Analysis I – WS 2010/11

Prof. H.-Ch. Grunau, Dipl.-Math. L. Pulst

1 11.10.10

1.1 Aufgabe

Man ergänze die folgende Wahrheitstafel:

p	q	r	$(\neg p) \Rightarrow (\neg q)$	$q \Rightarrow p$	$(\neg q) \vee (\neg p)$	$(q \wedge p) \vee (p \wedge r)$	$p \wedge (q \vee r)$
w	w	w					
w	w	f					
w	f	w					
w	f	f					
f	w	w					
f	w	f					
f	f	w					
f	f	f					

.

1.2 Aufgabe

Gegeben sei eine Aussageform $Z(x,y)$. Man bilde die Negation von

1) $\forall x, \forall y : Z(x,y)$, 2) $\forall x, \exists y : Z(x,y)$, 3) $\exists x, \forall y : Z(x,y)$, 4) $\exists x, \exists y : Z(x,y)$.

1.3 Aufgabe

Man setze die Zeichen ($\forall$, $\exists$) so ein, dass eine wahre und möglichst allgemeine Aussage entsteht:

1) $\_\_\_ x \in \mathbb{R}, \_\_\_ y \in \mathbb{R} : x^2 = y$, 2) $\_\_\_ M \in \mathbb{R}, \_\_\_ x \in \mathbb{R} : \operatorname{sgn}(x) < M$,

3) $\_\_\_ x \in \mathbb{R}, \_\_\_ M > 0 : |x| < M$, 4) $\_\_\_ x > 0, \_\_\_ y > 0 : xy > 0$.

1.4 $\star$ Aufgabe

Man bilde die Negation der folgenden Aussageformen:

$A(x)$	$\neg A(x)$
$2x = 6$	
$x = 3 \vee x = 4$	
$x \leq 3$	
$2 \leq x \leq 10$	

1.5 Aufgabe

Seien M ein total angeordneter Körper und $a, b, c, d \in M$. Man beweise, dass stets gilt:

1) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$;

2) $a < b \Rightarrow -b < -a$;

3) $a < b$ und $c > 0 \Rightarrow ac < bc$;

4) $a < b$ und $c < d \Rightarrow a + c < b + d$;

5) $0 < a < b$ und $0 < c < d \Rightarrow ac < bd$.

1.6 $\star$ Aufgabe

Sei M ein total angeordneter Körper. Man zeige für $x, y \in M$ und $0 < x \leq y$:

$$x^2 \leq \left(\frac{2xy}{x+y}\right)^2 \leq xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq y^2.$$

1.7 Aufgabe

Man bestimme Supremum und Infimum sowie bei Existenz Maximum und Minimum der folgenden Mengen.

1) $A_1 := \left\{\frac{|x|}{1+|x|}, x \in \mathbb{R}\right\}$

2) $A_2 := \left\{\frac{x}{1+x}, x > -1\right\}$

3) $A_3 := \left\{x + \frac{1}{x}, \frac{1}{2} < x \leq 2\right\}$

1.8 $\star$ Aufgabe

Sei M ein total angeordneter Körper. Man beweise für die Mengen $A \subset B \subset M$:

$$\sup A \leq \sup B \quad \text{und} \quad \inf A \geq \inf B.$$

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 20.10.10 in der Vorlesung ab.]

2 18.10.10

2.1 Aufgabe

Sei M ein total angeordneter Körper und $\emptyset \neq A \subset M$ eine nach oben beschränkte Menge. Man zeige, dass das Supremum von A im Falle der Existenz eindeutig bestimmt ist. Was kann man über das Maximum von A aussagen?

2.2 Aufgabe

Sei $A \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt. Die Menge $-A$ sei definiert durch:

$$-A := \{-x, x \in A\}.$$

Man beweise, dass $\inf A \in \mathbb{R}$ existiert und dass gilt:

$$\inf A = -\sup(-A).$$

2.3 $\star$ Aufgabe

Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Man beweise, dass gilt:

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$
$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

Falls zusätzlich $A \cap B \neq \emptyset$ gilt, zeige man:

$$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$$
$$\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}.$$

2.4 $\star$ Aufgabe

Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $\sup A < \infty$. Man beweise für das Komplement $A^C := \{x \in \mathbb{R}, x \notin A\}$ von A:

$$\sup A^C = \infty.$$

Gilt die Umkehrung? ($\sup A^C = \infty \;\Rightarrow\; \sup A < \infty$)

2.5 Aufgabe

Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

a) $|2x| > |5 - 2x|$

b) $\star$ $||x-1| - |x|| - |x-2| \leq -\frac{5}{4}$

c) $\frac{||x-1|-|x-3||}{|x-2|+1} \geq \frac{1}{2}$

d) $\star$ $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| > 2$

2.6 $\star$ Aufgabe

Man zeige mit vollständiger Induktion, dass für ganze nichtnegative Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ der Ausdruck

$$11^{n+2} + 12^{2n+1}$$

durch 133 teilbar ist.

2.7 Aufgabe

Die *Fibonacci–Folge* wird mit Hilfe der folgenden Rekursionsvorschrift definiert:

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ für } n > 2.$$

So sind die ersten Zahlen:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,...

Man zeige mit vollständiger Induktion die folgenden Eigenschaften der Fibonaccifolge:

1) $\forall n \geq 1 : f_{4n}$ ist durch 3 teilbar.

2) $\forall n \geq 1 : f_{3n}$ ist durch 2 teilbar.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 27.10.10 in der Vorlesung ab.]

3 25.10.10

3.1 Aufgabe

Man zeige, dass die Menge $\left\{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2\right\}$ in $\mathbb{Q}$ kein Supremum besitzt.

Definition

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$, definieren wir den *Binomialkoeffizienten* durch

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{\alpha+1-i}{i} \quad \text{und} \quad \binom{\alpha}{0} := 1.$$

Falls $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $n \geq k$, gilt speziell:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

wobei die *Fakultät* von n definiert ist durch:

$$0! := 1, \quad n! := 1 \cdot 2 \cdots n.$$

3.2 ⋆ Aufgabe

Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Man zeige, dass

$$\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}$$

gilt.

3.3 ⋆ Aufgabe

Man beweise mit vollständiger Induktion, dass für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ und für jede natürliche Zahl n die Gleichung

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

der sogenannte binomische Satz, gilt.

3.4 ⋆ Aufgabe

Man untersuche jede der folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität (Schulwissen darf verwendet werden):

1) $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, mit $f(x) = \cos(x^2)$;

2) $f : [-2\pi, 2\pi] \to [-2, 2]$, mit $f(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$;

3) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, mit $f(x) = x^2$;

4) $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, mit $f(x) = \frac{1}{x}$.

3.5 $\star$ Aufgabe

Gegeben seien die beiden Abbildungen $f : M_2 \to M_3, \quad g : M_1 \to M_2$.

1) Sei $f \circ g$ surjektiv. Man beweise, dass dann f surjektiv ist.
2) Man konstruiere ein Beispiel mit $f \circ g$ surjektiv, wobei aber g nicht surjektiv ist.
3) Sei $f \circ g$ injektiv. Man beweise, dass dann g injektiv ist.
4) Man konstruiere ein Beispiel mit $f \circ g$ injektiv, wobei aber f nicht injektiv ist.

3.6 Aufgabe

Man zeige, dass die Menge F aller Folgen $f = (f_n) : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ überabzählbar ist.

Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte
zusammengeheftet und mit der entsprechenden Übungsgruppe versehen
am 03.11.10 in der Vorlesung ab.

4 01.11.10

4.1 $\star$ Aufgabe

Man zeige mit vollständiger Induktion:

1) $\forall n \geq 1 : \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2) $\forall n \geq 2 : \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \ldots \forall x_n \in \mathbb{R} : \quad |x_1 + x_2 + ... + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$.

4.2 Aufgabe

Gegeben seien eine streng monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, eine monoton wachsende Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine streng monoton fallende Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Man studiere die Eigenschaften von

1) $f \circ g$,

2) $h \circ f$,

3) $f \circ h$,

4) $g \circ h \circ f \circ g$.

4.3 $\star$ Aufgabe

Seien f und g Funktionen, die auf dem Intervall $[a, b]$ einer Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstanten L_f und L_g genügen. Man zeige, dass die Summe $f + g$ und das Produkt $f \cdot g$ auf $[a, b]$ auch einer Lipschitz-Bedingung genügen.

4.4 Aufgabe

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf $[a, b]$ einer Lipschitz-Bedingung genügt und nur ganzzahlige Werte annimmt. Man zeige, dass die Funktion f konstant ist.

4.5 $\star$ Aufgabe

Seien w und z komplexe Zahlen. Man zeige, dass

1) $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$,

2) $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$,

3) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$,

4) $\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$,

5) $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\overline{w}}{\overline{z}}$ für $z \neq 0$.

4.6 Aufgabe

Man bestimme alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

1) $iz^2 + (1 - i)\, z - 3 = 0$,

2) $z^4 + (1 + i)\, z^2 + i = 0$.

4.7 Aufgabe

Man charakterisiere geometrisch (Skizze) diejenigen $z \in \mathbb{C}$, für die gilt:

1) $0 < Re\,(iz) < 1$,

2) $\left|\frac{z-i}{z-1}\right| = 1.$

3) $|z| = Re\,(z) + 1$,

4) $Im\left(\frac{z-i}{z-1}\right) = 0$,

4.8 ⋆ Aufgabe

Man beweise, dass die Äquivalenz von Normen eine Äquivalenzrelation ist.

4.9 Aufgabe

Man entscheide, ob die folgenden Abbildungen eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ definieren:

1) $x = (x_1, x_2) \mapsto 2\,|x_1| + 3\,|x_2|$,

2) $x = (x_1, x_2) \mapsto |x_2|$.

Die mit ⋆ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte
zusammengeheftet und mit der entsprechenden Übungsgruppe versehen
am 10.11.10 in der Vorlesung ab.

5 08.11.10

5.1 Aufgabe

Gegeben sei ein normierter reeller Vektorraum $(V, \|.\|)$. Man beweise, dass eine Teilmenge $A \subset V$ beschränkt ist genau dann, wenn ein $R > 0$ und ein $a \in V$ existieren, so dass $A \subset B_R(a)$.

5.2 $\star$ Aufgabe

Man finde im euklidischen $\mathbb{R}^2$ zwei nichtleere disjunkte Mengen A_1 und A_2, deren Abstand Null ist.

5.3 $\star$ Aufgabe

Man beweise die folgende Aussage:

$$O \subset (\mathbb{R}^n, \|.\|_1) \text{ offen } \Leftrightarrow O \subset (\mathbb{R}^n, \|.\|_2) \text{ offen } \Leftrightarrow O \subset (\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty) \text{ offen.}$$

Hinweis: Hilfsatz 5.4 und Aussagen über die offenen Kugeln bezüglich der verschiedenen Normen:
Sei $x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}, r > 0$:

- $B_r^1(y) := \{y \in \mathbb{R} : \|y - x\|_1 < r\}$
- $B_r^2(y) := \{y \in \mathbb{R} : \|y - x\|_2 < r\}$
- $B_r^\infty(y) := \{y \in \mathbb{R} : \|y - x\|_\infty < r\}$

5.4 $\star$ Aufgabe

Man beweise für alle $x, y \in (\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$

$$\|x - y\|_2^2 + \|x + y\|_2^2 = 2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2$$

die sogenannte Parallelogrammgleichung und zeige, dass sie in $(\mathbb{R}^n, \|.\|_1)$ nicht gilt.

5.5 Aufgabe

Gegeben sei ein normierter reeller Vektoraum $(V, \|.\|)$. Man zeige, dass stets gilt:

1) $\emptyset$, V sind abgeschlossen;
2) sind $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset V$ abgeschlossen, so ist auch $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ abgeschlossen;
3) ist J irgendeine Indexmenge und $(\mathcal{A}_j)_{j \in J}$ ein System abgeschlossener Teilmengen von V, so ist auch $\cap_{j \in J} \mathcal{A}_j$ abgeschlossen.

Hinweis: Sie dürfen die De Morganschen Regeln benutzen, d.h. für eine beliebige Indexmenge J und $(\mathcal{B}_j)_{j \in J}$ ein beliebiges System von Teilmengen in V gilt:

$${}^c(\cap_{j \in J} \mathcal{B}_j) = \cup_{j \in J} \mathcal{B}_j^c \quad \text{und} \quad {}^c(\cup_{j \in J} \mathcal{B}_j) = \cap_{j \in J} \mathcal{B}_j^c.$$

5.6 Aufgabe

Man betrachte den $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm. Man finde:

1) ein Beispiel für einen nicht offenen unendlichen Durchschnitt von offenen Mengen;
2) ein Beispiel für eine nicht abgeschlossene unendliche Vereinigung von abgeschlossenen Mengen.

5.7 $\star$ Aufgabe

Gegeben seien ein normierter reeller Vektorraum $(V, \|.\|)$ und eine beliebige Menge $M \subset V$. Man beweise, dass für eine Teilmenge $N \subset V$ genau dann $N = M^\circ$ gilt, wenn:

1) $N \subset M$,

2) N ist offen,

3) ist $\tilde{N} \subset V$ offen, $\tilde{N} \subset M$, so folgt stets, dass $\tilde{N} \subset N$.

5.8 Aufgabe

Man bestimme den offenen Kern, den Rand und den Abschluss von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ bezüglich der euklidischen Norm, d.h. bzgl. des üblichen Betrags.

Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte
zusammengeheftet und mit der entsprechenden Übungsgruppe versehen
am 17.11.10 in der Vorlesung ab.

6 15.11.10

6.1 Aufgabe

Gegeben seien eine endliche Indexmenge $J \subset \mathbb{N}$, ein normierter Vektorraum $(V, \|.\|)$ und eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in V, die gegen ein $a \in V$ konvergiert. Sei $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge in V, wobei für $k \notin J$ gelte: $a_k = b_k$. Man beweise, dass auch die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in V gegen a konvergiert.

6.2 $\star$ Aufgabe

Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter reeller Vektorraum, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in V. Man beweise, dass (a_k) beschränkt ist im folgenden Sinne: $\exists M > 0 : \forall k : a_k \in B_M(0)$ bzw. $\|a_k\| < M$.
Sei $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in V. Man zeige, dass $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ebenfalls beschränkt ist.

6.3 Aufgabe

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine in dem normierten reellen Vektorraum $(V, \|\,.\,\|)$ gegen $a \in V$ konvergente Folge. Man beweise die folgenden Aussagen:

a) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist konvergent gegen $a \in V$ genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt:
$$\|a - a_k\| \leq \varepsilon.$$

b) Sei $M \geq 0$ derart, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\|a_k\| \leq M$. Dann folgt $\|a\| \leq M$.

6.4 $\star$ Aufgabe

Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter reeller Vektorraum, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine gegen ein $a \in V$ konvergente Folge. Sei $A_k := \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} a_j$ die Folge der arithmetischen Mittel. Man zeige, dass auch $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. Existiert eine divergente Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, für die $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert?

6.5 $\star$ Aufgabe

Von der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus dem normierten Vektorraum $(V, \|.\|)$ sei bekannt, dass die Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Konvergiert dann $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ selbst?

6.6 Aufgabe

Man gebe Beispiele für Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ an, wobei

a) $(a_k + b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht,

b) $\left(\frac{a_k}{b_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht,

c) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren, $\left(\frac{a_k}{b_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht.

6.7 Aufgabe

Gegeben seien die Folgen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{R}, \|.\|)$ mit $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ durch

$$A_k := \sum_{i=0}^{n} a_i k^i \quad \text{und} \quad B_k := \sum_{j=0}^{m} b_j k^j.$$

Man betrachte das Konvergenzverhalten und bestimme ggfs. den Grenzwert von $\left(\frac{A_k}{B_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ für die Fälle $n > m,\ n = m$ und $n < m$.

6.8 $\star$ Aufgabe

Man entscheide, welche der Folgen konvergent sind, und bestimme ggfs. ihren Grenzwert:

1) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $a_k = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k \text{ gerade}, \\ -\frac{2}{k}, & k \text{ ungerade}, \end{cases}$ in $\mathbb{R}$;

2) $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $b_k = \left(\frac{k+1}{k^2}, 7\right)$, in $\mathbb{R}^2$;

3) $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $c_k = \sqrt{k}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$ in $\mathbb{R}$;

4) $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $d_k = k - \frac{3}{k}$, in $\mathbb{R}$.

Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte
zusammengeheftet und mit der entsprechenden Übungsgruppe versehen
am 24.11.10 in der Vorlesung ab.

7 17.11.10

7.1 ⋆ Aufgabe

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $(\mathbb{R}, |.|)$. Man beweise oder widerlege:

1) $\left(a_k^2\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn $(|a_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

2) Ist $(a_{k+1} - a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so konvergiert $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

3) Ist $|a_{k+1} - a_k|_{k\in\mathbb{N}} \leq \frac{1}{k^2}$, so konvergiert $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

7.2 Aufgabe

Man zeige, dass durch die Folge $(I_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ mit $I_k := [a_k, b_k]$ und

$$a_k := \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k, \quad b_k := \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ gegeben ist, d.h. eine Folge $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Intervallen $I_k := [a_k, b_k]\,, a_k < b_k$ mit den Eigenschaften

i) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend,

ii) $\lim_{k\to\infty} diam\,(I_k) = 0$.

Bemerkung: Satz 6.17 zeigt dann, dass es genau eine reelle Zahl in der Schachtelung aller Intervalle gibt:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \{e\}\,.$$

Diese Zahl ist die Eulersche Zahl e.

7.3 ⋆ Aufgabe

Gegeben sei ein normierter Vektorraum $(V, \|.\|)$. Man zeige, dass ein Punkt $a \in V$ Häufungswert einer Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in V genau dann ist, wenn jede Umgebung $\mathcal{U}$ von a unendlich viele Glieder von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ enthält.

7.4 ⋆ Aufgabe

Gegeben sei eine reelle gegen a konvergente Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Es sei

$$\alpha_m = \inf_{k\geq m} a_k, \qquad \beta_m = \sup_{k\geq m} a_k.$$

Man zeige, dass die Folgen $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $(\beta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend bzw. fallend gegen a streben.

7.5 Aufgabe

In Verallgemeinerung von Aufgabe 7.4 zeige man, dass für eine beliebige reelle Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\liminf_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \alpha_k, \qquad \limsup_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \beta_k.$$

Hinweis: Falls die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert, schreibt man: $\lim_{k\to\infty} a_k = \infty$. Analog bei $-\infty$.

7.6 Aufgabe

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge.
Man zeige, dass $\limsup\limits_{k\to\infty} a_k$ der größte Häufungswert der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist.

Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte
zusammengeheftet und mit der entsprechenden Übungsgruppe versehen
am 01.12.10 in der Vorlesung ab.

8 29.11.10

8.1 Aufgabe

Seien für die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, |.|)$ die Körperaxiome (Definition 1.1), die Anordnungsaxiome (Definition 1.4) und das archimedische Axiom (Folgerung 2.7) als geltend vorausgesetzt, d.h. $(\mathbb{R}, |.|)$ ist ein archimedisch und total angeordneter Körper. Des Weiteren sei $(\mathbb{R}, |.|)$ vollständig im Sinne von Definition 6.16, d.h. jede Cauchyfolge konvergiert in $\mathbb{R}$.
Man zeige, dass dann das "Supremumsaxiom" (Definition 1.12) als Satz in $\mathbb{R}$ gilt, d.h. jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge A von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum $\sup A \in \mathbb{R}$.

8.2 Aufgabe

Sei e die reelle Zahl, die sich mit Hilfe der Intervallschachtelung aus Aufgabe 7.2 ergibt, d.h. $\{e\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$. Man zeige, dass diese Zahl mit dem Wert der Potenzreihe $\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ an der Stelle 1 übereinstimmt, also: $e = \exp(1)$.
Hinweis: Man zeige, dass $\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e$ gilt und benutze den binomischen Lehrsatz.

8.3 Aufgabe

Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2}, \\ a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k}. \end{cases}$$

Man beweise die Konvergenz der Folge und berechne den Grenzwert.
Hinweis: Man zeige zunächst durch vollständige Induktion, dass $0 \leq a_k \leq 2$. Weiter benutze man, dass monotone und beschränkte Folgen konvergieren.

8.4 ⋆ Aufgabe

1) Es sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ eine reelle Reihe. Es existiere eine Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, so dass $\forall k : 0 \leq b_k \leq a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ divergiert. Man zeige, dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ebenfalls divergiert.

2) Man finde ein Beispiel für eine nicht konvergente Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, wobei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen ist, so dass $\forall k \in \mathbb{N} : a_k \neq 0$, $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$.

8.5 ⋆ Aufgabe

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, und es gebe ein $0 \leq q < 1$ sowie ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q.$$

Man zeige, dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent ist. Falls aber gilt:

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$$

zeige man die Divergenz der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

8.6 $\star$ Aufgabe

Man entscheide und begründe, welche der folgenden Reihen konvergent sind:

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$,

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$ für $|x| < 1$,

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$.

Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte
zusammengeheftet und mit der entsprechenden Übungsgruppe versehen
am 08.12.10 in der Vorlesung ab.

9 06.12.10

9.1 Aufgabe

Gegeben sei eine reelle nichtnegative fallende Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Man zeige, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.
Mit Hilfe dieser Aussage untersuche man die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ in Abhängigkeit des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$.

9.2 $\star$ Aufgabe

Man untersuche, für welche Werte des Parameters $\alpha \in (0,2) \cup [4,\infty)$ die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+\alpha^k}{(3-\cos(k))^k}.$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\forall x \in \mathbb{R} : |\cos(x)| \leq 1$.

9.3 Aufgabe

Finden Sie die $K \in \mathbb{N}$, so dass für $|x| \leq 0,1$ gilt:

$$\left| \sin(x) - \sum_{k=0}^{K} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq 10^{-10}.$$

9.4 $\star$ Aufgabe

Man zeige, dass für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \quad \text{und} \quad \cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

gilt und folgere

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1.$$

Des Weiteren seien die Hyperbelfunktionen $\sinh(t)$, $\cosh(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ durch

$$\sinh(t) := \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) \quad \text{und} \quad \cosh(t) := \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right)$$

definiert. Man beweise für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\sin(it) = i\sinh(t) \quad \text{und} \quad \cos(it) = \cosh(t).$$

9.5 Aufgabe

Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die eine offene Menge M in eine Menge $f(M)$ abbildet, die nicht offen ist.

9.6 $\star$ Aufgabe

Man untersuche, in welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Funktionen $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind:

1) $f_1(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

2) $f_2(x) = e^{|x-1|}$

3) $f_3(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$

4) $f_4(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2} & , x \notin \mathbb{N} \\ \frac{4x-6}{x+1} & , x \in \mathbb{N}. \end{cases}$

9.7 $\star$ Aufgabe

Untersuchen Sie, in welchen Punkten die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 e^{x_1}, x_1 x_2 x_3);$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{\|(x_1, x_2)\|} & , (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & , (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

stetig sind.

Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte
zusammengeheftet und mit der entsprechenden Übungsgruppe versehen
am 15.12.10 in der Vorlesung ab.

10 13.12.10

10.1 $\star$ Aufgabe

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert als

$$z \mapsto \begin{cases} |\cos(\varphi)| & , z = re^{i\varphi} \neq 0 \\ 1 & , z = 0. \end{cases}$$

1) Ist f stetig in 0?

2) Ist die Einschränkung $f|_{\mathbb{R}}$ von f auf $\mathbb{R}$ stetig in 0?

10.2 $\star$ Aufgabe

Zeigen Sie, dass mit einer stetigen Funktion f auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$ auch die Funktionen

$$m(x) = \min_{a \leq t \leq x} f(t) \quad \text{und} \quad M(x) = \max_{a \leq t \leq x} f(t)$$

auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ stetig sind.

10.3 Aufgabe

Man zeige, dass eine monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzen kann.
Hinweis: Zuerst überlege man sich, welche Art von Unstetigkeitsstellen eine monotone Funktion überhaupt besitzen kann. Stets existieren nämlich „links-“ bzw. „rechtsseitige“ Grenzwerte von f.

10.4 $\star$ Aufgabe

Sei $-\infty < a < b < \infty$. Man beweise, dass eine in einem Intervall $[a, b]$ stetige und injektive Funktion streng monoton ist.

10.5 Aufgabe

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom ungeraden Grades

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

mit $n = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und $a_n \neq 0$. Man zeige, dass $f(x)$ wenigstens eine reelle Nullstelle hat.

10.6 $\star$ Aufgabe

1) Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig. Man zeige, dass die Fixpunktgleichung $f(x) = x$ eine Lösung $x \in [a, b]$ besitzt.

2) Geben Sie eine stetige Funktion $f : (a, b) \to (a, b)$ an, die keinen Fixpunkt besitzt.

3) Finden Sie eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass f keinen Fixpunkt besitzt.

10.7 $\star$ Aufgabe

Bernard verließgestern um $9 : 00$ Uhr sein Haus (B) und ging zu Andrea (A), wo er übernachtete. Heute um $9 : 00$ Uhr ist er auf dem gleichen Weg wieder nach Hause gegangen. Es existiert ein Punkt auf dem Weg, wo Bernhard um die gleiche Uhrzeit wie gestern vorbei geht. Warum?

10.8 Aufgabe

Gegeben sei die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Für alle $x_0 \in [a, b]$ existieren $\delta_{x_0} > 0, L_{x_0} > 0$, so dass für alle $x, y \in [a, b]$ gilt:

$$|x_0 - x| \leq \delta_{x_0},\ |x_0 - y| \leq \delta_{x_0} \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leq L_{x_0} |x - y| .$$

Man zeige, dass f auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ global Lipschitz-stetig ist:

$$\exists L > 0\ \forall x, y \in [a, b] :\ |f(x) - f(y)| \leq L |x - y| .$$

10.9 Aufgabe

Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitzkonstante $L < 1$. Man zeige:

1) Die Fixpunktgleichung

$$f(x) = x$$

hat genau eine Lösung $x \in [a, b]$.

2) Sei $x_0 \in [a, b]$ beliebig gewählt. Man zeige: Die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, die durch die Vorschift

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

gebildet wird, konvergiert gegen x, und es gilt:

$$|x_k - x| \leq \frac{|x_{k+1} - x_k|}{1 - L} \leq \frac{L^k}{1 - L} |x_1 - x_0| .$$

Hinweis: Man zeige zunächst die Beziehungen

$$\forall \xi, \eta \in [a, b] : \quad |\xi - \eta| \leq \frac{1}{1 - L} \left(|\xi - f(\xi)| + |\eta - f(\eta)| \right)$$

und

$$|x_{k+1} - x_k| \leq L^k |x_1 - x_0| .$$

Damit kann man zeigen, dass $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 12.01.11 in der Vorlesung ab.]

11 10.01.11

11.1 ⋆ Aufgabe

Gegeben seien Mengen X, Y sowie eine Abbildung $f : X \to Y$. Dann nennt man die Menge

$$G(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

den Graphen von f. Man zeige:

a) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine auf $\mathbb{R}$ stetige Funktion, so ist der Graph von f abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$.

b) Sei $-\infty < a < b < \infty$. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist auf $[a, b]$ genau dann stetig, wenn ihr Graph $G(f)$ kompakt ist.

11.2 Aufgabe

Die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ sei stetig, und es gelte $f(0) = f(1)$. Man zeige:
Dann existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{k}\right]$ mit

$$f(x) = f\left(x + \frac{1}{k}\right).$$

11.3 ⋆ Aufgabe

Sei $a > 0$ beliebig.

a) Man zeige, dass für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\log(a^x) = x \log a$.

b) Man zeige, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $(a^x)^y = a^{(xy)}$.

c) Der Logarithmus $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei als Umkehrfunktion von $\mathbb{R} \to (0, \infty), \quad x \mapsto a^x$ definiert. Man zeige, dass für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt: $\log_a(y) = \frac{\log(y)}{\log(a)}$.

11.4 ⋆ Aufgabe

Man berechne die Grenzwerte

a) $\lim_{x\to 0+} x^x$,

b) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} (\tan(x))^{\cos(x)}$,

c) $\lim_{x\to 1} (1 - x) \log\left(1 - x^3\right)$,

d) $\lim_{x\to 0} \frac{x \sin(x)}{2 \sin(2x^2)}$.

11.5 Aufgabe

Es seien $z = -1 + i$ und $w = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$. Man berechne

$$z + w, \quad zw, \quad z^{-1}, \quad w^{-1}, \quad \frac{z}{w}, \quad \frac{w}{z}$$

und stelle die Ergebnisse in der Form $x + iy$ und $re^{i\varphi}$ dar.

11.6 Aufgabe

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x = 0 \\ 0 & , x \neq 0. \end{cases}$$

Man zeige, dass f auf $[0,1]$ differenzierbar ist und somit f für alle $x_0 \in [0,1]$ einer punktweisen Lipschitzbedingung in x_0 genügt, d.h. für alle $x_0 \in [0,1]$ existieren $\delta_{x_0} > 0, L_{x_0} > 0$, so dass für alle $x \in [0,1]$ gilt

$$|x_0 - x| \leq \delta_{x_0} \quad \Rightarrow \quad |f(x_0) - f(x)| \leq L_{x_0} |x_0 - x|.$$

Man beweise, dass f auf $[0,1]$ nicht Lipschitz-stetig ist (vgl. Aufgabe 10.8).

11.7 ⋆ Aufgabe

Man berechne die Ableitungen folgender Funktionen auf $(0, \infty)$:

a) $f(x) = (x^x)^x$,

b) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$,

c) $f(x) = x^{\sin(x)}$,

d) $f(x) = \log(\log(1 + x))$.

Die mit ⋆ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 19.01.11 in der Vorlesung ab.

12 17.01.11

12.1 $\star$ Aufgabe

Berechnen Sie die Ableitungen von

$$\sqrt{\ } : (0,\infty) \to (0,\infty)\,, \quad \arccos : (-1,1) \to (0,\pi)\,, \quad \arcsin : (-1,1) \to \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

als die der Umkehrfunktionen der Quadrat-, Kosinus- bzw. Sinusfunktion.

12.2 $\star$ Aufgabe

Sei $a \in \mathbb{R}$. Man entwickle eine Formel für die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$ der Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{x}e^{-ax} + \frac{1}{x}$$

indem man mit *Maple* die ersten 6 Ableitungen berechnet. Beweisen Sie die Formel mit vollständiger Induktion.
Hinweis: Das Computeralgebrasystem *Maple* steht Ihnen mit ausreichenden Lizenzen auf den Rechnern im Universitätsrechenzentrum zur Verfügung. Benutzen Sie zur Einarbeitung in das Programm die Beispiel-Worksheets auf der Homepage von Prof. Grunau
http://www-ian.math.uni-magdeburg.de/home/grunau/additional.html
und die sehr gute *Maple*-Hilfe.
Geben Sie Ihre Berechnungen auf einem Ausdruck ab.

12.3 Aufgabe

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und

$$y(x) := y_m \pm \sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}$$

der obere bzw. unter Halbkreis mit Mittelpunkt (x_m, y_m) und Radius r. Man zeige, dass für alle x_0 mit $f''(x_0) \neq 0$ ein eindeutiger oberer bzw. unterer Halbkreis existiert, so dass gilt

$$y(x_0) = f(x_0)\,, \quad y'(x_0) = f'(x_0)\,, \quad y''(x_0) = f''(x_0)\,,$$

d.h. man zeige die folgenden Formeln:

$$x_m(x_0) = x_0 - f'(x_0)\frac{1 + f'(x_0)^2}{f''(x_0)}, \quad y_m(x_0) = f(x_0) + \frac{1 + f'(x_0)^2}{f''(x_0)}, \quad r(x_0) = \left|\frac{\left(1 + f(x_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)}\right|.$$

Man stelle die Funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ und die entsprechenden Halbkreisbögen in den Punkten $P_1 = (-1,5|f(-1,5))\,, P_2 = (0,5|f(0,5))$ in einem *Maple*-Plot dar.

12.4 Aufgabe (Regel von de l'Hospital)

Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ seien in einer Umgebung $U(x_0)$ von $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Ferner seien $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und $g'(x_0) \neq 0$ in $U(x_0)$. Man zeige, dass dann der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

12.5 $\star$ Aufgabe

Man prüfe die folgenden Funktionen auf Differenzierbarkeit und berechne, dort wo sie existiert, die Ableitung.

1) $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)\sqrt{|x|}$

2) $f(x) = \log\left(\frac{\sqrt{1+2x}-1}{\sqrt{1+2x}+1}\right) \quad , x > 0$

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , x = 0 \\ \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{e^x - 1} & , 0 < |x| < \frac{1}{2} \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , x = 0 \\ \arctan\left(x + \frac{1}{x^2}\right) & , x \neq 0 \end{cases}$

12.6 $\star$ Aufgabe

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in (a, b)$, $f : (a, b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f'(x)$ existiert. Man beweise, dass f in x_0 differenzierbar ist und $f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f'(x)$ gilt.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 26.01.11 in der Vorlesung ab.]

13 24.01.11

13.1 Aufgabe

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Man zeige, dass f streng monoton wächst genau dann, wenn für alle $x_0 \in (a, b)$ eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $x_k \to x_0$ mit $f'(x_k) > 0$ existiert.

13.2 Aufgabe (Konvexitätstest mit Tangentenkriterium)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Man beweise die folgenden Aussagen:

1) f ist genau dann konvex auf I, wenn für alle $a \in I$ die Tangente τ_a eine Stützgerade ist, d.h. für alle $a \in I$, $x \in I$ gilt die Ungleichung

$$f(x) \geq \tau_a(x) = f(a) + f'(a)(x - a). \tag{$*$}$$

   Die Tangente τ_a liegt also immer unterhalb des Graphen von f.

2) f ist genau dann streng konvex, wenn für alle $a \in I$, $x \in I \setminus \{a\}$ die strikte Ungleichung, d.h. $(*)$ mit „>“ gilt.

Hinweis: Man nutze aus, dass für f konvex und alle $x_1, x_2, a \in I$ mit $x_1 < a < x_2$

$$\frac{f(a) - f(x_1)}{a - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a}$$

gilt.

13.3 Aufgabe (Jensensche Ungleichung)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Man zeige, dass für je k Punkte $x_1, \ldots, x_k \in I$ und k positive Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$ die Ungleichung

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_k f(x_k)$$

gilt. Sei nun f streng konvex. Man beweise, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn alle x_i gleich sind.

13.4 Aufgabe

Man beweise, dass auf dem reellen Vektorraum

$$C^1([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R},\ f \text{ stetig differenzierbar}\}$$

durch

$$\|f\|_{C^1([a,b])} = \|f\|_{C^0([a,b])} + \|f'\|_{C^0([a,b])}$$

eine Norm gegeben wird.

13.5 Aufgabe

Man begründe, dass auch durch

$$|||f||| := \|f\|_{C^0([a,b])}$$

eine Norm auf $C^1([a, b])$ gegeben wird.
Man beweise, dass $\left(C^1([a, b]), |||.|||\right)$ im Gegensatz zu $\left(C^1([a, b]), \|.\|_{C^1([a,b])}\right)$ kein Banachraum ist.
Hinweis: Man betrachte die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf $[-1, 1]$ mit

$$f_k(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}}.$$

- Man zeige, dass jede der Funktionen f_k auf $[-1,1]$ stetig differenzierbar ist.
- Man untersuche die punktweise Konvergenz von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und berechne den Grenzwert f.
- Man zeige $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ gleichmäßig in $\left(C^0\left([-1,1]\right), \|.\|_{C^0([-1,1])}\right)$.
- Man nehme an, es existiert ein $\tilde{f} \in C^1\left([-1,1]\right)$, so dass $\lim_{k\to\infty} f_k = \tilde{f}$ gleichmäßig in $\left(C^1\left([-1,1]\right), |||.|||\right)$. Was folgt daraus?

13.6 Aufgabe

Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(z - z_0\right)^k,$$

wobei ein $k_0 \in \mathbb{N}_0$ existiert, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt:

$$a_k \neq 0 \text{ und } \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \rho \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \text{ existiert.}$$

Man zeige, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe dann gleich ρ ist (mit der Konvention $\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0$).

13.7 Aufgabe

Man berechne die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(1 + 3\left(-1\right)^k\right)^{-k} x^k$,

2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{2}{k}\right)}\right)} x^k$,

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} \left(x+1\right)^{2k}$.

14 02.02.11

14.1 Aufgabe

Die Potenzreihe $g(y) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^k$ besitze den Konvergenzradius $\rho_g > 0$, und für die Konvergenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ existiere ein positives ρ mit $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n < \rho_g$. Man zeige, dass dann die Funktion $h = g \circ f$ eine mindestens für $|x| \le \rho$ gültige Potenzreihenentwicklung $h(x) = g(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ besitzt.
Hinweis: Satz 8.18 und Satz 8.15.

14.2 Aufgabe

Die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ besitze den Konvergenzradius $\rho_f > 0$ und es sei $a_0 \neq 0$. Man zeige, dass für $\rho > 0$ mit $|a_1|\rho + |a_2|\rho^2 + |a_3|\rho^3 + \ldots < |a_0|$ die Funktion $\frac{1}{f}$ eine für alle $|x| \le \rho$ gültige Potenzreihenentwicklung $\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ besitzt.
Hinweis: Man wende die vorherige Aufgabe auf $g(y) = \frac{1}{a_0 + y} = \frac{1}{a_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{y}{a_0}\right)^n$
und $\tilde{f}(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ an.

14.3 Aufgabe

Für alle $x \in \mathbb{R}$ sei der Tangens hyperbolicus definiert durch $\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ (vgl. Aufgabe 9.4). Man zeige für die Umkehrfunktion artanh von tanh, dass für alle $|x| < 1$ gilt:

$$\operatorname{artanh}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Man beweise die folgenden Formeln für den Areasinus hyperbolicus und Areacosinus hyperbolicus als Umkehrfunktionen von sinh bzw. cosh:

$$|x| < \infty: \ \operatorname{arsinh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad x \ge 1: \ \operatorname{arcosh}(x) = \pm \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

14.4 Aufgabe

Man gebe Bedingungen an die Folge $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$, sodass $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

i) wohldefiniert ii) stetig iii) stetig differenzierbar

ist.

14.5 Aufgabe

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & , x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ relativ prim} \\ 0 & , x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Man entscheide, ob die Funktion f im Intervall $[0, 1]$ Riemann-integrierbar ist. Berechnen Sie ggfs. $\int_0^1 f(x)\, dx$.

14.6 Aufgabe

Gegeben sei eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Man zeige, dass bezüglich einer beliebigen Zerlegung Z von $[a,b]$

$$S_*(f,Z) = -S^*(-f,Z)$$

gilt und folgere daraus:

$$\int_{*a}^{b} f(x)\,dx = -\int_{a}^{*b} (-f(x))\,dx.$$

14.7 Aufgabe

Gegeben seien zwei beschränkte Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Man zeige, dass

$$\int_{a}^{*b} (f+g)(x)\,dx \leq \int_{a}^{*b} f(x)\,dx + \int_{a}^{*b} g(x)\,dx.$$

Man benutze die vorhergehende Aufgabe, um daraus zu folgern:

$$\int_{*a}^{b} (f+g)(x)\,dx \geq \int_{*a}^{b} f(x)\,dx + \int_{*a}^{b} g(x)\,dx.$$

Falls f und g Riemann-integrierbar sind, folgere man daraus

$$\int_{a}^{b} (f+g)(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \int_{a}^{b} g(x)\,dx.$$

14.8 Aufgabe

Es sei $a < c < b$ und die Funktion f sei in $[a,b]$ beschränkt. Man zeige, dass die Relation

$$\int_{a}^{*b} f(x)\,dx = \int_{a}^{*c} f(x)\,dx + \int_{c}^{*b} f(x)\,dx$$

gültig ist.

14.9 Aufgabe

Seien $f(x) = \frac{1}{x}$ und $\varepsilon > 0$.

1) Ist f in $[\varepsilon, 1]$ intergrierbar?

2) Sei $k \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon = \frac{1}{k}$. Man zerlege $\left[\frac{1}{k}, 1\right] = \bigcup_{h=1}^{k-1} \left[\frac{1}{h+1}, \frac{1}{h}\right]$ und gebe eine Formel für die Untersumme $S_*(Z_k, f)$ bezüglich der Zerlegung Z_k an.

3) Was lässt sich aus dem Verhalten der Untersummen für $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 f(x)\,dx$ folgern?

14.10 Aufgabe

Man entscheide durch Betrachtung von Ober- und Untersummen, ob $x \mapsto x$ auf $[0,b]$ integrierbar ist und bestimme ggfs. $\int_0^b x\,dx$.
Hinweis. Man verwende für $k \in \mathbb{N}$ die äquidistante Zerlegung $x_j = \frac{jb}{k}$, $j \in \{0, \ldots, k\}$.