Analysis der Navier-Stokes-Gleichungen

Wintersemester 2007 / 08

H.-Ch. Grunau

1 08.10.2007

1.1 Aufgabe (2 Punkte)

Ergänzen Sie $u(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1 - x_1^2 - x_2^2)$ bzw. $u(x_1, x_2, x_3) = (x_3, 0, 0)$ so, dass sich Lösungen für ein jeweils geeignetes Randwertproblem für die stationären Navier-Stokes-Gleichungen ergeben.

1.2 Aufgabe (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes glattes Gebiet, $\varphi \in C_0^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ sei ein reguläres Anfangsdatum mit $\mathrm{div}\varphi(x) = 0$, $x \in \Omega$. Nehmen Sie an, dass für alle positive Zeiten eine reguläre Lösung $u \in C^{1,2}([0,\infty) \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$, $p \in C^{0,1}([0,\infty) \times \overline{\Omega}, \mathbb{R})$ existiert:

$$\begin{aligned} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) + \left(\sum_{j=1}^3 u_j(t,x) \frac{\partial}{\partial x_j}\right) u(t,x) + \nabla p(t,x) &= 0 && \text{für } t \geq 0, x \in \overline{\Omega}, \\ \mathrm{div}\, u(t,x) &= 0 && \text{für } t \geq 0, x \in \overline{\Omega}, \\ u(t,x) &= 0 && \text{für } t \geq 0, x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) &= \varphi(x) && \text{für } x \in \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen die kinetische Energie von $u(t, \,.\,)$ exponentiell gegen 0 konvergiert, d.h. dass es eine Konstante $c > 0$ gibt derart, dass gilt:

$$\|u(t, \,.\,)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^{-ct} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

1.3 Aufgabe (3 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq q < r < s \leq \infty$. Sei $f \in L^q(\Omega) \cap L^s(\Omega)$. Man zeige: Dann ist auch $f \in L^r(\Omega)$, und es gilt die Interpolationsungleichung:

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^q(\Omega)}^{\lambda} \|f\|_{L^s(\Omega)}^{1-\lambda},$$

wobei $\lambda \in (0,1)$ so gewählt ist, dass $\frac{1}{r} = \frac{\lambda}{q} + \frac{1-\lambda}{s}$ gilt.

1.4 Aufgabe (4 Punkte)

Sei $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass mit einer geeigneten Konstanten $C = C(n)$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\|\varphi\|_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq C \cdot \|\, |\nabla \varphi| \,\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Hinweis. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Hölder-Ungleichung, Satz von Fubini.

Definition

Ein Banachraum $(V, \| \, . \, \|)$ heißt gleichmäßig konvex, falls zu jedem $\epsilon \in (0,2)$ ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ existiert, so dass für alle $f, g \in V$ gilt:

$$\|f\| \leq 1, \|g\| \leq 1, \|f - g\| \geq \varepsilon \Rightarrow \|f + g\| \leq 2(1 - \delta).$$

1.5 Aufgabe (4 Punkte)

Sei $(V, \| \, . \, \|)$ ein gleichmäßig konvexer Banachraum, $f_k, f \in V$. Zeigen Sie: Genau dann konvergiert $f_k \to f \quad (k \to \infty)$ im Normsinne, wenn $f_k \rightharpoonup f \quad (k \to \infty)$ schwach konvergiert und $\lim_{k\to\infty} \|f_k\| = \|f\|$ gilt.

Hinweis. Verwenden Sie den *Satz von Hahn-Banach* in der folgenden Form: Zu jedem $f \in V$ existiert ein $L \in V^*$ mit $\|L\| = 1$ und $L(f) = \|f\|$.

1.6 Aufgabe (3 Punkte)

Benutzen Sie Satz 2.4, um zu zeigen: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 < p < \infty$, so ist $L^p(\Omega)$ reflexiv.

Ihre Lösungen geben Sie bitte am Dienstag, den 16.10.2007 in der Vorlesung ab.

2 15.10.2007

Wir betrachten zunächst nur Räume reellwertiger Funktionen.

2.1 Aufgabe (3 Punkte)

Sei $2 \leq p < \infty$. Man zeige, dass für alle $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\|f+g\|_{L^p}^p + \|f-g\|_{L^p}^p \leq 2^{p-1}\left(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p\right).$$

Hinweis. Man zeige zunächst für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dass $\left(|\alpha+\beta|^p + |\alpha-\beta|^p\right)^{1/p} \leq \sqrt{2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)^{1/2}$ und fahre dann mit der Hölder-Ungleichung fort.

2.2 Aufgabe (5 Punkte)

Sei $1 < p < 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Beweisen Sie:

(a) Für $z \in [0,1]$ gilt: $(1+z^q)^{p-1} \leq \frac{1}{2}\left((1-z)^p + (1+z)^p\right)$.
Hinweis. Binomialreihe. Weisen Sie Positivität der einzelnen Reihenglieder nach.

(b) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $|x+y|^q + |x-y|^q \leq 2(|x|^p + |y|^p)^{q-1}$.

2.3 Aufgabe (3 Punkte)

Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Man zeige, dass für $p > 1$ gilt: $\left(|f|^p + |g|^p\right)^{1/p} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx\right)^p + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\,dx\right)^p\right)^{1/p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(|f|^p + |g|^p\right)^{1/p}\,dx.$$

Hinweis. Man schreibe $\left(\alpha^p + \beta^p\right)^{1/p}$ in der Form $a\alpha + b\beta$.

2.4 Aufgabe (2 Punkte)

Sei $1 < p < 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Beweisen Sie:

$$\|f+g\|_{L^p}^q + \|f-g\|_{L^p}^q \leq 2\left(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p\right)^{q-1}.$$

2.5 Aufgabe (2 Punkte)

Mit Hilfe von Aufgaben 2.1 und 2.4 zeige man: $(L^p(\mathbb{R}^n), \|\,.\,\|_{L^p})$, $1 < p < \infty$, ist gleichmäßig konvex.

Mit Hilfe der folgenden Aufgabe folgt unmittelbar aus der vorhergehenden, dass auch die L^p-Räume vektorwertiger Abbildungen $L^p\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$ mit einer gleichmäßig konvexen Norm versehen werden können.

2.6 Aufgabe (5 Punkte)

Zeigen Sie: Sind $(V_j, \| \,.\, \|_j)$, $j = 1, \ldots, m$, gleichmäßig konvexe Banachräume, so ist $V = V_1 \times \ldots \times V_m$, versehen mit der Norm $\|f\|_{(p)} := \|\,(f_1, \ldots, f_m)\,\|_{(p)} := \left(\sum_{j=1}^m \|f_j\|_j^p\right)^{1/p}$, wobei $1 < p < \infty$ gewählt wird, ebenfalls gleichmäßig konvex.
Hinweis. Zunächst folgere man aus Aufgabe 2.5, dass $(\mathbb{R}^m, \| \,.\, \|_p)$ gleichmäßig konvex ist. Um die gleichmäßige Konvexität von $V_1 \times \ldots \times V_m$ zu zeigen, hat man „Vektoren“ $(f_1, \ldots, f_m)$, $(g_1, \ldots, g_m) \in V_1 \times \ldots \times V_m$ zu betrachten. Unter Ausnutzung der gleichmäßigen Konvexität von $(\mathbb{R}^m, \| \,.\, \|_p)$ kann man in einem ersten Schritt erreichen, dass man nur noch den Fall zu betrachten hat, in dem $|\|f_j\|_j - \|g_j\|_j|$ beliebig klein sind.

Die Bedeutung gleichmäßig konvexer Normen wird zum Einen aus Aufgabe 1.5 und zum Anderen aus dem folgenden wichtigen Satz ersichtlich:

Satz von Milman

Ist $(V, \| \,.\, \|)$ ein gleichmäßig konvexer Banachraum, so ist V reflexiv.

Einen *Beweis* dieses Satzes kann man z.B. nachlesen in: K. Yosida, *Functional Analysis*, sixth edition, Berlin etc.: Springer-Verlag, 1980; S. 127 / 128.

Ihre Lösungen geben Sie bitte am Dienstag, den 23.10.2007 in der Vorlesung ab.

3 22.10.2007

3.1 Navier-Sokes-Gleichungen in Zylinderkoordinaten (18 Punkte)

Sei $(t,x) \mapsto (u(t,x), p(t,x))$ eine Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen:

$$\begin{aligned} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) + \left(\sum_{j=1}^{3} u_j(t,x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) u(t,x) + \nabla p(t,x) &= 0, \\ \operatorname{div} u(t,x) = 0. \end{aligned}$$

Seien $(t,r,\psi,z) \mapsto (\tilde{u}(t,r,\psi,z), \tilde{p}(t,r,\psi,z)$ so dass

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(t,r,\psi,z) &= u_1(t, r\cos\psi, r\sin\psi, z)\cos\psi + u_2(t, r\cos\psi, r\sin\psi, z)\sin\psi \\ \tilde{u}_2(t,r,\psi,z) &= -u_1(t, r\cos\psi, r\sin\psi, z)\sin\psi + u_2(t, r\cos\psi, r\sin\psi, z)\cos\psi \\ \tilde{u}_3(t,r,\psi,z) &= u_3(t, r\cos\psi, r\sin\psi, z) \\ \tilde{p}(t,r,\psi,z) &= p(r\cos\psi, r\sin\psi, z). \end{aligned}$$

Es bezeichne

$$\tilde{\Delta}\tilde{u}_j(t, r\cos\psi, r\sin\psi, z) := \frac{\partial^2}{\partial r^2}\tilde{u}_j + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}_j + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \psi^2}\tilde{u}_j + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\tilde{u}_j$$

den Laplaceoperator für Funktionen in Zylinderkoordinaten.

Zeigen Sie, dass dann $(\tilde{u}, \tilde{p})$ das folgende System (Navier-Stokes-System in Zylinderkoordinaten) lösen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t} - \tilde{\Delta}\tilde{u}_1 + \frac{2}{r^2}\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \psi} + \frac{1}{r^2}\tilde{u}_1 - \frac{1}{r}\tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_1\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\tilde{u}_2\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \psi} + \tilde{u}_3\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial t} - \tilde{\Delta}\tilde{u}_2 - \frac{2}{r^2}\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \psi} + \frac{1}{r^2}\tilde{u}_2 + \frac{1}{r}\tilde{u}_1\tilde{u}_2 + \tilde{u}_1\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial r} + \frac{1}{r}\tilde{u}_2\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \psi} + \tilde{u}_3\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \psi} &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial t} - \tilde{\Delta}\tilde{u}_3 + \tilde{u}_1\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial r} + \frac{1}{r}\tilde{u}_2\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \psi} + \tilde{u}_3\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \psi} + \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial z} + \frac{1}{r}\tilde{u}_1 &= 0. \end{aligned}$$

3.2 Aufgabe (2 Punkte)

Die Couette-Strömung mit beliebigen reellen Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ wird in Zylinderkoordinaten definiert durch

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(t,r,\psi,z) &= 0; \\ \tilde{u}_2(t,r,\psi,z) &= \alpha r + \frac{\beta}{r}; \\ \tilde{u}_3(t,r,\psi,z) &= 0; \\ \tilde{p}(t,r,\psi,z) &= \frac{1}{2}\alpha^2 r^2 + 2\alpha\beta\log r - \frac{\beta^2}{2r^2}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $(\tilde{u}, \tilde{p})$ das Navier-Stokes-System in Zylinderkoordinaten aus der vorhergehenden Aufgabe lösen.

Ihre Lösungen geben Sie bitte am Dienstag, den 30.10.2007 in der Vorlesung ab.

4 29.10.2007

4.1 Aufgabe (10 Punkte)

Sei $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$; wir definieren

$$\Phi(x) := \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} |x-y|^{-1} v(y)\, dy,$$

so dass $\Phi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ und $-\Delta\Phi(x) = v(x)$ für $x \in \mathbb{R}^3$.

(a) Man zeige, dass mit einer geeigneten Konstanten $C = C(v)$ für $|x| \to \infty$ gilt:

$$|\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|}, \qquad |D\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^2}, \qquad |D^2\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^3}.$$

(b) Für eine geeignete Folge von Abschneidefunktionen $\varphi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ setze man

$$v_k(x) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\varphi_k(x)\Phi(x)\right), \qquad \psi_k(x) = -\operatorname{div}\left(\varphi_k(x)\Phi(x)\right).$$

Offensichtlich ist $v_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $\operatorname{div} v_k(x) \equiv 0$, $\psi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass man durch geeignete Konstruktion der φ_k erreichen kann, dass

$$\|v - (v_k + \nabla\psi_k)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Hinweis. Zeigen Sie, dass $-\Delta(\varphi_k\Phi) = v_k + \nabla\psi_k$.

4.2 Aufgabe (5 Punkte)

Sei $u \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ divergenzfrei in folgendem schwachen Sinne:

$$\forall\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}): \qquad \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\psi \cdot u\, dx = 0.$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 4.1 und ohne auf entsprechende Resultate der Vorlesung zurückzugreifen, dass eine Folge $u_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ existiert mit

$$\operatorname{div} u_k(x) \equiv 0, \qquad \lim_{k\to\infty} \|u - u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

4.3 Aufgabe (5 Punkte)

Zeigen Sie mit den in den Aufgaben 4.1 und 4.2 entwickelten Methoden das folgende Resultat:

Sei $u \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ beliebig, dann existieren $v \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $\psi \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ mit den Eigenschaften $\nabla\psi \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ und $\forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}): \quad \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\varphi \cdot v\, dx = 0$, so dass gilt:

$$u = v + \nabla\psi.$$

Ihre Lösungen geben Sie bitte am Dienstag, den 13.11.2007 in der Vorlesung ab.

5 05.11.2007

5.1 Eindeutigkeit beim stationären Problem (8 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes glattes Gebiet, $u_1, u_2 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, $p_1, p_2 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ seien glatte Lösungen der stationären Navier-Stokes-Gleichungen zu demselben Datum $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 + (u_1 \cdot \nabla)u_1 + \nabla p_1 = -\Delta u_2 + (u_2 \cdot \nabla)u_2 + \nabla p_2 = f \qquad & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} u_1 = \operatorname{div} u_2 = 0 \qquad & \text{in } \Omega, \\ u_1 = u_2 = 0 \qquad & \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Durch welche Zusatzbedingung an eine der Lösungen können Sie Eindeutigkeit, d.h. $u_1 = u_2, \nabla p_1 = \nabla p_2$, erreichen? Durch welche Bedingung an f kann man sicherstellen, dass diese Zusatzbedingung durch jede glatte Lösung erfüllt wird?

5.2 Abklingen der kinetischen Energie (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \leq 4$, ein beschränktes glattes Gebiet, $u_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$,
$u \in \bigcap_{0<T<\infty} \left(L^\infty(0, T, L^2_\sigma(\Omega)) \cap L^2(0, T, H^1_{0,\sigma}(\Omega)) \right)$ eine schwache Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0 \qquad & \text{für } t \geq 0, x \in \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 \qquad & \text{für } t \geq 0, x \in \Omega, \\ u(t, x) = 0 \qquad & \text{für } t \geq 0, x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) \qquad & \text{für } x \in \Omega, \end{aligned}$$

derart, dass für $s = 0$, fast alle $s > 0$ und alle $t \geq s$ die verallgemeinerte Energieungleichung gilt:

$$\|u(t)\|^2_{L^2} + 2 \int_s^t \|\nabla u(\sigma)\|^2_{L^2} \, d\sigma \leq \|u(s)\|^2_{L^2};$$

dabei betrachtet man den schwach-L^2_σ-stetigen Repräsentanten von u. Zeigen Sie:

$$\lim_{t \to \infty} \|u(t)\|^2_{L^2} = 0.$$

5.3 Fundamentallösung der Stokes-Gleichung (8 Punkte)

Für $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x \neq y$ sei

$$\Gamma(x, y) = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\delta_{ij}}{|x - y|} + \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|x - y|^3} \right)_{i,j=1,2,3} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

$$q(x, y) = \frac{1}{4\pi |x - y|^3}(x - y) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Sei $u \in C_0^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3), p \in C_0^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ eine Lösung der Stokes-Gleichung:

$$-\Delta u + \nabla p = f, \qquad \operatorname{div} u = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^3. \tag{1}$$

Man zeige:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma(x,y) \circ f(y)\, dy, \qquad p(x) = \int_{\mathbb{R}^3} q(x,y) \cdot f(y)\, dy.$$

(b) Sei $f \in C_0^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ gegeben, man definiere:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma(x,y) \circ f(y)\, dy, \qquad p(x) = \int_{\mathbb{R}^3} q(x,y) \cdot f(y)\, dy.$$

Zeigen Sie, dass dann $u \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3), p \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ die Stokes-Gleichung (1) lösen.

Ihre Lösungen geben Sie bitte am Dienstag, den 20.11.2007 in der Vorlesung ab.

6 19.11.2007

6.1 Helmholtz-Zerlegung mittels Fouriertransformation (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Operatoren P, Q aus dem Satz 4.1 über die Helmholtz-Zerlegung im Falle $q = 2$, $\Omega = \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{im}(P) &= \{u \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) : \text{ für fast alle } \xi \text{ ist } \xi \cdot \hat{u}(\xi) = 0\} \\
\mathrm{im}(Q) &= \{w \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) : \text{ für fast alle } \xi \text{ und } j, k = 1, 2, 3 \text{ ist } \xi_j \hat{w}_k(\xi) = \xi_k \hat{w}_j(\xi)\}.
\end{aligned}$$

Hinweis. Sie können ohne Beweis erwenden, dass $\mathrm{im}(P)$ und $\mathrm{im}(Q)$ in $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ orthogonal sind.

6.2 Stokes-Resolvente in $\mathbb{R}^n$ (12 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe der Fouriertransformation, dass für jedes $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$ und jedes $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$ eine Lösung $(u, \nabla p) \in H^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n) \cap L^2_\sigma(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$ des Resolventenproblems für das Stokes-System existiert:

$$\begin{aligned}
-\Delta u(x) + \lambda u(x) + \nabla p(x) = f(x) &\quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \\
\operatorname{div} u(x) = 0 &\quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung ist in L^2 zu verstehen und insbesondere punktweise fast überall zu erfüllen.

Außerdem existiert eine universelle Konstante $C = C(n)$ derart, dass für alle f, λ und die zugehörigen Lösungen $(u, \nabla p)$ von oben die folgende Resolventenabschätzung gilt:

$$|\lambda| \|u\|_{L^2} + \frac{|\lambda|}{1 + |\lambda|} \|u\|_{H^2} + \|\nabla p\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2}.$$

Ihre Lösungen geben Sie bitte am Dienstag, den 27.11.2007 in der Vorlesung ab.

7 26.11.2007

7.1 Laurententwicklungen von Resolventen (12 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ keine Eigenwerte von A. Dann heißt

$$R_A(\lambda) := (\lambda\, I - A)^{-1}$$

mit der Identität $I \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die *Resolvente* von A.

(a) Man zeige, dass $R_A(\lambda)$ mit A kommutiert und die Eigenwerte $\mu_j = \dfrac{1}{\lambda - \lambda_j}$ hat, wenn λ_j die Eigenwerte von A durchläuft.

(b) Man zeige: $R_A(\lambda) - R_A(\mu) = -(\lambda - \mu)\, R_A(\lambda) R_A(\mu)\,.$

(c) Sei λ_j fester Eigenwert von A mit der algebraischen Vielfachheit n_j. Man zeige, daß dann die Resolvente $R_A(\lambda)$ eine Laurentreihe der Gestalt

$$R_A(\lambda) = \sum_{k=-n_\lambda}^{\infty} (\lambda - \lambda_j)^k\, A_k\,,$$

besitzt, wobei die $n \times n$ Matrizen $A_k = A_k(\lambda_j)$ nur von λ_j, aber nicht von λ abhängen. Ist $r > 0$ so klein gewählt, daß $\overline{B_r(\lambda)}$ außer λ_j keinen weiteren Eigenwert von A enthält, so gilt mit $\gamma(\varphi) = \lambda_j + r\, e^{i\varphi}$, wobei $0 \leq \varphi < 2\pi$ ist:

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda - \lambda_j)^{-k-1} R_A(\lambda)\, d\lambda.$$

Hinweis. Zeigen Sie zunächst, dass die Koeffizienten der Matrix $\det(\lambda\, I - A) \cdot R_A(\lambda)$ Polynome in $(\lambda - \lambda_j)$ vom Grade $\leq n - 1$ sind.

(d) Nun sei $x_j \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein verallgemeinerter Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_j. Zeigen Sie, dass dann x_j auch verallgemeinerter Eigenvektor von $R_A(\lambda)$ zum Eigenwert $\mu = \frac{1}{\lambda - \lambda_j}$ ist.

(e) Für den Fall, dass A aus einem einzigen Jordanblock der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

besteht, berechne man $R_A(\lambda)$ und die Laurententwicklung von $R_A(\lambda)$ bezüglich λ_0.

(f) Die Matrix A liege nun in Jordanscher Normalform mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, deren geometrischen bzw. algebraischen Vielfachheiten $g_1, \ldots, g_s$ bzw. $n_1, \ldots, n_s$ und Rieszzahlen $r_1, \ldots, r_s$ vor. Bestimmen Sie um einen beliebigen Eigenwert λ_j herum die Laurentreihe für $R_A(\lambda)$. Präzisieren Sie die Aussage von Teil (c) und bestimmen Sie die genaue Ordnung des Pols von $\lambda \mapsto R_A(\lambda)$ in λ_j.

7.2 Verallgemeinerte Spektralprojektoren (8 Punkte)

Für jeden Eigenwert λ_j der komplexen $n \times n$-Matrix A definiere man die komplexe $n \times n$-Matrix

$$P_{\lambda_j} = A_{-1}(\lambda_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_A(\lambda)\, d\lambda\,,$$

wobei γ ein hinreichend kleiner positiv durchlaufener Kreis um λ_j und $R_A(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ wie in Aufgabe 7.1 sind.

(a) Es seien λ_j und λ_k zwei (nicht notwendigerweise verschiedene) Eigenwerte von A und o.B.d.A. $s > r > 0$ so klein gewählt, dass in $\overline{B_r(\lambda_j)}$ bzw. $\overline{B_s(\lambda_k)}$ jeweils nur ein einziger Eigenwert von A liegt und überdies $\partial B_r(\lambda_j)$ sowie $\partial B_s(\lambda_k)$ disjunkt sind. Man definiere nun P_{λ_j} mit Hilfe des Weges $\gamma(\varphi) = \lambda_j + r\, e^{i\varphi}$ und P_{λ_k} mit Hilfe des Weges $\tilde{\gamma}(\varphi) = \lambda_k + s\, e^{i\varphi}$, wobei $0 \leq \varphi < 2\pi$. Zeigen Sie mit Hilfe der Resolventengleichung, dass

$$P_{\lambda_j} P_{\lambda_k} = -\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\tilde{\gamma}} \int_\gamma \frac{R_A(\lambda) - R_A(\tilde{\lambda})}{\lambda - \tilde{\lambda}}\, d\lambda\, d\tilde{\lambda} = \begin{cases} 0 & , \quad \lambda_j \neq \lambda_k \\ P_{\lambda_j} & , \quad \lambda_j = \lambda_k\,. \end{cases}$$

(b) Es seien $\lambda_1, ..., \lambda_s$ alle paarweise verschiedenen Eigenwerte von A. Man zeige mit Hilfe des Residuensatzes, dass

$$\sum_{k=1}^{s} P_{\lambda_k} = I$$

gilt, wobei $I \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix bedeutet.
Hinweis. Man berechne $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(0)} R_A(\lambda)\, d\lambda$ über eine so große Kreislinie, dass deren Inneres alle Eigenwerte von A enthält. Nach Anwendung des Residuensatzes entwickle man $R_A(\lambda)$ in eine für $|\lambda| = R$ konvergente Reihe mit Potenzen $\frac{1}{\lambda^k},\ k \geq 1$.

(c) Nun sei $x_k \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein verallgemeinerter Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_k. Zeigen Sie, dass für alle Eigenwerte λ_j von A gilt:

$$P_{\lambda_j}\, x_k = \begin{cases} 0 & , \quad \lambda_j \neq \lambda_k \\ x_k & , \quad \lambda_j = \lambda_k\,. \end{cases}$$

Ihre Lösungen geben Sie bitte am Dienstag, den 04.12.2007 in der Vorlesung ab.

8 03.12.2007

In den folgenden Aufgaben bezeichne V stets einen komplexen Banachraum.

8.1 Funktionalkalkül für beschränkte Operatoren (5 Punkte)

Sei $A : V \to V$ ein beschränkter linearer Operator, $\exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$, $t \in \mathbb{C}$. Sei $R > \|A\|$ gewählt. Man zeige, dass für $\lambda > \|A\|$ die Resolvente $R_A(\lambda) : V \to V$ als beschränkter linearer Operator existiert und dass gilt:

$$A = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R} \lambda R_A(\lambda)\, d\lambda, \qquad \exp(tA) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R} \exp(t\lambda) R_A(\lambda)\, d\lambda.$$

8.2 Resolventenreihe (7 Punkte)

Sei nun $A : D(A) \to V$ ein dicht definierter abgeschlossener Operator, für Re $\lambda > 0$ existiere die Resolvente $R_A(\lambda) : V \to V$ als beschränkter linearer Operator und genüge einer Resolventenabschätzung der Form:

$$\|R_A(\lambda)\| \leq \frac{C_0}{|\lambda|}. \tag{2}$$

Man zeige, dass es dann ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass die Resolvente sogar für λ aus dem Sektor $\Delta_{\pi/2+2\varepsilon}$ existiert und dort ebenfalls der Abschätzung (2) mit einer ggfs. anderen Konstanten $C_1 = C_1(C_0, \varepsilon)$ an Stelle von C_0 genügt.
Hinweis. Arbeiten Sie mit der Resolventenreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k R_A(\lambda_0)^{k+1},$$

wobei Re λ_0 „nahe“ an 0 gewählt wird.

8.3 Schlüssellochintegral (4 Punkte)

Sei wieder $A : D(A) \to V$ ein dicht definierter abgeschlossener Operator, und es seien die Voraussetzungen aus Aufgabe 8.2 erfüllt. Mit dem dort gefundenen $\varepsilon > 0$ betrachten Sie den Weg Γ_ε wir in Satz 4.4 der Vorlesung. Zeigen Sie absolute Konvergenz des „Schlüssellochintegrals“ für $t \in \Delta_\varepsilon$ im Banachraum der beschränkten linearen Operatoren $V \to V$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} e^{t\lambda} R_A(\lambda)\, d\lambda.$$

8.4 Ohne Druck / Divergenzbedingung ginge alles einfach / einfach alles (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes glattes Gebiet, $0 < T < \infty$, $u_0 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ und $f : [0,T] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ seien geeignete hinreichend glatte Daten und $u \in C^{1,2}([0,T] \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ eine Lösung des folgenden Anfangsrandwertproblems:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + (u \cdot \nabla)\, u = f, & t \geq 0, x \in \overline{\Omega}, \\ u(t,x) = 0, & t \geq 0, x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{3}$$

Leiten Sie für u folgende a-priori-Maximumabschätzung her:

$$\|u\|_{C^0([0,T]\times\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)} \leq \sqrt{n} e^T \max\left\{ \|u_0\|_{C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)}, \|f\|_{C^0([0,T]\times\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)} \right\}.$$

Hinweis. Betrachten Sie eine beliebige Komponente u_j und dafür $v(t,x) := e^{-t} u_j(t,x)$. Analysieren Sie die Differentialgleichung für v in denen Punkten, in denen v sein Maximum bzw. Minimum auf $[0,T] \times \overline{\Omega}$ annimmt.

Mit dieser Maximumabschätzung wird (3) damit hinsichtlich der Erzielung weiterer a-priori-Abschätzungen zu einem linearen Problem, $(u \cdot \nabla)$ wird als beschränkter Koeffizient aufgefasst. Damit gelingt dann auf etablierte Weise die Herleitung solcher Abschätzungen, die den Nachweis der Existenz einer globalen klassischen Lösung für geeignete hinreichend glatte Daten gestatten.

Ihre Lösungen geben Sie bitte am Dienstag, den 11.12.2007 in der Vorlesung ab.

9 10.12.2007

9.1 Konvergenz der Yosida-Approximation (7 Punkte)

Sei V ein Banachraum, $A : D(A) \to V$ ein dicht definierter abgeschlossener Operator, für Re $\lambda > 0$ existiere die Resolvente $R_A(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1} : V \to V$ als beschränkter linearer Operator. In diesem Fall kann man die *Yosida-Approximation* allgemein definieren durch:

$$J_k := \left(I - \frac{1}{k}A\right)^{-1} = kR_A(k).$$

Zeigen Sie: Genau dann konvergiert J_k für $k \to \infty$ *gleichmäßig* gegen die Identität, d.h.

$$\lim_{k\to\infty} \|J_k - I\| = 0,$$

wenn A beschränkt und damit als beschränkter Operator $A : V \to V$ fortsetzbar ist.

9.2 Allgemeine lokalisierte Energieungleichung (6 Punkte)

Beweisen Sie die allgemeine lokalisierte Energiegleichung aus Hilfssatz 6.2 für die (approximativen) Lösungen der regularisierten Navier-Stokes-Gleichung.

9.3 Konvergenzlemma (7 Punkte)

Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge approximativer starker Lösungen auf $[0, T]$ der durch die Yosida-Approximation J_k regularisierten Navier-Stokes-Gleichungen mit den im Beweis von Satz 6.3 formulierten Konvergenzeigenschaften gegen die dort konstruierte geeignete schwache Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen. Sei $0 \leq s \leq t \leq T$, $\varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$. Man zeige zunächst, dass für fast alle $\sigma \in [0, T]$ gilt: $J_k u_k(\sigma) \rightharpoonup u(\sigma)$ in $L^2_\sigma(\Omega)$ und folgere daraus direkt durch Ausnutzung der trilinearen Struktur in u:

$$\lim_{k\to\infty} \int_s^t \int_\Omega (\nabla\varphi \cdot (J_k u_k - u))\, |u|^2 \, dx d\sigma = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_s^t \int_\Omega (\nabla\varphi \cdot J_k u_k)\, |u_k|^2 \, dx d\sigma = \int_s^t \int_\Omega (\nabla\varphi \cdot u)\, |u|^2 \, dx d\sigma.$$

Ihre Lösungen geben Sie bitte am Dienstag, den 18.12.2007 in der Vorlesung ab.

10 17.12.2007

Serrins Regularitätskriterium (10 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes oder Außenraumgebiet mit glattem kompakten Rand $\partial\Omega$, $0 < T < \infty$. Weiter sei $u_0 \in D(A_{6/5}) \cap D(A_2)$, $f \in L^2(0, T, L_\sigma^{6/5} \cap L_\sigma^2(\Omega))$ und $u \in L^\infty(0, T, L_\sigma^2(\Omega)) \cap L^2(0, T, H_{0,\sigma}^1(\Omega))$ sei eine schwache Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen mit Daten u_0 und f im Sinne von Definition 3.1. Weiter gelte für ein $p > 3$, dass

$$u \in L^\infty(0, T, L_\sigma^p(\Omega)).$$

Zeigen Sie durch ein "boot-strapping"-Argument, das auf Satz 4.9 aufbaut, dass dann sogar gilt:

$$u \in L^2(0, T, H^2(\Omega)), u_t \in L^2((0, T) \times \Omega),$$

d.h. u ist eine starke Lösung.

Hinweis. Beachten Sie Interpolationseigenschaften von L^p-Räumen, wie sie etwa in Aufgabe 1.3 formuliert wurden.

Ihre Lösungen geben Sie bitte am Dienstag, den 08.01.2008 in der Vorlesung ab.

Ich wünsche Ihnen ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins neue Jahr.

11 07.01.2008

11.1 Konvexe Analysis (5 Punkte)

Seien $a_1, a_2, a_3 > 0$, man betrachte

$$f : [0,1]^3 \ni (t_1, t_2, t_3) \mapsto a_1^{t_1} a_2^{t_2} a_3^{t_3}.$$

(a) Zeigen Sie die Konvexität von f.

(b) Sei nun speziell $t_1, t_2, t_3 \in [0,1]$ mit $t_1 + t_2 + t_3 = 2$. Zeigen Sie:

$$a_1^{t_1} a_2^{t_2} a_3^{t_3} \leq (1 - t_1) a_2 a_3 + (1 - t_2) a_1 a_3 + (1 - t_3) a_1 a_2.$$

Im Folgenden diskutieren wir das Faltungsprodukt für Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) \, dy,$$

der Einfachheit halber nehmen wir zunächst f, g als stetig, reellwertig und mit kompaktem Träger an.

11.2 Duale Charakterisierung der L^p-Normen (3 Punkte)

Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $q \in [1, \infty]$ der duale Exponent, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Man zeige:

$$\|f\|_{L^p} = \sup\{\int_{\mathbb{R}^n} fg \, dx : \|g\|_{L^q} = 1\}.$$

11.3 Integrierbarkeitseigenschaften des Faltungsproduktes (7 Punkte)

Seien $p, q, r \geq 1$ so dass

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}.$$

(a) Weiter sei r' der duale Exponent zu r so dass $\frac{1}{r'} + \frac{1}{r} = 1$. Zeigen Sie:

$$|(f * g * h)(0)| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \|h\|_{L^{r'}}.$$

Hinweis. Betrachten Sie zunächst den Fall $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = \|h\|_{L^{r'}} = 1$.

(b) Folgern Sie daraus:

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

11.4 Aufgabe (5 Punkte)

Sei nun $u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, div $u(x) \equiv 0$,

$$\gamma(t,x) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

der Wärmeleitungskern. Man setze $u(0,x) = u_0(x)$ und für $t > 0$ komponentenweise

$$u(t,x) := (\gamma(t,\,.\,) * u_0)(x), \qquad p(t,x) \equiv 0$$

und zeige, dass das Stokessystem erfüllt ist:

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) + \nabla p(t,x) = 0, & \text{falls } t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ \operatorname{div} u(t,x) = 0, & \text{falls } t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & \text{falls } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Seien $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Man zeige, dass mit einer Konstanten $C = C(,n,p,q)$ gilt:

$$\|u(t,\,.\,)\|_{L^q} \leq C\|u_0\|_{L^p} t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}.$$

Ihre Lösungen geben Sie bitte am Dienstag, den 15.01.2008 in der Vorlesung ab.