Lineare Algebra für Physiker
WS 2003/04

Prof. H.-Ch. Grunau
E. Sassone

1 14.10.03

Wir wollen mit diesen Übungen herausfinden, wie weit Ihr Schulwissen reicht.

1.1 $\star$ Aufgabe

Gegeben seien ein Punkt $P = (x_P, y_P) \in \mathbb{R}^2$ und eine Gerade $g := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ ax + by + c = 0\}$, $(a, b) \neq (0, 0)$. Man berechne den Abstand zwischen P und g.

1.2 $\star$ Aufgabe

Gegeben seien die folgenden Vektoren $\vec{a} = (4, 3, 12, -13)$, $\vec{b} = (5, -2, 1, 1)$. Man konstuiere ein Ortonormalsystem von zwei Vektoren, die dieselbe Ebene wie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugen.

1.3 Aufgabe

Wie kann man Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^n$ beschreiben? Man gebe eine Definition von *Orthogonalität* und *Parallelität* von Geraden in $\mathbb{R}^n$. Entsprechend für Ebenen. Wie projiziert man orthogonal auf Geraden und Ebenen?

1.4 Aufgabe

Wodurch unterscheiden sich die Mengen der *reellen, rationalen, ganzen* und der *natürlichen* Zahlen?

1.5 $\star$ Aufgabe

Welche der folgenden linearen Gleichungssysteme sind lösbar? Man bestimme ggfs. deren sämtliche Lösungen:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 4z = 6 \\ y - z = -1 \\ x + 2y - z = 0 \end{array} \right.$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 4z = 2 \\ y - z = -3 \\ x + 2y - z = -3 \end{array} \right.$$

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + 5z = 1 \\ x - 3y + 6z = -3 \\ y - z = 1 \end{array} \right.$$

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + 5z = 1 \\ x - 3y + 6z = -3 \\ y - z = 3 \end{array} \right.$$

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -1 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 = -4 \\ 2x_1 + x_3 + 7x_4 = 4 \\ 2x_3 + x_4 = 4 \end{array} \right.$$

Alle Aufgaben sind Hausaufgaben und sollen schriftlich bearbeitet werden. Die Lösungen zu den mit $\star$ versehenen Aufgaben sollen Sie am 21.10 vor der Vorlesung abgeben; Sie erhalten diese korrigiert zurück. Die übrigen Aufgaben bereiten Sie bitte bis zur Übung am 17.10 vor.

Lineare Algebra für Physiker
WS 2003/04

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

2 21.10.03

2.1 Aufgabe

Welche unter den folgenden Beispielen sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$?

(1) $\{(t, 2, 2t) : \ t \in \mathbb{R}\}$,

(2) $\{(-t, 0, 2t) : \ t \in \mathbb{R}\}$,

(3) $\{(3t - 2s, -s, 2t) : \ s, t \in \mathbb{R}\}$,

(4) $\star \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 = 2x_1x_2 - x_2^2\}$,

(5) $\star \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 = x_3^2\}$,

(6) $\star \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 = x_3^2$ und $x_1 \cdot x_3 \geq 0\}$.

(7) $\star \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 = x_3^2$ und $x_1 \cdot x_3 > 0\}$.

2.2 $\star$ Aufgabe

Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Wir bezeichnen mit $m\mathbb{Z} := \{m \cdot k : \ k \in \mathbb{Z}\}$ die ganzzahligen Vielfachen von m. Man beweise, dass $(m\mathbb{Z}, +)$ eine kommutative Gruppe ist.

Definition

Man wähle $m \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Man teile $\mathbb{Z}$ folgendermaßen in m Klassen (das heisst disjunkte Teilmengen) ein: Zu jedem $r \in \{0, 1, , ..., m-1\}$ betrachte man die Menge

$$r + m\mathbb{Z} := \{r + m \cdot k : \quad k \in \mathbb{Z}\},$$

die man sich als die um r verschobene Untergruppe $m\mathbb{Z}$ vorstellen kann.
Allgemeiner Fall:

$$\mathbb{Z} = (0 + m\mathbb{Z}) \cup (1 + m\mathbb{Z}) \cup ... \cup (m - 1 + m\mathbb{Z}).$$

Diese Vereinigung ist disjunkt; zu welcher Klasse eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$ gehört, kann man durch Division mit Rest entscheiden.

$$\frac{a}{m} = k + \frac{r}{m}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad r \in \{0, 1, ..., m-1\} \Rightarrow a \in \ r + m\mathbb{Z}.$$

Daher nennt man die Klassen $r + m\mathbb{Z}$ auch *Restklassen Modulo m*. Zwei Zahlen a, a' liegen genau in der selben Restklasse, wenn $a - a'$ durch m teilbar ist. Man schreibt dafür auch $a \equiv a' \bmod m$. Zu jedem $a \in \mathbb{Z}$ sei $[a] = a + m\mathbb{Z}$ seine Restklasse.
Man bezeichnet mit $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ die Menge aller Restklassen modulo m:

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2], ..., [m-1]\}$$

und definiert hierauf durch $[a] + [b] := [a + b]$ eine Addition.

Ist diese Addition wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten a, b der Restklassen $[a], [b]$?

2.3 Aufgabe

Man stelle eine Gruppentafel von $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ auf und bestimme alle Untergruppen.

2.4 Aufgabe

Gegeben seien der Vektoraum $\mathbb{R}^3$, die Ebenen $XY = \{(x, y, z) : x, y \in \mathbb{R}, z = 0\}$, $YZ = \{(x, y, z) : y, z \in \mathbb{R}, x = 0\}$ und die Summe zwischen Vektoren $+$.
Man beweise, dass $(XY, +)$ eine Gruppe ist. Man beweise, dass $(XY \cup XZ, +)$ keine Gruppe ist.
Ist $(XY \cap XZ, +)$ eine Gruppe?

2.5 $\star$ Aufgabe

Es sei V ein Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subset V$ Untervektorräume von V. Man beweise: $U_1 \cup U_2$ bildet genau dann einen Untervektorraum von V, wenn $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$ ist.

Die Lösungen zu den mit $\star$ verscheinen Aufgaben geben Sie bitte am 28.10 vor der Vorlesung ab.

Lineare Algebra für Physiker
WS 2003/04

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

3 28.10.03

3.1 $\star$ Aufgabe

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

linear unabhängig? Im Falle der linearen Abhängigkeit bestimme man ein $\vec{v}_4 \in \mathbb{R}^3$ derart, dass $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_4$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ bilden.

3.2 Aufgabe

Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis von V, $k \in \{1, ..., n\}$,

$$w = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n \in V \text{ mit } \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Man zeige: $(v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n)$ ist genau dann eine Basis von V, wenn $\lambda_k \neq 0$ ist.
(Diese Aussage wird auch als Austauschlemma bezeichnet).

3.3 $\star$ Aufgabe

Gegeben seien das Quadrat mit den Ecken $A = (-1, 1)$, $B = (1, 1)$, $C = (1, -1)$, $D = (-1, -1)$. Betrachten Sie die folgenden Rotationen gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung: r_0 um 0^o, r_{90} um 90^o, r_{180} um 180^o, r_{270} um 270^o, ferner die Spiegelungen u_{AC} bezüglich der Gerade durch A und C, u_{BD} bezüglich der Gerade durch B und D, u_x bezüglich der $x-$Achse und u_y bezüglich der $y-$Achse.
Man beweise, dass $G := \{r_0,\ r_{90},\ r_{180},\ r_{270},\ u_{AC},\ u_{BD},\ u_x,\ u_y\}$ eine Gruppe ist.
Ist G auch abelsch?

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Man bezeichne $N = \{1, 2, ..., n\}$, und $\sigma : N \to N$ werde durch die Wertetabelle beschrieben:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Man nennt σ eine **Permutation** (der Zahlen von 1 bis n), wenn σ bijektiv ist (das heißt, wenn jedes Element von N genau einmal in der zweiten Zeile der Wertetabelle verkommt).

3.4 Aufgabe

Sei $\Sigma_n = \{$alle Permutationen der Zahlen von 1 bis $n\}$; seien $\sigma,\ \tau \in \Sigma$ und man definiere die Komposition $\sigma \circ \tau$

$$\sigma \circ \tau(i) := \sigma(\tau(i))$$

Man beweise, dass $(\Sigma, \circ)$ eine nicht abelsche Gruppe ist.

3.5 Aufgabe

Gegeben seien zwei Abbildungen $f : M_2 \to M_3, \quad g : M_1 \to M_3$.

(1) Sei $f \circ g$ surjektiv. Man beweise, dass f surjektiv folgt.

(2) $\star$ Sei $f \circ g$ injektiv. Man beweise, dass g injektiv folgt.

(3) Man konstruiere ein Beispiel mit $f \circ g$ surjektiv, wobei aber g nicht surjektiv ist.

(4) $\star$ Man konstruiere ein Beispiel mit $f \circ g$ injektiv, wobei aber f nicht injektiv ist.

3.6 $\star$ Aufgabe

Gegeben sei die Gruppe $(\mathbb{R}^n, +)$. Man bestimme, ob die folgenden Abbildungen Homomorphismen sind.

(1) $\varphi_1 : (\mathbb{R}^n, +) \to (\mathbb{R}, +) \quad \varphi_1 : \vec{v} \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i$

(2) $\varphi_2 : (\mathbb{R}^n, +) \to (\mathbb{R}^{n-2}, +) \quad \varphi_2 : \vec{v} \mapsto \begin{pmatrix} v_1 - v_3 \\ v_2 - v_4 \\ v_3 - v_5 \\ \vdots \\ v_{n-2} - v_n \end{pmatrix}$

3.7 Aufgabe

Man definiere die euklidische Norm eines Vektors in $\mathbb{R}^n$:

$$||\vec{a}|| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

Ist die Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ \vec{a} \mapsto ||\vec{a}||$ additiv oder homogen? Und linear?

Die Lösungen zu den mit $\star$ versehenen Aufgaben sollen Sie am 4.11 vor der Vorlesung abgeben

Lineare Algebra für Physiker
WS 2003/04

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

4 04.11.03

4.1 ⋆ Aufgabe

Es seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ sei eine Abbildung. Man beweise:

(1) Ist f injektiv, so gibt es eine Abbildung $g : Y \to X$ derart, daß $g \circ f : X \to X$ gleich der Identität auf X ist.

(2) Ist f surjektiv, so gibt es eine Abbildung $h : Y \to X$ derart, daß $f \circ h : Y \to Y$ gleich der Identität auf Y ist.

Gilt jeweils auch die Umkehrung?

4.2 ⋆ Aufgabe

Man konstruiere jeweils nichttriviale Beispiele für folgende mögliche Eigenschaften linearer Abbildungen:
Es seien jeweils V, W Vektorräume, $f : V \to W$ linear mit:

(1) f ist nicht injektiv, aber surjektiv,

(2) f ist injektiv, aber nicht surjektiv,

(3) f ist weder injektiv noch surjektiv.

4.3 ⋆ Aufgabe

Es sei

$$\mathbb{R}[X] := \{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0 \mid n \in \mathbb{N}_0,\ a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}\}$$

der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Polynome in einer Veränderlichen. Man erkläre die folgende Abbildung auf $\mathbb{R}[X]$ (die formale Differentiation):

$$D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \mapsto \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}.$$

Man beweise:

(1) D ist ein Vektorraumhomomorphismus.

(2) D ist nicht injektiv, aber surjektiv.

(3) Es gibt eine injektive, aber nicht surjektive lineare Abbildung

$$S : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \quad \text{mit} \quad D \circ S = id_{\mathbb{R}[X]}.$$

Gelten die Behauptungen (1), (2) und (3) auch, wenn man $\mathbb{R}[X]$ durch den eingeschränkten Raum

$$\mathbb{R}_{(N)}[X] := \{a_N X^N + ... + a_1 X + a_0 \mid a_0, ..., a_N \in \mathbb{R}\}$$

für ein festes $N \in \mathbb{N}$ ersetzt?

4.4 $\star$ Aufgabe

Man zeige: Es gibt genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man zeige ferner, daß f ein Isomorphismus ist und bestimme $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)$ sowie $f^{-1}(\vec{e}_1)$, $f^{-1}(\vec{e}_2)$, $f^{-1}(\vec{e}_3)$.

Die Lösungen zu den mit $\star$ versehenen Aufgaben sollen Sie am 11.11.03 vor der Vorlesung abgeben

Lineare Algebra für Physiker

WS 2003/04

Prof. H.C. Grunau, E. Sassone

5 11.11.03

5.1 Aufgabe

Es seien M, N Mengen, $A, B \subset M$ sowie $P, Q \subset N$. Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Man beweise:

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,

(2) $\star\ f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,

(3) $f^{-1}(P \cup Q) = f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Q)$,

(4) $\star\ f^{-1}(P \cap Q) = f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q)$.

(5) $\star$ Im Fall (2) gilt i.a. keine Gleichheit (Gegenbeispiel). Es gilt aber immer dann Gleichheit, wenn f injektiv ist.

5.2 $\star$ Aufgabe

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 9y - 2z = 0, \\ 2y - 2x = -3, \\ y + 3z = x. \end{array} \right.$$

Man schreibe das System als Matrixgleichung der Form $A \circ \vec{x} = \vec{b}$.

5.3 Aufgabe

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man berechne $A \circ \vec{c}$, $A \circ (\vec{b} + \vec{c})$, $A \circ \vec{b} + A \circ \vec{c}$. Man berechne $5\vec{b} - 3\vec{c}$ und man zeige, dass $A \circ (5\vec{b} - 3\vec{c}) = 5A \circ \vec{b} - 3A \circ \vec{c}$.

5.4 $\star$ Aufgabe

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, die die Gestalt wie im Satz 6.11 hat,

$$\begin{array}{cc}
\text{Spalte/Zeile} & \begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & & & j_1 & & & & j_2 & & \cdots & & j_s & & & n \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ \\ s \\ s+1 \\ \\ m \end{array} &
\left(\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & \dots & 0 & 1 & \ast & \dots & \ast & 0 & \ast & \dots & \ast & 0 & \ast & \dots & \ast \\
 & & & 0 & & & & 1 & & & & \vdots & & & \\
\vdots & \ddots & \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & & & & 0 & & & \\
0 & \dots & 0 & 0 & \ast & \dots & \ast & 0 & \ast & \dots & \ast & 1 & \ast & \dots & \ast \\
0 & \dots & & 0 & & \dots & & \dots & & \dots & & 0 & & \dots & 0 \\
\vdots & & & & & & & \ddots & & & & & & & \vdots \\
0 & \dots & & 0 & & \dots & & \dots & & \dots & & 0 & & \dots & 0
\end{array} \right)
\end{array}. \tag{1}$$

Man beweise, dass die ersten s Zeilen linear unabhängig sind.

5.5 Aufgabe

Gegeben seien die folgenden Vektoren,

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \vec{v_4} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Man bestimme die Dimension des von $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$ erzeugten Untervektorraums des $\mathbb{R}^4$ und man finde für diesen eine Basis.

Definition

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Wir definieren die *transponierte Matrix* $A^t \in \mathbb{R}^{n \times m}$ durch

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & \dots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

(Auch die Vektoren sind Matrizen, so kann man die Transposition auch für Vektoren auf dieselbe Weise definieren).

5.6 $\star$ Aufgabe

Gegeben seien die Vektoren von Aufgabe (5.5). Man bestimme jeweils den Kern der Homomorphismen

$$f_j : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

$$f_1(\vec{x}) = \vec{v_1}^t \circ \vec{x}, \qquad f_2(\vec{x}) = \vec{v_2}^t \circ \vec{x}, \qquad f_3(\vec{x}) = \vec{v_3}^t \circ \vec{x}, \qquad f_4(\vec{x}) = \vec{v_4}^t \circ \vec{x}.$$

Die Lösungen zu den mit $\star$ versehenen Aufgaben sollen Sie am 18.11 vor der Vorlesung abgeben.

Lineare Algebra für Physiker

WS 2003/04

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

6 18.11.03

6.1 Aufgabe

Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$ mit $m < n$. Es seien $v_1, ..., v_m \in V$ linear unabhängige Vektoren. Man konstruiere eine lineare Abbildung

$$F : V \to \mathbb{R}^{n-m}$$

mit Kern $(F) =$ Span $\{v_1, ..., v_m\}$, also

$$F(v) = 0 \Longleftrightarrow v \in \text{ Span}\{v_1, ..., v_m\}.$$

6.2 Aufgabe

Man bestimme für die folgenden linearen Gleichungssysteme $A \circ \vec{x} = \vec{0}$ jeweils eine geeignete Basis des Lösungsuntervektorraums:

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & -12 & 0 & -2 & 1 \\ -6 & 0 & -8 & 8 & -2 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & -8 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & -12 & 0 & -2 & 1 \\ -6 & 0 & -8 & 8 & -2 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & -8 & 0 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) $\star$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(4) $\star$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(5) $\star$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & -3 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

6.3 $\star$ Aufgabe

Für jede Matrix aus Aufgabe 6.2 bestimme man jeweils Rang (A). Es bezeichne jeweils F die zugehörige lineare Abbildung. Berechnen Sie jeweils den Corang von F sowie eine Basis des Bildraums im (F).

Die Lösungen zu den mit $\star$ versehenen Aufgaben sollen Sie am 25.11 vor der Vorlesung abgeben.

Lineare Algebra für Physiker

WS 2003/04

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

7 25.11.03

7.1 Aufgabe

Entscheiden Sie, ob die folgenden linearen Gleichungssysteme $A \circ \vec{x} = \vec{b}$ lösbar sind, und berechnen Sie gegebenenfalls die Lösungsmenge:

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & -12 & 0 & -2 & 1 \\ -6 & 0 & -8 & 8 & -2 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & -8 & 0 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 19 \\ -69 \\ 11 \\ 63 \\ -113 \\ 23 \end{pmatrix}$$

(2) $\star$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & -12 & 0 & -2 & 1 \\ -6 & 0 & -8 & 8 & -2 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & -8 & 0 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -22 \\ 26 \\ 22 \\ -28 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(3) $\star$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & -3 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(4) $\star$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & -2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & 4 & -3 & 2 & 6 & -4 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

7.2 $\star$ Aufgabe

Es seien V_1, V_2 endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume, $\dim V_1 = n$, $\dim V_2 = m$. Geben Sie eine Basis des Vektorraums $W = \{F : F : V_1 \to V_2 \text{ ist lineare Abbildung }\}$ an. Welche Dimension hat W?
Hinweis: Denken Sie zunächst über eine kanonische (= natürliche) Basis des Matrizenraums $\mathbb{R}^{m\times n}$ nach. Betrachten Sie dann V_1 mit einer Basis $\{x_1, \ldots, x_n\}$ und V_2 mit einer Basis $\{y_1, \ldots, y_m\}$.

7.3 $\star$ Aufgabe

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Man berechne $A \circ B$ und $B \circ A$.

7.4 Aufgabe

(a) Seien V_1, V_2 reelle endlichdimensionale Vektorräume und $F, G : V_1 \to V_2$ lineare Abbildungen.
Zeigen Sie: $|\operatorname{rg}(F) - \operatorname{rg}(G)| \leq \operatorname{rg}(F + G) \leq \operatorname{rg}(F) + \operatorname{rg}(G)$.

(b) Seien V_1, V_2, V_3 reelle endlichdimensionale Vektorräume und $F : V_1 \to V_2$, $G : V_2 \to V_3$ lineare Abbildungen.
Zeigen Sie: $\operatorname{rg}(G \circ F) \leq \min\{\operatorname{rg}(G), \operatorname{rg}(F)\}$.

Die Lösungen zu den mit $\star$ versehenen Aufgaben sollen Sie am 2.12.03 vor der Vorlesung abgeben.

Lineare Algebra für Physiker
WS 2003/04

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

8 2.12.03

8.1 ⋆ Aufgabe

Ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

invertierbar? Bestimmen Sie ggfs. A^{-1}!

8.2 ⋆ Aufgabe

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Man bestimme mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus, unter welchen Bedingungen eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ existiert, so dass $A \circ B = B \circ A = E$. Berechnen Sie in diesem Fall die Matrix B.

8.3 Aufgabe

Gegeben sei ein $n-$dimensionaler Vektorraum V mit Basen $\mathcal{B}_1 = \{u_1, ..., u_n\}$, $\mathcal{B}_2 = \{v_1, ..., v_n\}$, $\mathcal{B}_3 = \{w_1, ..., w_n\}$. Seien $\Phi_{\mathcal{B}_i} : \mathbb{R}^n \to V$ die Karten so, dass z.B. $\Phi_{\mathcal{B}_2}(x_1, ..., x_n) = x_1 v_1 + ... + x_n v_n$. Sei dann $T^{\mathcal{B}_i}_{\mathcal{B}_j}$ die Transformationmatrix $T^{\mathcal{B}_i}_{\mathcal{B}_j} = \Phi^{-1}_{\mathcal{B}_i} \circ \Phi_{\mathcal{B}_j}$. Man beweise, dass $T^{\mathcal{B}_i}_{\mathcal{B}_j} = T^{\mathcal{B}_i}_{\mathcal{B}_h} \circ T^{\mathcal{B}_h}_{\mathcal{B}_j}$.

8.4 ⋆ Aufgabe

Gegeben seien die Basen in $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Man berechne die Transformationmatrix $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$. Stellen Sie die Basisvektoren aus $\mathcal{A}$ als Linearkombination der Basisvektoren aus $\mathcal{B}$ dar.
Hinweis: Aufgabe 8.3.

(b) Man bestimme die Koordinaten des Vektors

$$\vec{v} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - 8 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Hinweis: Die Zahlen sind ausgesprochen unangenehm! Schildern und begründen Sie, welche Rechnungen Sie vorzunehmen haben, und führen Sie diese dann mit Hilfe von „maple“ durch. In den RTLs stehen Rechner mit maple zur Verfügung. Sie müssen ggfs. nur im Rechenzentrum ein Benutzerkonto beantragen.

8.5 Aufgabe

Gegeben die Transformationsmatrix

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

und die Basis $\mathcal{A} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Wie lautet die Basis $\mathcal{B}$?
Wie arbeitet diese Matrix $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ für jede beliebige, aber feste Basis $\mathcal{A}$?
Man bestimme die inverse Transformationsmatrix $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$: Gewinnen Sie eine intuitive (geometrische) Vermutung, und machen Sie dann die Probe.

8.6 Aufgabe

Gegeben sei die symmetrische Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Man bestimme eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

und Koeffizienten h und k so, dass:

$$A^T \circ B \circ A = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen zu den mit $\star$ versehenen Aufgaben sollen Sie am 9.12.03 vor der Vorlesung abgeben.

Lineare Algebra für Physiker
WS 2003/04

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

9 9.12.03

9.1 Aufgabe

Man berechne die Determinanten der folgenden Matrizen:

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 4 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 3 & 3 \\ 11 & 11 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & 9 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

(2) $\star$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) $\star$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & 7 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) $\star$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

9.2 $\star$ Aufgabe

Seien $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; man betrachte die Matrix $M = (m_{i,j})$,

$$\begin{aligned} m_{i,j} &= 1 + a_i \quad \text{falls } i = j, \\ m_{i,j} &= 1 \quad \text{falls } i \neq j. \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass $\det M = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right)$.

9.3 $\star$ Aufgabe

Seien $x, a_{1,2}, a_{1,3}, ..., a_{1,n}, a_{2,3}, a_{2,4}, ..., a_{2,n}, ..., a_{n-2,n-1}, a_{n-2,n}, a_{n-1,n} \in \mathbb{R}$.
Sei dann

$$A = \begin{pmatrix} x & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ x & x & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_{n-1,n} \\ x & x & x & \dots & x \end{pmatrix}.$$

Man beweise, dass $\det(A) = x \cdot (x - a_{1,2}) \cdot (x - a_{2,3}) \cdot (x - a_{3,4}) \cdot \ldots \cdot (x - a_{n-1,n})$.

9.4 Aufgabe (Vandermondesche Determinante)

Betrachten Sie für die reellen Variablen $x_1, x_2, ..., x_n$ die Determinante der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Man beweise, dass $\det(A) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$.

9.5 Aufgabe

Es seien $(n+1)$ Punktepaare $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ gegeben, dabei seien die x_i paarweise verschieden: $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$. Zeigen Sie: Es gibt genau eine Polynomfunktion höchstens n-ten Grades $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, so dass für $i = 0, \ldots, n$ gilt: $P(x_i) = y_i$.

Die Lösungen zu den mit $\star$ versehenen Aufgaben sollen Sie am 16.12.03 vor der Vorlesung abgeben.

Bitte beachten Sie: Die erste Klausur wird am Freitag, den 12.12.03 von 7.15 bis 8.45 Uhr im Raum 109, Gebäude 02 stattfinden. Bitte bringen Sie Papier und Kugelschreiber mit. Hilfsmittel sind nicht zugelassen.

Lineare Algebra für Physiker
WS 2003/04

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

10 16.12.03

10.1 Aufgabe

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Zeigen Sie, dass es für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine m-fach multilineare Funktion

$$f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{m\text{-mal}} \to \mathbb{R}$$

gibt, die nicht identisch Null ist.

(b) Sei nun

$$f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{m\text{-mal}} \to \mathbb{R}$$

m-fach multilinear und *alternierend*; ferner gelte $m > n$. Zeigen Sie, dass dann stets gilt:

$$f(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m) = 0.$$

10.2 Aufgabe

Gegeben seien drei Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$. Geben Sie einen „anschaulichen" Beweis, dass der Betrag von

$$\det(A) = \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$$

gleich dem Volumen des von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ aufgespannten Parallelepipeds ist.

10.3 ⋆ Aufgabe

Gegeben seien der $4-$dimensionale Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sei $\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die durch diese Basis induzierte Karte und $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung F so, dass

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ F \circ \Phi_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Man berechne $\det(F)$.

10.4 $\star$ Aufgabe

Gegeben seien die Matrizen $A_{1,1} \in \mathbb{R}^{n_1,n_1}$, $A_{2,2} \in \mathbb{R}^{n_2,n_2}$,..., $A_{h,h} \in \mathbb{R}^{n_h,n_h}$. Man beweise, dass

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} A_{1,1} & \star & \dots & \star \\ \mathcal{O} & A_{2,2} & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & A_{h,h} \end{pmatrix} = \det A_{1,1} \cdot \det A_{2,2} \cdot \ldots \cdot \det A_{h,h}\,.$$

10.5 $\star$ Aufgabe

Gegben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Man benutze den Laplaceschen Entwicklungsatz bezüglich der dritten Zeile, um $\det(A)$ zu berechnen. Existiert A^{-1}?

(2) Man benutze die Cramersche Regel, um ggfs. die inverse Matrix A^{-1} zu berechnen.

10.6 Aufgabe

Man beweise, dass

$$< x, y >:= x_1y_1 + 6x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^4$ ist.

Die Lösungen zu den mit $\star$ versehenen Aufgaben sollen Sie am 13.01.04 vor der Vorlesung abgeben.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten, alles Gute zum Jahreswechsel und einige erholsame freie Tage.

Lineare Algebra für Physiker
WS 2003/04

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

11 13.01.04

11.1 $\star$ Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$ fest und

$$V = \left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j z^j \ : \ a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

der Vektorraum der reellen Polynome vom Grade $\leq n$. Berechnen Sie die Determinante der linearen Abbildung

$$F : V \to V, \ F\left(\sum_{j=0}^{n} a_j z^j \right) = a_n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^{j+1}.$$

11.2 Aufgabe

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $(A^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $n \times n$-Matrizen. Wir sagen, daß $(A^{(k)})$ gegen A konvergiert, wenn das für alle Koeffizienten zutrifft:

$$\forall i, j = 1, \dots, n : \ \lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}.$$

Es konvergiere $(A^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen A, ferner sei A invertierbar. Zeigen Sie:
Dann existiert $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß für $k \geq k_0$ auch die $A^{(k)}$ invertierbar sind, und es gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \left(A^{(k)}\right)^{-1} = A^{-1}.$$

11.3 Aufgabe

Man benutze das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren, um ein orthogonales $k-$Bein aus den folgenden Vektoren zu gewinnen:

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{w}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{w}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

11.4 $\star$ Aufgabe

Gegeben seien der $4-$dimensionale Vektorraum $\mathbb{R}^4$ und die Vektoren

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sei $W = \mathrm{span}(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$; man bestimme $\dim(W)$, eine Orthonormalbasis von W und man ergänze diese unter Verwendung des Kreuzprodukts zu einer Orthonormalbasis des den ganzen $\mathbb{R}^4$.

11.5 $\star$ Aufgabe

Gegeben sei der Vektorraum der Polynome auf dem Intervall $[-1,1]$:

$$\mathbb{P}(X) = \{p : \ p \text{ reelles Polynom in einer Veränderlichen } X \text{ auf dem Intervall } [-1,1]\,\}.$$

Man definiere auf $\mathbb{P}(X)$ ein Skalarprodukt:

$$< \ .\,,\,. \ >: \mathbb{P}(X) \times \mathbb{P}(X) \to \mathbb{R} \qquad < p(X), q(X) >:= \int_{-1}^{1} p(X) \cdot p(X)\, dX.$$

(1) Man beweise, dass $< \ .\,,\,. \ >$ in der Tat ein Skalarprodukt ist.

(2) Man bestimme die Elemente des orthogonalen 4-Beins in $\mathbb{P}(X)$, das durch das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren aus $p_0(X)$, $p_1(X)$, $p_2(X)$, $p_3(X)$ (vom Grad bzgl. 0, 1, 2, 3) mit der Eigenschaft

$$< p_m(X), p_n(X) >= \delta_{m,n}$$

hervorgeht.

(3) Man berechne die Orthogonalprojektion von

$$X^3 - 3X^2 + X$$

auf den Vektorraum $V = \mathrm{span}(p_0(X), p_1(X), p_2(X))$.

Bemerkung: Diese Polynome sind, bis auf multiplikative Konstanten, „Legendresche Polynome“.

Die Lösungen zu den mit $\star$ versehenen Aufgaben sollen Sie am 20.01.04 vor der Vorlesung abgeben.

Lineare Algebra für Physiker
WS 2003/04

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

12 20.01.04

12.1 Aufgabe

Gegeben seien die Werte $z, w \in \mathbb{C}$, man berechne $|\overline{z}|$, $\left|\frac{1}{z}\right|$ für $(z \neq 0)$. Man beweise, dass $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ (sofern $w \neq 0)$.

12.2 Aufgabe

Man beweise, dass

1) $|z+w|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\overline{z}w) + |w|^2$,

2) ⋆ $|z-w|^2 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(\overline{z}w) + |w|^2$,

3) ⋆ $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$.

12.3 Aufgabe

Man finde das Konjugierte und das (multiplikative) Inverse in der Form $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, sowie den Betrag von jeder der folgenden komplexen Zahlen:

1) $z_1 = \frac{4+3i}{i-7}$,

2) ⋆ $z_2 = \frac{i}{i+3}$,

3) ⋆ $z_3 = (1+i)^6$,

4) ⋆ $z_4 = i^{345}$.

12.4 Aufgabe

Gegeben seine die folgenden Abbildungen. Man prüfe, ob sie komplex linear sind. Falls ja, gebe man die zugehörige komplexe Matrix an:

1) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \quad f\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + iz_2 \\ 3z_2 - z_1 + iz_2 \\ \overline{(2-i)}z_2 \end{pmatrix};$

2) ⋆ $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3, \quad g\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + (i-4)z_2 \\ 3\overline{z_2} + iz_2 \\ z_2 - 2 \end{pmatrix};$

3) ⋆ $h : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \quad h\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + iz_1 - z_3 \\ 0 \\ (z_2 + 4iz_1)(2i-2) + 2z_3 \end{pmatrix}.$

12.5 $\star$ Aufgabe

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 & 3-6i & 6-7i \\ 0 & 1+i & 0 & 2 \\ 0 & -1-i & 3 & 2+i \\ 2-i & 2 & -6+3i & -7+i \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1-8i \\ 2 \\ -3i \\ 3i \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob das System $A \circ \vec{z} = \vec{b}$ lösbar ist; und bestimmen Sie ggfs. die Menge aller Lösungen.

12.6 Aufgabe

Man benutze das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren, um ein orthogonales k-Bein aus den folgenden Vektoren zu gewinnen:

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}, \qquad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2+2i \end{pmatrix},$$

$$\vec{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5+i \\ 1-3i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2-3i \\ i \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen zu den mit $\star$ versehenen Aufgaben sollen Sie am 27.01.04 vor der Vorlesung abgeben.

Lineare Algebra für Physiker
WS 2003/04

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

13 27.01.04

13.1 $\star$ Aufgabe

Man bestimme, welche der zu den komplexen $\mathbb{C}^{2\times 2}$-Matrizen gehörigen komplex-linearen Abbildungen selbstadjungiert bzw. unitär bzw. normal sind:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{pmatrix}$;

2) $B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$;

3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

4) $D = A \circ C$.

13.2 Aufgabe

Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Hermitesche Matrizen. Zeigen Sie:

1) Ist $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$ mit $\left(A^k\right) \circ \vec{z} = \vec{0}$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so gilt schon $A \circ \vec{z} = \vec{0}$.

2) $A \circ B$ ist genau dann Hermitesch, wenn $A \circ B = B \circ A$ gilt.

13.3 $\star$ Aufgabe

Gegeben sei die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-z \\ -x+2y-z \\ x-2y+2z \end{pmatrix}.$$

Man bestimme die reellen Eigenwerte λ_ν, ihre algebraische und geometrische Vielfachheit und die entsprechenden reellen Eigenvektoren $\vec{v}_\nu$.

13.4 $\star$ Aufgabe

Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ habe den Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Seien $a, b \in \mathbb{C}$ beliebige Zahlen. Man beweise, dass die Matrix $C = aA + bE$ den Eigenwert $a\lambda + b$ besitzt.
Hinweis. Derartige Resultate für Summen zweier Matrizen können Sie im Allgemeinen **nicht** erwarten: Hier ist ganz wesentlich, dass der **zweite Summand** Vielfaches der **Einheitsmatrix** ist.

13.5 Aufgabe

Man berechne Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man berechne, dass die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind.
Man finde eine Matrix B so, dass $B^{-1} \circ A \circ B$ diagonal ist.

Die Lösungen zu den mit $\star$ versehenen Aufgaben sollen Sie am 03.02.04 vor der Vorlesung abgeben.

Lineare Algebra für Physiker

WS 2003/04

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

14 03.02.04

14.1 Aufgabe

Man trigonalisiere die folgenden Matrizen mittels unitärer Koordinatentransformationen:

(a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(c) $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5+4i & -1+i & 3i \\ -3-i & 4+2i & -1+3i \\ -2-i & -1-5i & 7+6i \end{pmatrix}$.

14.2 Aufgabe

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Man beweise die Existenz einer Matrix $C = \sqrt{A}$, so dass also $C \circ C = A$.
Man bestimme C.

14.3 Aufgabe

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -\sqrt{6} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{6} & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

und das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$. Man beweise, dass durch

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_A := \vec{x} \cdot (A \circ \vec{y})$$

ebenfalls ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert wird.

14.4 Aufgabe

(a) Schlagen Sie für die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{4} & 0 & \frac{\pi}{4} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{\pi}{4} & 0 & \frac{3\pi}{4} \end{pmatrix}.$$

eine sinnvolle Definition von $\sin(A)$ vor und berechnen Sie diese Matrix.
Gehen Sie dazu wie in Beispiel 22.18 der Vorlesung vor und lassen Sie Konvergenzüberlegungen außer acht.

(b) Machen Sie einen Vorschlag für die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $f''(t) + A^2 \circ f(t) = \vec{0}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix ist. Gesucht ist dabei ein linear unabhängiges System vektorwertiger Lösungsfunktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Die Differentiation solcher Funktionen erfolgt komponentenweise.

14.5 Aufgabe

Sei $V = \{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} : A \text{ Hermitesch}, \text{Spur}(A) = 0\}$. Man beweise, dass V ein Vektorraum ist.
Man beweise, dass $||A|| = \sqrt{\det(A)}$ eine Norm auf V definiert.

14.6 Aufgabe

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ antisymmetrisch, d.h. $A = -A^t$. Man beweise:

(a) Die Eigenwerte λ_ν von A haben Realteil 0.
[*Hinweis: Man studiere die Matrix $B = iA$, die Hermitesch ist.*]

(b) Der Rang von A ist gerade.

14.7 Aufgabe

Sei $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine beliebige Matrix, und $A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ die zugehörige reelle Matrix, die wie im Anschluss an Definition 19.6 erläutert hieraus hervorgeht, und unter Beachtung von $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ dieselbe lineare Abbildung beschreibt. Zeigen Sie:

$$\det(A) = |\det(C)|^2.$$

[*Hinweis: Benutzen Sie den Trigonalisierungssatz. Beginnen Sie mit $n = 2$.*]

Lineare Algebra für Physiker

WS 2003/04

1. Klausur, 12.12.2003, Ohne Hilfsmittel

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

Jede Aufgabe wird mit bis zu 5 Punkten bewertet. Begründen Sie Ihre Lösungen vollständig.
Mit mindestens 12 Punkten ist die Klausur sicher bestanden.

1 Aufgabe

Man löse das lineare Gleichungssystem $A \circ \vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2 Aufgabe

Gegeben sei der 4-dimensionale Vektorraum $\mathbb{R}^4$ und die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Man beweise, dass $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \}$ eine Basis ist und man stelle $\vec{w}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_i$ dar.

3 Aufgabe

(a) Man gebe die Definition linearer Unabhängigkeit von Vektoren $x_1, ..., x_k$ in einem reellem Vektorraum V.

(b) Man gebe die Definitionen von nichtsingulären (regulären) Matrizen.

(c) Formulieren Sie die Dimensionsformel für lineare Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen.

4 Aufgabe

Ist die folgende Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

invertierbar? Bestimmen Sie ggfs. die inverse Matrix.

5 Aufgabe

Gegeben sei eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Man beweise, dass $A^t \circ A$ quadratisch und symmetrisch ist.

6 Aufgabe

Betrachten Sie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie: A ist regulär genau dann, wenn die Diagonalelemente a_{11}, a_{22}, a_{33} sämtlich ungleich 0 sind.

b) Zeigen Sie: Ist A regulär, so ist A^{-1} ebenfalls eine Dreiecksmatrix; d.h. unterhalb der Hauptdiagonalen stehen nur Nullen.

(Hinweis: Man kann den Gaußschen Algorithmus verwenden).

Lineare Algebra für Physiker

WS 2003/04

2. Klausur, 09.02.2004, Ohne Hilfsmittel

Prof. H.C. Grunau
E. Sassone

Jede Aufgabe wird mit bis zu 5 Punkten bewertet. Begründen Sie Ihre Lösungen vollständig.
Mit mindestens 12 Punkten ist die Klausur sicher bestanden.

Aufgabe 1

Gegeben seien die folgenden Abbildungen. Man prüfe, ob sie komplex linear sind. Falls ja, gebe man die zugehörige komplexe Matrix an.

1) $f: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \quad f\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 - (3-\overline{i})z_2 \\ z_2 + z_1 \end{pmatrix};$

2) $g: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2, \quad g\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iz_2 + 3z_1 \\ i \end{pmatrix};$

3) $h: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \quad h\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{2z_1} - 4\,\mathrm{Re}(z_1) + iz_2 \\ (2-3i)^3 \cdot (z_1 + 2z_2) \end{pmatrix}.$

Aufgabe 2

(a) Man gebe die Definition von algebraischer und geometrischer Vielfachheit eines Eigenwertes einer komplex linearen Abbildung $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.

(b) Man gebe die Definition von orthogonaler Matrix und orthogonaler Gruppe $O(n, \mathbb{R})$.

(c) Nennen Sie Eigenschaften der Eigenwerte unitärer Matrizen sowie der Eigenwerte Hermitescher Matrizen.
Beweisen Sie eine dieser Eigenschaften.

Aufgabe 3

Berechnen Sie mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens ein orthogonales k-Bein aus dem System der folgenden Vektoren:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -\sqrt{6} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{6} & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Man berechne ihre Eigenwerte, jeweils deren geometrische und algebraische Vielfachheit sowie zugehörige Eigenvektoren.

Aufgabe 5

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} +2+i & -2+i & 0 \\ -2+i & +2+i & 0 \\ 0 & 0 & +2+2i \end{pmatrix}.$$

Man bestimme alle Eigenwerte und, falls möglich, auch eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. In diesem Falle bilde man hieraus eine unitäre Matrix B und berechne $B^{-1} \circ A \circ B$.

Aufgabe 6

Gegeben sei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Man beweise, dass

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array} \right) = \det(A+B)\det(A-B).$$

Hinweis: Bringen Sie die gegebene Determinante durch Zeilen- und Spaltenumformungen in die Gestalt: $\det \left(\begin{array}{c|c} A+B & B \\ \hline \mathcal{O} & A-B \end{array} \right)$.