gleichmäßig.
Man nennt ein auf $\mathcal{D}$ lineares Funktional $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *Distribution* auf Ω, falls dieses stetig im folgenden Sinn ist:

$$\lim_{k \to \infty} T(\varphi_k) = T(\varphi),$$

wobei $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ eine beliebige Folge mit $\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} \varphi$ ist.

1.3 Aufgabe (2 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Man zeige, dass durch

$$T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}, \qquad T_f(\varphi) := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$$

eine Distribution, die *von f induzierte Distribution*, gegeben ist.

Definition (δ-Distribution)

Gegeben sei ein Punkt $a \in \mathbb{R}^n$. Man nennt das Funktional

$$\delta_a : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \qquad \varphi \mapsto \delta_a(\varphi) := \varphi(a),$$

Delta-Distribution in a, wobei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Definition (Ableitung von Distributionen)

Sei T eine Distribution auf Ω, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex. Man definiert die Distributionsableitung $D^\alpha T$ durch:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \qquad D^\alpha T(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi).$$

1.4 Aufgabe (3 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f \in C^1(\Omega)$. Man zeige, dass dann klassische und Distributionsableitung übereinstimmen:

$$T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i} T_f.$$

1.5 Aufgabe (3 Punkte)

Sei für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\Gamma(x) := \begin{cases} \frac{1}{n(n-2)e_n}|x|^{2-n}, & \text{falls } n \neq 2, \\ -\frac{1}{2\pi}\log|x|, & \text{falls } n = 2. \end{cases}$$

Benutzen Sie die Sätze 3.2/3.3 der Vorlesung, um zu zeigen, dass im Distributionssinne in $\mathbb{R}^n$

$$-\Delta T_\Gamma = \delta_0$$

gilt.

1.6 Aufgabe (4 Punkte)

Gegeben sei für $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } |x| > 1, \\ x+1, & \text{falls } -1 \le x < 0 \\ 1-x, & \text{falls } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Man definiere $u_1(t,x) := \varphi(x+t)$ und $u_2 := \varphi(x-t)$, $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial t}u_j$ and $\frac{\partial}{\partial x}u_j$ $(j = 1,2)$ als Distributionsableitungen. Es reicht, wenn Sie die Berechnung einer Ableitung ausführlich darstellen, und die weiteren Ergebnisse nur angeben.

Ihre Lösungen geben Sie bitte am Donnerstag, den 19.04.2012 in der Vorlesung ab.

Partielle Differentialgleichungen II

Sommersemester 2012

H.-Ch. Grunau

2 19.04.2012

Definition

Man betrachte die Elemente des Raum-Zeit-Kontinuums als Vektoren mit vier Komponenten (x_0, x_1, x_2, x_3), dabei spielt die x_0-Variable die Rolle der Zeit. Sei Γ die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen -1, 1, 1, 1. Eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ heißt eine *Lorentz-Transformation*, wenn $\Gamma = L^T \circ \Gamma \circ L$ gilt.

2.1 Aufgabe (5 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Jede Lorentz-Transformation L ist regulär, d.h. $L \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$, und L^{-1} ist ebenfalls eine Lorentz-Transformation. Mit L ist L^T ebenfalls eine Lorentz-Transformation.

(b) Es seien L und M Lorentz-Transformationen. Man zeige, dass dann auch $L \circ M$ eine Lorentz-Transformation ist. D.h., $\left(\{L \in \mathbb{R}^{4\times 4} : L \text{ ist Lorentz-Transformation}\}, \circ\right)$ bildet eine Gruppe.

(c) Für Vektoren $v = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ werde durch $m(v) = -v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ die *Lorentz„metrik“* definiert. Beweisen Sie, dass $L \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ genau dann eine Lorentz-Transformation ist, wenn $m(Lv) = m(v)$ für alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^4$ gilt.

(d) Sei $(x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto u(x_0, x_1, x_2, x_3)$ eine Funktion in C^2, L eine Lorentz-Transformation. Weiter sei

$$U(v_0, v_1, v_2, v_3) = u(L(v_0, v_1, v_2, v_3)).$$

Zeigen Sie, dass

$$U_{v_0v_0} - U_{v_1v_1} - U_{v_2v_2} - U_{v_3v_3} = (u_{x_0x_0} - u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3}) \circ L.$$

2.2 Aufgabe (5 Punkte)

Man beweise, dass die Regularitätsanforderungen an die Anfangsdaten für die Wellengleichung in drei Dimensionen

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(0,x) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

im Allgemeinen notwendig sind. Das bedeutet, dass $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ im Allgemeinen notwendig ist, um $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ zu erhalten.

Hinweis. Man betrachte $\varphi = 0$ und ein konkretes radialsymmetrisches $\psi \in C^1$ mit $\psi|_{B_1(0)} = 0$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $t \mapsto \Delta u(t, 0)$ im Allgemeinen nicht für alle Zeiten stetig ist.

2.3 Aufgabe (5 Punkte)

Sei $n \geq 2$ und $N = (n-1)/2$, falls n ungerade, und $N = n/2$, falls n gerade, $\varphi \in C_0^{N+2}(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in C_0^{N+1}(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert laut Vorlesung genau eine Lösung $u \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ des Problems

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) = 0, & (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(0,x) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Sie sollen das Abklingverhalten der Lösung u bezüglich der Zeit studieren. Sei dazu R so, dass $\operatorname{supp} \varphi, \operatorname{supp} \psi \subset \overline{B_R(0)}$.
Man beweise, dass für $t > \max\{4R, 1\}$ gilt:

$$\|u(t,\,.\,)\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C \left(\|\varphi\|_{C^N(\mathbb{R}^n)} + \|\psi\|_{C^{N-1}(\mathbb{R}^n)} \right) \cdot t^{-\frac{n-1}{2}},$$

wobei die Konstante C nur von R und n abhängt.

(a) Zeigen Sie die Behauptung für ungerades n.
Hinweis: Man berechne die $(n-1)$-dimensionale Oberfläche von $\mathbb{S}^{n-1} \cap B_{\frac{R}{t}}(-\frac{1}{t}x)$. Sie haben dabei $\rho \mapsto \frac{\rho^{n-2}}{\sqrt{1-\rho^2}}$ zu integrieren; dazu schätze man für $\rho \leq \frac{1}{2}$ den Nenner trivial ab. Man vgl. auch Satz 12.9 der Vorlesung.

(b) Man zeige die Behauptung für gerades n.

Definition (δ-Distribution einer Kurve)

Gegeben sei eine glatte reguläre doppelpunktfreie Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ bzw. $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Man nennt das Funktional

$$\delta_\gamma : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \qquad \varphi \mapsto \delta_\gamma(\varphi) := \int_\gamma \varphi(x)\, ds(x),$$

Delta-Distribution der Kurve γ, wobei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

2.4 Aufgabe (5 Punkte)

Gegeben sei das Problem

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ x+1, & -1 \leq x < 0, \\ 1-x, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \\ u_t(0,x) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Man definiere u mit Hilfe der d'Alembertschen Formel. Berechnen Sie u_{xx} and u_{tt} als Distributionsableitungen und zeigen Sie, dass u in diesem Sinne obiges Cauchyproblem löst.

Ihre Lösungen geben Sie bitte am Donnerstag, den 03.05.2012 in der Vorlesung ab.

Partielle Differentialgleichungen II

Sommersemester 2012

H.-Ch. Grunau

3 03.05.2012

3.1 Aufgabe (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$F(x,y,z) := \frac{1}{x^2+y^2}\,(-y,x,0)$$

rot F in $\mathbb{R}^3$ im Distributionssinne.

(b) Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$G(x,y) := \frac{1}{x^2+y^2}\,(x,y)$$

$\frac{\partial G_1}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial x}$ in $\mathbb{R}^2$ im Distributionssinne.

3.2 Aufgabe (10 Punkte)

Benutzen Sie die Charakteristikenmethode, um die folgenden Probleme zu lösen:

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ geeignet und $\Gamma = \{(x,y) : y = 0\} \cap \Omega$;

$$\begin{cases} u(x,y)u_x(x,y) + u_y(x,y) - x = 0, & (x,y) \in \Omega, \\ u(x,0) = 1, & (x,0) \in \Gamma. \end{cases}$$

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ geeignet und $\Gamma = \{(x,y) : x = 1\} \cap \Omega$;

$$\begin{cases} xu_x + yu_y - (x+y)u = 0, & (x,y) \in \Omega, \\ u(1,y) = 1, & (1,y) \in \Gamma. \end{cases}$$

Wo existiert in diesem Fall die Lösung?

3.3 Aufgabe (5 Punkte)

Gegeben sei das folgende Cauchyproblem:

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{u}u_x = 0 & \text{in } [0,T) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = 1 + |x|, & x \in \mathbb{R}; \end{cases}$$

$T > 0$ geeignet. Man berechne die Charakteristiken und die dadurch für $0 \le t < 1$ wohldefinierte Lösung.

3.4 Aufgabe (2 Punkte)

Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und u eine stetig differenzierbare Lösung von

$$\begin{cases} u_t(t,x) + F(u(t,x))_x = 0 & \text{für } (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \varphi(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Weiter habe $u(t,\,.\,)$ für $t \geq 0$ lokal gleichmäßig beschränkte Träger in $\mathbb{R}$. Man beweise, dass für alle $t > 0$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Ihre Lösungen geben Sie bitte am Montag, den 21.05.2012 in der Vorlesung ab.

Partielle Differentialgleichungen II

Sommersemester 2012

H.-Ch. Grunau

4 21.05.2012

4.1 Aufgabe (7 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Gamma = \{x_n = 0\} \cap \Omega \neq \emptyset$, $\xi_0 \in \Gamma$, $b \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $c \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\varphi \in C^1(\Gamma)$. In $(\xi_0, \varphi(\xi_0))$ gelte die Nichtcharakteristikenbedingung

$$b_n(\xi_0, \varphi(\xi_0)) \neq 0.$$

Seien $u_1, u_2 \in C^1(\Omega)$ Lösungen des *quasilinearen* Cauchyproblems

$$\begin{cases} \langle b(x, u_j(x)), \nabla u_j(x) \rangle + c(x, u_j(x)) = 0, & x \in \Omega, \\ u_j(x) = \varphi(x), & x \in \Gamma. \end{cases}$$

Zeigen Sie: Dann existiert eine Umgebung $U \subset \Omega$ von ξ_0 derart, dass $u_1 = u_2$ in U gilt.

4.2 Aufgabe (3 Punkte)

Für geeignetes $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\Gamma = \{x_2 = 0\} \cap \Omega \neq \emptyset$ betrachten Sie das *voll nichtlineare* Cauchyproblem

$$\begin{cases} u_{x_2}^2(x) = 1, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma. \end{cases} \tag{$*$}$$

Zeigen Sie, dass $(*)$ mindestens zwei Lösungen besitzt. Zeigen Sie, dass dieser Verlust von Eindeutigkeit auftritt, obwohl die Nichtcharakteristikenbedingung für Ihre zulässigen Sätze von Anfangsdaten erfüllt ist.

4.3 Aufgabe (5 Punkte)

Betrachten Sie das Geradebiegen der Anfangsdatenhyperfläche in Bemerkung 15.9, zusammen mit der in Satz 15.15 beschriebenen Nichtcharakteristikenbedingung. Es sei $\tilde{\xi}_0 = \Phi^{-1}(\xi_0)$, $A := D\Phi(\tilde{\xi}_0)$. Überlegen Sie sich, dass man $A \in O(n)$, $A \circ e_j = \tau_j$, $j = 1, \ldots, n-1$, $A \circ e_n = \nu$ erreichen kann. Sei weiter $\tilde{z}_0 := z_0$, $\tilde{p}_0 := p_0 \circ A$. Zeigen Sie, dass die Nichtcharakteristikenbedingung aus Satz 15.15 äquivalent ist zu

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{p}_n}(\tilde{\xi}_0, \tilde{z}_0, \tilde{p}_0) \neq 0.$$

4.4 Aufgabe (5 Punkte)

Zeigen Sie: Ist $\mathscr{B}$ eine Hamelbasis (Basis im Sinne der linearen Algebra) des unendlichdimensionalen Hilbertraums $\mathscr{H}$, so ist $\mathscr{B}$ überzählbar.

Hinweis. Führen Sie einen Widerspruchsbeweis. Konstruieren Sie mittels des Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren eine abzählbare Orthonormalbasis in $\mathscr{H}$. Konstruieren Sie ein Element im Hilbertraum $\mathscr{H}$, welches nicht endliche Linearkombination aus diesen Basisvektoren ist.

Ihre Lösungen geben Sie bitte am Donnerstag, den 07.06.12 in der Vorlesung ab.

Partielle Differentialgleichungen II

Sommersemester 2012

H.-Ch. Grunau

5 07.06.2012

5.1 Aufgabe (3 Punkte)

Man betrachte den reellen Hilbertraum $\mathscr{H} = L^2((-1,1),\mathbb{R})$ und darin den Untervektorraum

$$V := \{f \in \mathscr{H} : \text{ für fast alle } x \in (-1,1) \text{ gilt } f(x) = f(-x)\}.$$

Man zeige, dass V in $\mathscr{H}$ abgeschlossen ist und berechne $V^\perp$.

5.2 Aufgabe (Helmholtz-Zerlegung im Fourierraum, 3 Punkte)

$L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^n) = \{u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^n, u^{(j)} \in L^2 \text{ für } j = 1,...,n\}$ ist zusammen mit dem Skalarprodukt $\langle u,v\rangle = \sum\limits_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} u^{(j)}\overline{v^{(j)}}dx$ offensichtlich ein komplexer Hilbertraum.

Sei

$$A = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^n) : \text{ für fast alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ gilt } \sum_{j=1}^n x_j u^{(j)}(x) = 0 \right\};$$

$$B = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^n) : \text{ für fast alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und alle } 1 \le j,k \le n \text{ gilt } \frac{u^{(j)}(x)}{x_j} = \frac{u^{(k)}(x)}{x_k} \right\}.$$

Zeigen Sie

(a) A und B sind abgeschlossene Teilräume von $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^n)$, die zueinander orthogonal sind.

(b) Zu jedem $u \in L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^n)$ gibt es $u_1 \in A, u_2 \in B$ mit $u = u_1 + u_2$.

5.3 Aufgabe (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge. Betrachten Sie den reellen Hilbertraum $\mathscr{H} = L^2(\Omega)$. Sei $(f_k) \subset L^2(\Omega)$ eine Folge, so dass $\forall k : \quad \|f_k\|_{L^2(\Omega)} \le 1$ gilt und so dass $f_k \to f$ punktweise fast überall für $k \to \infty$ konvergiert. Zeigen Sie: $f \in L^2(\Omega)$ und

$$f_k \rightharpoonup f \text{ in } L^2(\Omega).$$

Hinweis. Lemma von Fatou, Satz von Egorov bzw. Konvergenzsatz von Vitali.

5.4 Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\mathscr{H}$ ein reeller Hilbertraum.

(a) Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sei schwach konvergent gegen f.

Zeigen Sie: Es gibt eine Teilfolge $(f_{k_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ derart, dass die Folge der arithmetischen Mittel $F_m := \frac{1}{m}\sum_{\ell=1}^{m} f_{k_\ell}$ stark gegen f konvergiert ($m \to \infty$).

Hinweis: Man kann ohne Einschränkung annehmen, dass $f = 0$ ist. Bestimmen Sie sukzessive f_{k_ℓ} so, dass das Skalarprodukt mit $f_{k_1}, ..., f_{k_{\ell-1}}$ hinreichend klein wird.

(b) Sei $M \subset \mathscr{H}$ eine abgeschlossene *konvexe* Teilmenge.

Zeigen Sie: M ist schwach folgenabgeschlossen. (D.h. aus $f_k \in M$, $f \in \mathscr{H}$, $f_k \rightharpoonup f$ $(k \to \infty)$ folgt stets $f \in M$.)

(c) Nehmen Sie nun an, dass $\mathscr{H}$ unendlichdimensional ist und geben Sie ein Beispiel für eine abgeschlossene Teilmenge $M \subset \mathscr{H}$, die *nicht* schwach folgenabgeschlossen ist.

5.5 Aufgabe (5 Punkte)

Betrachten Sie den Würfel $W = [0,\pi] \times [0,\pi] \subset \mathbb{R}^2$ und das Eigenwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } W, \\ u = 0 & \text{auf } \partial W, \end{cases} \tag{EWP}$$

und das vollständige Orthonormalsystem $e_{j,k}(x,y) = \frac{2}{\pi}\sin(jx)\sin(ky)$ von Eigenfunktionen von (EWP). Ordnen Sie die Eigenwerte der Größe nach an $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$, und führen Sie jeden Eigenwert entsprechend seiner Vielfachheit auf. Zeigen Sie („$\sim$“ bedeutet asymptotisch gleich)

$$\lambda_j \sim \frac{4}{\pi} j \quad (j \to \infty).$$

Führen Sie eine entsprechende Überlegung auch für n-dimensionale Würfel durch und zeigen Sie, dass mit geeigneten Konstanten C_n gilt:

$$\lambda_j \sim C_n j^{2/n} \quad (j \to \infty).$$

Ihre Lösungen geben Sie bitte am Donnerstag, den 21.06.12 in der Vorlesung ab.

Partielle Differentialgleichungen II

Sommersemester 2012

H.-Ch. Grunau

6 21.06.2012

6.1 Aufgabe (5 Punkte)

Sei $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ die Einheitskugel, $n \geq 2$. Betrachten Sie die Räume radialsymmetrischer Funktionen

$$\begin{aligned} L^2_{\mathrm{rad}}(B) &= \{f \in L^2(B) : \text{ es gibt ein messbares } \tilde{f} : [0,1) \to \mathbb{R}, \text{ so dass } f(x) = \tilde{f}(|x|) \text{ f.ü.}\}; \\ H^1_{0,\mathrm{rad}}(B) &= \{f \in H^1_0(B) : \text{ es gibt ein messbares } \tilde{f} : [0,1) \to \mathbb{R}, \text{ so dass } f(x) = \tilde{f}(|x|) \text{ f.ü.}\} \end{aligned}$$

und zeigen Sie, dass es sich um abgeschlossene Untervektorräume und damit um Teilhilberträume von $L^2(B)$ bzw. $H^1_0(B)$ handelt.

Erläutern Sie, wie die Argumentation der Vorlesung modifiziert werden kann, um die Existenz eines in $L^2_{\mathrm{rad}}(B)$ vollständigen Orthonormalsystems $(w_{k,\mathrm{rad}})_{k\in\mathbb{N}}$ von Eigenfunktionen $w_{k,\mathrm{rad}} \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(B)$ zu Eigenwerten $\lambda_{k,\mathrm{rad}}$ zu zeigen, so dass für alle $\varphi \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(B)$ gilt:

$$\int_0^1 r^{n-1} w'_{k,\mathrm{rad}}(r)\varphi'(r)\,dr = \lambda_{k,\mathrm{rad}} \int_0^1 r^{n-1} w_{k,\mathrm{rad}}(r)\varphi(r)\,dr.$$

Für das Folgende dürfen Sie ohne Beweis das folgende Regularitätsresultat benutzen: Es gilt sogar $w_{k,\mathrm{rad}} \in C^\infty(\overline{B})$ und im klassischen Sinne

$$-\Delta w_{k,\mathrm{rad}} = \lambda_{k,\mathrm{rad}} w_{k,\mathrm{rad}} \text{ in } B, \qquad w_{k,\mathrm{rad}} = 0 \text{ auf } \partial B$$

bzw. in radialen Koordinaten

$$(r^{n-1} w'_{k,\mathrm{rad}}(r))' = \lambda_{k,\mathrm{rad}} r^{n-1} w_{k,\mathrm{rad}}(r) \text{ für } r \in [0,1], \qquad w'_{k,\mathrm{rad}}(0) = w_{k,\mathrm{rad}}(1) = 0.$$

6.2 Aufgabe (8 Punkte)

Wir erinnern an Aufgabe 1 von Blatt 3 des ersten Teils dieser Vorlesung. Dort hatten wir für $\alpha = \frac{n-2}{2}$, $n \in \mathbb{N}$ die Besselfunktionen erster Art

$$J_\alpha(r) := \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{\alpha+2k}$$

als Lösungen der Besselschen Differentialgleichung eingeführt:

$$\frac{d^2 J_\alpha}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dJ_\alpha}{dr} + \left(1 - \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2\right) J_\alpha = 0.$$

Sie hatten gesehen, dass man mit den reellen Vielfachen von $v(r) = r^{-\alpha} J_\alpha(r)$, $\alpha = \frac{n-2}{2}$ alle Lösungen des Problems

$$r^{n-1}\left(v'' + \frac{n-1}{r}v' + v\right) = (r^{n-1}v')' + r^{n-1}v = 0 \text{ für } r \in [0,\infty), \qquad v'(0) = 0 \tag{2}$$

erhält.

(a) Betrachten Sie nun die $\lambda_{k,\text{rad}}$ aus Aufgabe 6.1 und zeigen Sie, dass man mit geeigneten Vielfachen von geeignet reskalierten Lösungen $v(\,.\,)$ von (2) alle Lösungen des Problems

$$(r^{n-1}u')' + \lambda_{k,\text{rad}} r^{n-1} u = 0 \text{ für } r \in [0,\infty), \qquad u'(0) = 0$$

erhält. Folgern Sie nun aus Aufgabe 6.1, dass J_α unendlich viele Nullstellen in $(0,\infty)$ besitzt.

(b) Folgern Sie nun, dass alle *radialen* Eigenwerte $\lambda_{k,\text{rad}}$ in $H^1_{0,\text{rad}}(B)$, d.h. mit radialsymmetrischen Eigenfunktionen, einfach sind.

(c) Betrachten Sie $v_\alpha(r) = r^{-\alpha} J_\alpha(r)$. Zeigen Sie, dass zwischen je zwei positiven Nullstellen von v'_α genau eine Nullstelle von v_α und umgekehrt liegt. Man sagt, dass sich die positiven Nullstellen von v_α und v'_α gegenseitig trennen.
Hinweis. Verwenden Sie den Satz von Rolle, indem Sie auch die Vielfachheiten der Nullstellen diskutieren.

(d) Zeigen Sie für $r > 0$:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{J_\alpha(r)}{r^\alpha}\right) = -\frac{J_{\alpha+1}(r)}{r^\alpha}.$$

Wegen (c) trennen sich also die positiven Nullstellen von J_α und $J_{\alpha+1}$ gegenseitig. Was können Sie daraus über die relative Lage der *radialen* Eigenwerte $\lambda_{k,\text{rad}}$ in den Raumdimensionen n und $n+2$ folgern?

6.3 Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet;

$$a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad a(p) = \frac{1}{\sqrt{1+|p|^2}}\, p.$$

(a) Für $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ gelte

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(\nabla u)) \le -\operatorname{div}(a(\nabla v)) & \text{in } \Omega, \\ u \le v & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Folgern Sie daraus:

$$u \le v \text{ in } \Omega.$$

Hinweis. Leiten Sie mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung für $w = v - u$ eine Differentialungleichung der Form

$$-\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x) w_{x_i})_{x_j} \ge 0 \text{ in } \Omega$$

her. Dabei hängen die Koeffizienten $a_{ij} = a_{ji}$ zwar von u und v ab, sind aber bei bekannten und fest gehaltenen u und v stetig differenzierbar und gleichmäßig elliptisch.

(b) Seien nun $H \in [0,\infty)$ und $R > 0$ so, dass $H \cdot R \le 1$ und dass außerdem $\overline{\Omega} \subset B_R(0)$. Es sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung des Dirichletproblems für die Gleichung vorgegebener mittlerer Krümmung:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(\nabla u)) = nH & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass dann u der folgenden a-priori-Abschätzung genügt:

$$\forall x \in \overline{\Omega} : \quad 0 \le u(x) \le \sqrt{R^2 - |x|^2}.$$

Ihre Lösungen geben Sie bitte am Donnerstag, den 05.07.12 in der Vorlesung ab.