Prof. H.-Chr. Grunau
Dipl.-Math. L. Pulst

10.04.2012
Sommersemester 2012

ÜBUNGEN ZUR FUNKTIONENTHEORIE
BLATT 1

(1) Seien V, W normierte Vektorräume, und $K \subset V$ überdeckungskompakt. Sei $f : V \to W$ eine stetige Abbildung. Man zeige, dass $f(K) \subset W$ überdeckungskompakt ist.

(2) Sei $\mathbb{S}^2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}_\infty$, gegeben durch

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{x_1}{1-x_3} + i\frac{x_2}{1-x_3}, & \text{falls } (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,1), \\ \infty, & \text{falls } (x_1, x_2, x_3) = (0,0,1), \end{cases}$$

ein Homöomorphismus ist. Man gebe eine geometrische Interpretation dieser Abbildung.

Hinweis: Um die Stetigkeit von φ in $(0,0,1)$ zu beweisen, benutze man den Offenheitsbegriff für $\mathbb{C}_\infty$ wie in der Vorlesung definiert. Damit ist auch gezeigt, dass $\mathbb{C}_\infty$ überdeckungskompakt ist.

(3) Mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen zeige man:
- (a) $f_1(z) = |z|^2 = |x + iy|^2 = x^2 + y^2$ ist nur im Punkt $z_0 = 0$ komplex differenzierbar und nirgendwo holomorph,
- (b) $f_2(z) = \frac{1}{z}$ ist in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph,
- (c) $f_3(z) = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y)$ ist in $\mathbb{C}$ holomorph.

(4) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) := \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4}, & \text{falls } z \neq 0, \\ 0, & \text{falls } z = 0. \end{cases}$$

Man zeige, dass f in $z = 0$ die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllt, dort allerdings nicht komplex differenzierbar ist.

(5) Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $f = u + iv : G \to \mathbb{C}$ zweimal stetig reell differenzierbar und holomorph.
- (a) Man zeige, dass die Ableitung von f holomorph ist.
- (b) Man zeige, dass u und v harmonisch sind, d.h. $\Delta u = \Delta v = 0$.

★ (6) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Man zeige:
- (a) f ist konstant, falls für ein $a \in \mathbb{C}$ und ein $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt: $\{f(z) : z \in \mathbb{C}\} \subset \{a + \lambda b : \lambda \in \mathbb{R}\}$,
- (b) f ist konstant, falls alle Werte von f auf dem Einheitskreis liegen.

★ (7) (a) Man berechne die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ von
(i) $f(z) = |z|$ für $z \neq 0$,
(ii) $f(z) = \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z)$.
(b) Man bestimme alle Punkte der komplexen Ebene, in denen die Funktion
(i) $\sin\left(|z|^2\right)$,
(ii) $z\left(z + \overline{z}^2\right)$
komplex differenzierbar ist.

★ (8) Gegeben sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Man beweise, dass gilt:
(a) $\det(Df) = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|^2$,
(b) $\Delta f = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f$.
(c) Man folgere für f holomorph: $\Delta f = 0$.

(9) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $u : G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und harmonisch, d.h. $\Delta u = 0$. Man zeige, dass dann ein zweimal stetig differenzierbares und harmonisches $v : G \to \mathbb{R}$ existiert, so dass $f = u + iv$ holomorph ist.

Hinweis: Satz 22.5 und Bemerkung 22.6 aus Analysis II, d.h. in dieser Situation: Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein konvexes Gebiet, $F : G \to \mathbb{R}^2$ sei stetig differenzierbar, und es gelte:

$$\forall (x, y) \in G : \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y).$$

Dann existiert ein zweimal stetig differenzierbares $\psi : G \to \mathbb{R}$, so dass

$$\forall (x, y) \in G : \quad \operatorname{grad} \psi(x, y) = F(x, y).$$

★ (10) Man beweise, dass die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen in Polarkoordinaten zu

$$u_\theta = -\rho v_\rho, \qquad v_\theta = \rho u_\rho$$

werden.

(11) Gegeben seien eine reell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ und eine reell differenzierbare Abbildung $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; zu diesem Zwecke identifiziere man $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$. Man zeige, dass

$$\frac{\partial (f \circ h)}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \circ h\right) \cdot \frac{\partial h}{\partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \circ h\right) \cdot \frac{\partial \overline{h}}{\partial z},$$
$$\frac{\partial (f \circ h)}{\partial \overline{z}} = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \circ h\right) \cdot \frac{\partial h}{\partial \overline{z}} + \left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \circ h\right) \cdot \frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{z}}.$$

Die mit ★ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Abgabe der Lösungen: 24.04.2012 vor der Vorlesung.

Prof. H.-Chr. Grunau
Dipl.-Math. L. Pulst

24.04.2012
Sommersemester 2012

ÜBUNGEN ZUR FUNKTIONENTHEORIE
BLATT 2

★ (1) Gegeben seien eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ und eine zweimal stetig differenzierbare holomorphe Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Man beweise

$$\Delta (f \circ h) = \left|h'\right|^2 (\Delta f) \circ h.$$

★ (2) Sei $M_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ eine Möbiustransformation, d.h. $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. Man zeige, dass $M_A(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ genau dann, wenn man $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ wählen kann.

★ (3) (a) Man zeige, dass eine von der Identität verschiedene Möbiustransformation einen oder zwei Fixpunkte besitzt.

(b) Seien M_A und M_B Möbiustransformationen, deren Fixpunkte übereinstimmen. Man zeige, dass dann gilt: $M_A \circ M_B = M_B \circ M_A$.

Hinweis: Man unterscheide die folgenden Fälle. M_A, also auch M_B, besitzt ∞ und zusätzlich keinen oder einen weiteren Fixpukt (vgl. Aufgabenteil (a)). M_A, bzw. M_B, besitzt nur komplexe Fixpunkte.

★ (4) (a) Man zeige, dass es zu paarweise verschiedenen Punkten z_1, z_2, z_3 bzw. w_1, w_2, w_3 in $\mathbb{C}_\infty$ eine Möbiustransformation M gibt, so dass für $j = 1, 2, 3$ gilt:

$$M(z_j) = w_j.$$

Hinweis: Man zeige zunächst, dass es eine Möbiustransformation M gibt, die $M(0) = z_1, M(1) = z_2, M(\infty) = z_3$ erfüllt.

(b) Man finde eine Möbiustransformation, die die Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} | \, |z| < 1\}$ bijektiv auf $\{z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} | \, |z - 1| > 1\}$ abbildet.

(5) Man beweise, dass die Abbildungen $M_j : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ gegeben durch

$$M_1(z) := z, \qquad M_2(z) := \frac{1}{z}, \qquad M_3(z) := 1 - z,$$
$$M_4(z) := \frac{1}{1-z}, \quad M_5(z) := \frac{z}{z-1}, \quad M_6(z) := \frac{z-1}{z}.$$

eine Gruppe von Automorphismen von $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ bilden und, dass diese Gruppe isomorph zur Permutationsgruppe S_3 ist.

Hinweis: Man benutze, dass es sich um Möbiustransformationen handelt!

(6) Seien $a = 0.2i$ und $b = -1 + 1.1 \cdot (1 + a)$, sowie $R = |a + 1|$ und $r = |b + 1|$. Weiter sei die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \quad \varphi(z) = z + \frac{1}{z}$$

gegeben. Man studiere exakt die Bilder $\varphi(\partial B_R(a))$ und $\varphi(\mathbb{C} \setminus B_R(a))$, sowie qualitativ $\varphi(\partial B_r(b))$ und $\varphi(\mathbb{C} \setminus B_r(b))$.

Hinweis: Man zerlege φ mit den Funktionen

$$\begin{aligned} M_1 : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}, \quad & M_1(z) = \frac{z+1}{z-1}; \\ Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad & Q(z) = z^2; \\ M_2 : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}, \quad & M_1(z) = \frac{2(z+1)}{z-1}. \end{aligned}$$

Man verifiziere: $M_2(Q(M_1(z))) = z + \frac{1}{z}$. Außerdem ist es hilfreich, den Winkel zu betrachten, der von der Verbindung von -1 und a sowie der imaginären Achse eingeschlossen wird. Man bestimme zunächst M_1^{-1}.

Die mit ★ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Abgabe der Lösungen: 08.05.2012 vor der Vorlesung.

Prof. H.-Chr. Grunau
Dipl.-Math. L. Pulst

08.05.2012
Sommersemester 2012

ÜBUNGEN ZUR FUNKTIONENTHEORIE
BLATT 3

★ (1) Man zeige:
(a) Für die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \exp(z)$ gilt $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
(b) Für die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = \cos(z)$ gilt $g(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

(2) (a) Man bestimme die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die die folgende Potenzreihe um 0 konvergiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}.$$

Hinweis: Man betrachte die Partialsummen und multipliziere diese mit $(1 - z)$.

(b) Man untersuche die Frage nach der holomorphen Fortsetzbarkeit der Potenzreihe aus (a): Gibt es ein Gebiet $G \supsetneq B_1(0)$ und eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$, die auf $B_1(0)$ mit der Potenzreihe aus (a) übereinstimmt?

★ (3) (Für diese Aufgabe werden diesmal **6 Punkte** vergeben.)
(a) Man bestimme die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die die folgenden Potenzreihen um 0 jeweils konvergieren:
(i) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$,
(ii) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^{\left(2^k\right)}$.

(b) Man untersuche die Frage nach der holomorphen Fortsetzbarkeit der Potenzreihen aus (a): Gibt es jeweils ein Gebiet $G \supsetneq B_1(0)$ und jeweils eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$, die auf $B_1(0)$ mit der entsprechenden Potenzreihe aus (a) übereinstimmt?

Hinweis für (ii): Man benutze, dass die Gesamtheit aller 2^k-ten Einheitswurzeln, $k \in \mathbb{N}$, in $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ dicht liegt, und zeige, dass jede mögliche Fortsetzung in jeder 2^k-ten Einheitswurzel singulär wird.

(c) Man konstruiere unter Verwendung von Aufgabe (b) eine Funktion, die in $B_1(0)$ holomorph und in $\overline{B_1(0)}$ stetig ist und dennoch nicht über $B_1(0)$ hinaus holomorph fortgesetzt werden kann.

Hinweis : $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} z^{\left(2^k\right)}$.

★ (4) (a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Folgen komplexer Zahlen. Sei $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Man zeige, dass

$$\sum_{n=0}^{N} a_n b_n = a_N B_N - \sum_{n=0}^{N-1} B_n (a_{n+1} - a_n).$$

(b) Sei $\delta \in (0,1)$. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine reelle, monoton fallende Nullfolge. Man zeige, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ auf

$$\{|z| \leq 1\} \cap \{|z-1| > \delta\}$$

gleichmäßig konvergiert.

(5) Sei $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ eine beliebige monoton wachsende Funktion. Sei $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen mit $k_1 = 1$ und $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{k_n} > \varphi(n+1)$ für $n > 1$. Man zeige: Die Potenzreihe

$$f(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{z}{n-1}\right)^{k_n}$$

ist für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergent. Für alle reellen $x \geq 2$ gilt $f(x) \geq \varphi(x)$.

Hinweis : Wurzelkriterium.

(Das heißt: Man kann auch mit einer auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphen Funktionen beliebig starkes Wachstum für $x \to \infty$ realisieren.)

(6) Man berechne die folgenden Integrale:

(a)

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2+1}\, dz \quad \text{und} \quad \int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2+1}\, dz$$

★ (b) (Für diese Aufgabe werden diesmal **2 Punkte** vergeben.)

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z(z-i)}\, dz \quad \text{und} \quad \int_{\gamma_2} \frac{1}{z(z-i)}\, dz,$$

wobei $\gamma_1 = re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$, $0 < r < 1$, r fest und $\gamma_2 = Re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$, $R > 1$, R fest.

Die mit ★ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Abgabe der Lösungen: 22.05.2012 vor der Vorlesung.

Prof. H.-Chr. Grunau
Dipl.-Math. L. Pulst

22.05.2012
Sommersemester 2012

ÜBUNGEN ZUR FUNKTIONENTHEORIE
BLATT 4

★ (1) Gegeben sei die Menge $G := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{(0,1) \in \mathbb{R}^2\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\right\}$. Man beweise, dass G zusammenhängend, aber nicht wegweise zusammenhängend ist.

Hinweis: Um zu zeigen, dass G nicht wegweise zusammenhängend ist, nehme man, es existiert ein stetiger Weg, der den Punkt $(0,1)$ mit der restlichen Menge verbindet. Durch Konstruktion geeigneter Folgen führe man dies zum Widerspruch.

★ (2) Man bestimme die zusammenhängenden und die wegweise zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{Q}$.

★ (3) Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig, $f : G \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Für alle $z \in G$ gelte $f(z) \neq 0$. Man zeige:

(a) Es gibt eine holomorphe Funktion $g : G \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = e^{g(z)}$ für alle $z \in G$.

(b) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert eine holomorphe Funktion $h : G \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = (h(z))^n$ für alle $z \in G$.

Hinweis: Man betrachte $\frac{f'(z)}{f(z)}$. Auch f' ist holomorph.

★ (4) (a) Man beweise

$$\int_0^\infty e^{-(1+i)^2 t^2}\, dt = \frac{1-i}{4}\sqrt{\pi}$$

Hinweis: Man integriere die Funktion $f(z) = e^{-z^2}$ auf dem Weg $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$, mit

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &:= t, & 0 \leq t \leq r; \\ \gamma_2(t) &:= r + it, & 0 \leq t \leq r; \\ \gamma_3(t) &:= -(1+i)\,t, & -r \leq t \leq 0. \end{aligned}$$

Anschließend berechne man den Grenzwert für $r \to \infty$ und verwende ohne Beweis, dass $\int_0^\infty \exp\left(-t^2\right) dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ (siehe Analysis II, Aufgabe 14.7 oder Analysis III, Beispiel 29.8).

(b) Man zeige

$$\int_0^\infty \cos\left(t^2\right) dt = \int_0^\infty \sin\left(t^2\right) dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

(5) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\mathbb{C} \setminus G$ kompakt (das umströmte Hindernis). Weiter sei $(u,v) : \overline{G} \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ein stetig differenzierbares Geschwindigkeitsfeld und $p : \overline{G} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Druckfunktion. Dann lösen u, v, p in G die Eulerschen Gleichungen:

$$\begin{cases} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{cases} \tag{1}$$

Sei $\nu : \partial G \to \mathbb{R}^2$ die äußere Einheitsnormale an das Hindernis $\mathbb{C} \setminus G$, dann erfülle die Strömung für alle $z \in \partial G$ die Randbedingung

$$\langle (u(z), v(z)), \nu(z) \rangle = 0. \tag{2}$$

Weiter sei die Strömung als wirbelfrei vorausgesetzt, d.h. die Zirkulation verschwindet für alle $\overline{B_\rho(z_0)} \subset G$:

$$\int_{\partial B_\rho(z_0)} \langle (u,v)(x,y), \tau(x,y) \rangle ds(x,y) = 0,$$

wobei τ das Einheitstangentenvektorfeld an $\partial B_\rho(z_0)$ ist.

(a) Man zeige mit Hilfe des Gaußschen Satzes, dass in G gilt:

$$\operatorname{rot}(u,v)(x,y) := \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0. \tag{3}$$

Man folgere daraus: $f : G \to \mathbb{C}, \quad f(z) := u(z) - iv(z)$ ist in G holomorph.

(b) Man zeige für den Druck, dass eine Konstante $p_0 \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $z \in G$ gilt:

$$p(z) = -\frac{1}{2}\left(u(z)^2 + v(z)^2\right) + p_0.$$

(c) Sei nun $\gamma : [a,b] \to \partial G$ eine reguläre Parametrisierung des glatten Randes ∂G derart, dass das Hindernis $\mathbb{C} \setminus G$ links von der Kurve liegt. Sei $\tau(z) := \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$, $z = \gamma(t)$, das zugehörige Einheitstangentialvektorenfeld, so dass $\det(\nu(z), \tau(z)) = 1$. Man folgere aus der Randbedinung (2) für alle $z \in \partial G$

$$\overline{f(z) \cdot \tau(z)} = f(z) \cdot \tau(z).$$

Man leite daraus die Formel von Blasius für die hydrodynamische Auftriebskraft K des Körpers $\mathbb{C} \setminus G$ her, die durch das Geschwindigkeitsfeld (u,v) ausgeübt wird:

$$\overline{K} = \frac{i}{2} \int_\gamma f(z)^2 \, dz.$$

(d) Abschließend betrachte man die umgekehrte Problemstellung: Gegeben sei eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$. Man setze:

$$u := \operatorname{Re} f, \quad v := -\operatorname{Im} f, \quad p := -\frac{1}{2}|f|^2.$$

Man folgere daraus, dass dann die Differentialgleichungen (1) und (2) erfüllt sind.

Die mit ★ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Abgabe der Lösungen: 05.06.2012 vor der Vorlesung.

Prof. H.-Chr. Grunau
Dipl.-Math. L. Pulst

05.06.2012
Sommersemester 2012

ÜBUNGEN ZUR FUNKTIONENTHEORIE
BLATT 5

(1) (a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig, $f|_{\mathbb{C}\setminus\{z:\operatorname{Im} z=0\}}$ sei holomorph. Man zeige: Dann ist f in $\mathbb{C}$ holomorph.

Hinweis: Folgerung 6.6(d).

(b) Sei $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, $f : \overline{H} \to \mathbb{C}$ sei in $\overline{H}$ stetig und in H holomorph, es gelte $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Sei

$$\hat{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \hat{f}(z) := \begin{cases} f(z), & z \in \overline{H}, \\ \overline{f(\overline{z})}, & \overline{z} \in H. \end{cases}$$

Man zeige, dass $\hat{f}$ in $\mathbb{C}$ holomorph ist.

(c) Sei $u : \overline{H} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Weiter sei u harmonisch in H und es gelte für alle $x \in \mathbb{R} : u(x,0) = 0$. Sei

$$\hat{u} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \hat{u}(x,y) := \begin{cases} u(x,y), & y \geq 0, \\ -u(x,-y), & y < 0. \end{cases}$$

Man zeige, dass $\hat{u}$ in $\mathbb{R}^2$ harmonisch ist.

★ (2) Man berechne

$$\int_{|\zeta|=r} \frac{d\zeta}{(\zeta-a)^n(\zeta-b)^m} \quad \text{für } |a| < r < |b| \text{ und } n, m \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Man differenziere die Cauchysche Integralformel.

(3) Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $u : G \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar und harmonisch.

(a) Weiter seien $z_0 \in G, r > 0$ so, dass $\overline{B_r(z_0)} \subset G$. Man zeige:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(z_0 + re^{i\varphi}\right) d\varphi = \frac{1}{2\pi r}\int_{|z-z_0|=r} u(z)\,|dz|.$$

(b) Nun sei G zusätzlich wegweise zusammenhängend. Man zeige: Nimmt u sein Maximum in einem Punkt $z_0 \in G$ an, so ist u konstant.

Hinweis: Man zeige die Aussage zunächst auf $\overline{B_r(z_0)} \subset G$.

★ (4) Für $0 < r < 1$ sei $\gamma_r(t) := re^{2\pi it}$, $t \in [0,1]$, und für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k : B_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Man zeige, dass die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen ein holomorphes $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ lokal gleichmäßig in $B_1(0)$ konvergiert, wenn

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\gamma_r} |f(z) - f_k(z)|\,|dz| \to 0 \quad \text{für alle } r,\ 0 < r < 1.$$

★ (5) Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, holomorph und so, dass mit geeigneten Zahlen $K > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\forall z \in \mathbb{C} : \quad |f(z)| \leq K(1 + |z|^k).$$

Man zeige, dass f ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich k ist.

(6) Sei $u : B_1(0) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und harmonisch. Es gelte für alle x : $u(x,0) = \frac{\partial}{\partial y} u(x,0) = 0$. Man zeige $u \equiv 0$ auf $B_1(0)$.

★ (7) (a) Man gebe ein Beispiel für eine im Einheitskreis $B_1(0)$ holomorphe Funktion an, die dort unendlich viele Nullstellen hat, aber nicht identisch verschwindet.

(b) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht identisch Null. Man zeige, dass die Menge der Nullstellen von f höchstens abzählbar ist.

Hinweis: Man zeige zunächst, dass f auf jeder kompakten Teilmenge von G nur endlich viele Nullstellen haben kann.

(8) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, P ein nicht konstantes reeles Polynom in zwei Veränderlichen, $c \in \mathbb{C}$ eine feste Zahl und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph derart, dass für alle $z \in G$ gilt $P(\operatorname{Re} f(z), \operatorname{Im} f(z)) = c$. Man zeige, dass f konstant ist.

Die mit ★ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Abgabe der Lösungen: 19.06.2012 vor der Vorlesung.

Prof. H.-Chr. Grunau
Dipl.-Math. L. Pulst

19.06.2012
Sommersemester 2012

ÜBUNGEN ZUR FUNKTIONENTHEORIE
BLATT 6

★ (1) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig, nicht konstant und in G holomorph so, dass $|f|_{\partial G}|$ konstant ist. Man zeige, dass f eine Nullstelle in G hat.

(2) (a) Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbare, geschlossene Wege mit gleichem Anfangspunkt, d.h. $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$. Dann ist der Weg $\gamma_1 \vee \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$, den man erhält, indem man zuerst γ_1 und dann γ_2 geeignet umparametrisiert durchläuft wieder stückweise stetig differenzierbar und geschlossen. Man zeige

$$\operatorname{ind}(\gamma_1 \vee \gamma_2, z_0) = \operatorname{ind}(\gamma_1, z_0) + \operatorname{ind}(\gamma_2, z_0)$$

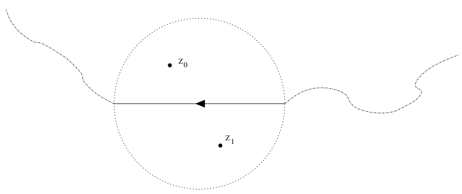
für alle $z_0 \in \mathbb{C} \setminus (\gamma_1([a,b]) \cup \gamma_2([a,b]))$.

(b) Sei $\gamma : [-2,2] \to \mathbb{C}$ ein stetig differenzierbarer, geschlossener Weg. Weiter sei er einfach geschlossen, d.h. $(\gamma(s) = \gamma(t), s,t \in (-2,2) \Rightarrow s = t)$, und so, dass $\gamma(t) = -t$ für $t \in [-1,1]$ und $B_1(0) \cap \gamma([-2,2]) = (-1,1)$. Schließlich seien $z_0, z_1 \in B_1(0)$ Punkte so, dass $\operatorname{Im}(z_0) > 0, \operatorname{Im}(z_1) < 0$.

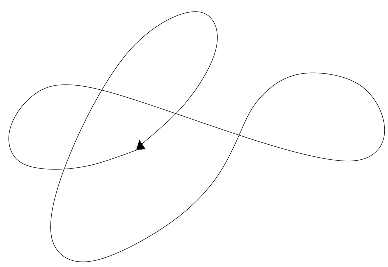
Man zeige:

$$\operatorname{ind}(\gamma, z_1) = \operatorname{ind}(\gamma, z_0) + 1.$$

Hinweis: Man löse das Problem zunächst graphisch, bevor man die Lösung formalisiert.



(c) Man gebe die Indizes der Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$ für den rechts abgebildeten Weg γ an.



(3) Man betrachte für $z, w \in B := B_1(0)$ die Funktion

$$\Delta(w,z) = \frac{|z-w|}{|\overline{w}z - 1|}.$$

Man zeige, dass für jede holomorphe Abbildung $f : B \to B$ gilt:

$$\Delta(f(w), f(z)) \le \Delta(w,z) \qquad \text{für alle } w,z \in B. \tag{4}$$

Man zeige weiter: Gilt für zwei Punkte $a, b \in B, a \neq b$, dass

$$\Delta(f(a), f(b)) = \Delta(a,b),$$

dann ist $f \in \operatorname{Aut} B$, und (4) ist für alle $w, z \in B$ eine Gleichung.

Hinweis: Sei $\psi_w : B \to B, z \mapsto \frac{z-w}{\overline{w}z-1}, w \in B$ ein Automorphismus von B, man betrachte die holomorphe Abbildung $h_w = \psi_{f(w)} \circ f \circ \psi_w$.

★ (4) Gegeben seien das Gebiet $G = \mathbb{C} \setminus \{z : \mathrm{Im}\,(z) = 0, \mathrm{Re}\,(z) \leq 0\}$ und der Hauptzweig des Logarithmus $\mathrm{Log} : G \to \mathbb{C}$. Man bestimme die „Differenzterme" m, n für die folgenden „Funktionalgleichungen":

(a) Für $z, w, z \cdot w \in G$: $\mathrm{Log}\,(z \cdot w) - \mathrm{Log}\,(z) - \mathrm{Log}\,(w) = m\,(z, w)$.

(b) Für $z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}\,(z) \notin \{(2k+1)\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$: $\mathrm{Log}\,(e^z) - z = n\,(z)$.

★ (5) Man bestimme für die folgenden Funktionen alle Singularitäten und deren Typ:

(a) $f\,(z) = \frac{\sin z}{z^2(z-\pi)^5}$;

(b) $g\,(z) = \frac{e^{-z}-1}{(1-\cos z)^n}$, $n \in \mathbb{N}$;

★ (6) Gegeben sei die Funktion $f\,(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Man zeige, dass in jeder Umgebung $B_\varepsilon\,(0)$ von Null

$$f\,(B_\varepsilon\,(0) \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

gilt.

(7) Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wird *ganz* genannt, falls f eine Potenzreihenentwicklung $f\,(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit unendlichem Konvergenzradius hat. Seien $R > 0$ und $G := \{z : |z| > R\}$.
Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ hat eine *hebbare Singularität*, bzw. einen *Pol der Ordnung n* bzw. eine *wesentliche Singularität* in ∞, falls $f\left(\frac{1}{z}\right)$ in 0 eine hebbare Singularität, bzw. einen Pol der Ordnung n bzw. eine wesentliche Singularität hat.
Man beweise:

(a) Eine ganze Funktion f hat eine hebbare Singularität in ∞ genau dann, wenn f konstant ist.

(b) Eine ganze Funktion f hat einen Pol der Ordnung n in ∞ genau dann, wenn f ein Polynom von Grad n ist.

Die mit ★ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Abgabe der Lösungen: 03.07.2012 vor der Vorlesung.

Prof. H.-Chr. Grunau
Dipl.-Math. L. Pulst

03.07.2012
Sommersemester 2012

ÜBUNGEN ZUR FUNKTIONENTHEORIE
BLATT 7

(1) Man berechne $\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$ für $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) := 2e^{it}$ mit Hilfe des Residuensatzes.

(2) Man gebe für $f : \mathbb{C} \setminus \{0, i, -i\} \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$ die Laurententwicklungen um 0 an, die in $B_1(0)$ bzw. $\mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}$ konvergieren.

(3) Man berechne $\operatorname{Res}\left(\frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)^2}, i\right)$.

(4) Seien P, Q Polynome mit $\operatorname{grad} Q \geq \operatorname{grad} P + 2$; und das Polynom Q habe auf der reellen Achse keine Nullstellen. Man zeige, dass für $R = \frac{P}{Q}$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} R(x)\, dx = 2\pi i \sum_{z \in \mathbb{H}:\ Q(z)=0} \operatorname{Res}(R, z),$$

wobei $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

(5) Man berechne $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} dx$ für $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe des Residuensatzes.

(6) Sei $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ ein beschränktes Gebiet, ∂G werde durch die einfach geschlossene glatte reguläre Kurve $\gamma : [a, b] \to \partial G$ gegeben, die so parametrisiert ist, dass $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ bei positivem Durchlauf von γ links von γ liegt. Dann ist $\nu(s) = (\tau_2(s), -\tau_1(s))$ die äußere Einheitsnormale mit dem Tangentenfeld $\tau(s)$. Das Geschwindigkeitsfeld $(u, v) : \overline{G} \to \mathbb{R}^2$ sei stetig differenzierbar (bis einschließlich γ) und werde durch die holomorphe Funktion $f = u - iv$ gegeben (vgl. Blatt 4, Aufgabe 5). f sei in einer Umgebung von $\overline{G}$ holomorph und es gelte auf ∂G : $\langle (u, v), \nu \rangle = 0$. Für den hydrodynamischen Auftrieb gilt die Formel von Blasius (Blatt 4, Aufgabe 5c):

$$K = -\frac{i}{2} \overline{\int_{\partial G} f(z)^2\, dz}.$$

Sei nun $r > 0$ so, dass $\mathbb{C} \setminus G \subset B_r(0)$, und man nehme an, dass ∂G in $\overline{G}$ in ∂B_r homotopiert werden kann. Weiter gelte, dass

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = u_\infty - iv_\infty =: f_\infty \in \mathbb{C},$$

d.h. das Geschwindigkeitsfeld besitzt eine konstante Anströmgeschwindigkeit im Unendlichen. Man zeige, dass für die Auftriebskraft K gilt:

$$K = \left(\int_\gamma \langle (u, v), \tau \rangle |dz| \right) (v_\infty - iu_\infty).$$

Hinweis: Laurentreihen.

(7) Gegeben sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, zweimal stetig differentierbar, so, dass $\left| f|_{\partial B_R(0)} \right| > \varepsilon > 0$. Weiter sei $\varphi(t) := f\left(Re^{it}\right)$ und

$$d(f, B_R(0), 0) := \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt.$$

Man zeige, dass diese Definition für holomorphes f mit der aus der Vorlesung bekannten Definition des Abbildungsgrades 15.5 übereinstimmt.

(8) (a) Man bestimme den Abbildungsgrad $d(z \mapsto \overline{z}, B_R(0), 0)$.

(b) Man beweise den Fundamentalsatz der Algebra, indem man auf geeignetem $B_R(0)$ den Abbildungsgrad von $z \mapsto z^k$ bestimmt.

(9) Gegeben sei ein Polynom n-ten Grades ($n \in \mathbb{N}$)

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \quad a_j \in \mathbb{C}.$$

Ist es möglich, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gilt

$$|P(z)| < 1?$$