Analysis II – Sommersemester 2011

Prof. H.-Ch. Grunau, Dipl.-Math. L. Pulst

1 06.04.11

1.1 ⋆ Aufgabe

1) Man konstruiere eine Funktion auf einem beschränkten Intervall, die stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

2) Man untersuche ob der Logarithmus log auf $[1, \infty)$ gleichmäßig stetig ist.

3) Die Funktion f sei auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Man zeige, dass f höchstens wie eine lineare Funktion wächst, das heißt, dass eine Konstante $L > 0$ existiert, so dass $|f(x)| \leq L(1 + |x|)$ in $\mathbb{R}$ gilt.

1.2 ⋆ Aufgabe

Sei $-\infty < a < b < \infty$. Eine Funktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es eine Zerlegung $Z: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$ des Intervalls $[a, b]$ und Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_j & , x \in (x_{j-1}, x_j) \ \ (1 \leq j \leq k) \\ y_j \in \mathbb{R} \text{ beliebig} & , x = x_j \ \ (0 \leq j \leq k). \end{cases}$$

Sei f auf $[a, b]$ stetig. Man beweise, dass dann eine Folge von Treppenfunktionen $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert, die gleichmäßig in $[a, b]$ gegen f konvergiert.

1.3 ⋆ Aufgabe

Man überprüfe ob

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x > 0 \end{cases}$$

auf $[0, 1]$ integrierbar ist.

1.4 ⋆ Aufgabe

Sei $-\infty < a < b < \infty$, $f : [a, b] \to [0, \infty)$ eine stetige, nichtnegative Funktion. Es gebe ein $x_0 \in [a, b]$ so, dass $f(x_0) > 0$. Man zeige, dass dann

$$\int_a^b f(x)\, dx > 0.$$

[Die mit ⋆ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 13.04.11 in der Vorlesung ab.]

Analysis II – Sommersemester 2011

Prof. H.-Ch. Grunau, Dipl.-Math. L. Pulst

2 13.04.11

2.1 ⋆ Aufgabe

Man beweise den erweiterten Mittelwertsatz:
Gegeben seien die Riemann-integrierbaren Funktionen $f, p : [a, b] \to \mathbb{R}$. Es gelte $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$, und die Funktion p sei nichtnegativ: $\forall x \in [a, b] : \ p(x) \geq 0$. Dann ist

$$m \int_a^b p(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, p(x)\, dx \leq M \int_a^b p(x)\, dx.$$

Bei stetigem f gibt es also ein $\xi \in [a, b]$ mit $\int_a^b f(x)\, p(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b p(x)\, dx$.

2.2 Aufgabe

Die Funktion f sei stetig und streng monoton wachsend in $[a, b]$. Man beweise die Beziehung

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\, dx = bf(b) - af(a)\,.$$

2.3 ⋆ Aufgabe

Es sei $a > 0$, und die Funktion f sei definiert in $[-a, a]$. Ferner sei f Riemann-integrierbar in $[0, a]$. Beweisen Sie:

1) Ist die Funktion f gerade, d.h. ist $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in [0, a]$, so ist f Riemann-integrierbar in $[-a, a]$, und es gilt
$$\int_{-a}^a f(x)\, dx = 2 \int_0^a f(x)\, dx.$$

2) Ist die Funktion f ungerade, d.h. ist $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in [0, a]$, so ist f Riemann-integrierbar in $[-a, a]$, und es gilt
$$\int_{-a}^a f(x)\, dx = 0.$$

Sei nun f definiert auf ganz $\mathbb{R}$ und periodisch mit der Periode $p > 0$, d.h. es gilt $f(x + p) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ferner sei f Riemann-integrierbar in $[0, p]$. Beweisen Sie:

3) f ist in jedem Intervall $[a, b]$ Riemann-integrierbar und für jedes $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^p f(x)\, dx = \int_c^{c+p} f(x)\, dx.$$

2.4 Aufgabe

Die Funktion f sei stetig in $[a, b]$. Man zeige:

$$\lim_{p\to\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|\,.$$

2.5 Aufgabe

Satz 14.21 (Linearität des Riemann-Integrals) aus der Vorlesung zeigt, dass die Menge aller über dem Intervall $[a, b]$ Riemann-integrierbaren Funktionen, bezeichnet mit $R([a, b])$, ein reeller Vektorraum ist. Man zeige, dass $R([a, b])$ unendlichdimensional ist.

Hinweis: Man konstruiere unendlich viele Funktionen in $R([a, b])$, die linear unabhängig sind.
Erinnerung: Sei $\mathcal{O}$ die Nullfunktion $x \mapsto 0$. Eine Menge $(\varphi_l)_{l \in I}$, $I = \{1, \ldots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$ von Funktionen $\varphi_l : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt linear unabhängig, falls für alle $x \in [a, b]$ und $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ gilt:

$$0 = \mathcal{O}(x) = \sum_{l=1}^{k} a_l \varphi_l(x) \quad \Rightarrow \quad a_1 = \ldots = a_k = 0.$$

2.6 ⋆ Aufgabe

Es sei $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen, mit der Eigenschaft dass für alle $\varepsilon > 0$ ein Intervall $I \subset [a, b]$ mit $|I| < \varepsilon$ existiert, so dass die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[a, b] \setminus I$ konvergiert. Außerdem sei die Funktionenfolge gleichmäßig beschränkt, d.h. es existiert ein $M > 0, k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt: $\forall x \in [a, b] : |f_k(x)| \leq M$. Man zeige, dass die Grenzfunktion f dann ebenfalls Riemann-integriebar ist, und gilt:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{k \to \infty} \int_a^b f_k(x)\, dx.$$

2.7 ⋆ Aufgabe

Man betrachte die Funktionen aus Beispiel 13.2:

$$k \in \mathbb{N}: \quad f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \begin{cases} 0 & , |x| \geq \frac{1}{k}; \\ 1 - k|x| & , |x| \leq \frac{1}{k}. \end{cases}$$

Man zeige:

$$\lim_{k \to \infty} \int_{-1}^{1} f_k(x)\, dx = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 0,$$

wobei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & , x \neq 0; \\ 1 & , x = 0. \end{cases}$$

[Die mit ⋆ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 20.04.11 in der Vorlesung ab.]

Analysis II – Sommersemester 2011

Prof. H.-Ch. Grunau, Dipl.-Math. L. Pulst

3 20.04.11

3.1 ⋆ Aufgabe

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar in $[0, 2\pi]$.

1) Man berechne, für $k, \ell \in \mathbb{N}_0$:

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(\ell x)\,dx, \qquad \int_0^{2\pi} \sin(kx)\cos(\ell x)\,dx, \qquad \int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(\ell x)\,dx.$$

2) Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Man untersuche, für welche Werte von a bzw. b die folgenden Ausdrücke minimal werden:

$$\int_0^{2\pi} \left(f(x) - a\cos(kx)\right)^2 dx \qquad \int_0^{2\pi} \left(f(x) - b\sin(kx)\right)^2 dx.$$

3.2 ⋆ Aufgabe

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $x \in [a, b]$. Man zeige, dass

$$\int_a^x \left(\int_a^y f(\xi)\,d\xi \right) dy = \int_a^x (x - y)\, f(y)\,dy.$$

Hinweis: Partielle Integration.

3.3 ⋆ Aufgabe

Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale:

1) $\displaystyle\int \frac{-x^3 - x^2 + 6x - 2}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}dx,$

   Ansatz: $\displaystyle\frac{-x^3 - x^2 + 6x - 2}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1} = \frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x+1}$

2) $\displaystyle\int \sqrt{1 + x^2}\,dx.$

   Hinweis: Man ersetze $x = \varphi(t) := \sinh(t) := \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)$ und siehe Beispiel 15.8.

[Die mit ⋆ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 27.04.11 in der Vorlesung ab.]

Analysis II – Sommersemester 2011

Prof. H.-Ch. Grunau, Dipl.-Math. L. Pulst

4 27.04.11

4.1 ⋆ Aufgabe

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion. Seien $g = \operatorname{Re} f$ und $h = \operatorname{Im} f$ über $[a, b]$ integrierbar, so definiert man f als integrierbar und setzt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (g(x) + ih(x))\,dx := \int_a^b g(x)\,dx + i\int_a^b h(x)\,dx.$$

Mit Hilfe der reellen Integration beweise man, dass

$$\int_a^b e^{it} dt = -ie^{ib} + ie^{ia}.$$

4.2 ⋆ Aufgabe

Für welche $\alpha > 0$ existiert

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\,|\log(x)|^\alpha} dx \qquad \text{bzw.} \qquad \int_2^{\infty} \frac{1}{x\,|\log(x)|^\alpha} dx$$

als uneigentliches Riemann-Integral? Bestimmen Sie ggfs. die Integralwerte.

4.3 ⋆ Aufgabe

Man zeige, dass

$$\int_1^\infty \sin\left(x^2\right) dx$$

als uneigentliches Riemann-Integral existiert.

4.4 ⋆ Aufgabe

Die Funktionen $f_k(x)$ und $g(x)$ seien integrierbar über $[a, c]$ für jedes $c > a$. Ferner seien $|f_k(x)| \leq g(x)$ für alle k und $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergent. Außerdem sei $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ gleichmäßig in jedem Intervall $[a, c]$. Man zeige die Existenz und die Gleichheit der folgenden Integrale

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^\infty f_k(x)\,dx.$$

[Die mit ⋆ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 04.05.11 in der Vorlesung ab.]

Analysis II – Sommersemester 2011

Prof. H.-Ch. Grunau, Dipl.-Math. L. Pulst

5 04.05.11

5.1 ⋆ Aufgabe

Man bestimme für $f(x) = \arctan(x)$ das Taylorpolynom dritten Grades im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und berechne eine Näherung für $f(0.1)$. Man zeige, dass der Fehler kleiner als 10^{-5} ist.

5.2 ⋆ Aufgabe

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0. \end{cases}$$

Man zeige, dass f beliebig oft differenzierbar ist und dass gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \qquad f^{(k)}(0) = 0.$$

Also ist die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt 0 in ganz $\mathbb{R}$ konvergent

$$\forall x \in \mathbb{R} : \qquad T(x, 0) = 0$$

und für $x > 0$ von $f(x)$ verschieden.
Hinweis: Man zeige induktiv, dass es Polynome P_k vom Grade $\leq 2k$ gibt, so dass für $x > 0$ gilt:

$$f^{(k)}(x) = e^{\left(-\frac{1}{x}\right)} P_k\left(\frac{1}{x}\right).$$

5.3 Aufgabe

1) Man konstruiere zu zwei beliebigen reellen Zahlen a, b mit $a < b$ eine Funktion $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit den Eigenschaften

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq a \\ \text{monoton wachsend} & , a < x < b \\ 1 & , x \geq b. \end{cases}$$

Hinweis: Man betrachte eine Stammfunktion zu $h(x) = f(x-a) f(b-x)$, wobei f die Funktion von Aufgabe 5.2 ist.

2) Es seien a, b mit $a < b$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Man konstruiere eine Funktion $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit den Eigenschaften

$$\forall x \in [a, b] : \quad h(x) = 1, \qquad \forall x \notin (a - \varepsilon, b + \varepsilon) : \quad h(x) = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R} : \quad 0 \leq h(x) \leq 1.$$

3) Es sei $f \in C^n([a, b])$, $n \in \mathbb{N}$. Man konstruiere eine Fortsetzung g von f auf $\mathbb{R}$ von der Klasse $C^n(\mathbb{R})$, so dass für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ g außerhalb von $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ verschwindet.

   Hinweis: Zur Fortsetzung kann man zunächst die Taylorpolynome $T_n(x; a)$ bzw. $T_n(x; b)$ benutzen und dann mit einer geeigneten Funktion multiplizieren.

5.4 Aufgabe

Man zeige, dass für alle $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\left(\cos^3 t, \sin^3 t\right)$$

stetig differenzierbar ist, die Kurve $\gamma : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \left(\cos^3 t, \sin^3 t\right)$ aber nicht regulär. Man gebe die Intervalle an, in denen sie regulär ist und stelle die Kurve in diesen Intervallen als Graphen, d.h. in der Form $s \mapsto (s, \varphi(s))$, dar.

5.5 $\star$ Aufgabe

Man berechne die Länge der folgenden Kurven

(1) *Asteroide*: $a \in \mathbb{R}_+ : \quad \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = \left(a\cos^3 t, a\sin^3 t\right)$

(2) *Zykloide*: $\gamma_2 : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$

5.6 $\star$ Aufgabe

Gegeben sei eine glatte reguläre Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ der Länge L. Für $t \in [a, b]$ sei

$$s(t) = \int_a^t \left\|\gamma'(\tau)\right\| d\tau.$$

(1) Man beweise, dass die Abbildung $s : [a, b] \to [0, L]$ differenzierbar und invertierbar ist und man bestimme die Ableitung der inversen Funktion $t = t(s)$.

Der Parameter s heißt *Bogenlänge* von γ.

(2) Man zeige, dass die durch $s \mapsto \alpha(s) := \gamma(t(s))$ beschriebene Kurve durch die Bogenlänge parametrisiert ist, d.h. dass für $\ell \in [0, L]$ gilt:

$$\ell = \int_0^\ell \left\|\alpha'(s)\right\| ds.$$

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 11.05.11 in der Vorlesung ab.]

Analysis II – Sommersemester 2011

Prof. H.-Ch. Grunau, Dipl.-Math. L. Pulst

6 11.05.11

6.1 ⋆ Aufgabe

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine glatte reguläre Kurve, weiter sei $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ bijektiv und stetig differenzierbar und für alle $s \in [\alpha, \beta] : \ \varphi'(s) \neq 0$. Dann ist $\omega = \gamma \circ \varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ eine Umparametrisierung der Kurve $\gamma|_{[a,b]}$. Man zeige, dass

$$\int_\gamma f(x)\, ds(x) = \int_\omega f(x)\, ds(x).$$

6.2 Aufgabe

Man zeige, dass die Menge $\overline{B_1}(0) = \left\{ f \in C^0([0,\pi]), \|f\|_{C^0([0,\pi])} \leq 1 \right\} \subset C^0([0,\pi])$ nicht folgenkompakt ist.
Hinweis: Man betrachte für $k \in \mathbb{N}$ die Funktionenfolge $e_k : [0,\pi] \to \mathbb{C}, \ e_k(x) = e^{ikx}$.

6.3 Aufgabe

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und seien $f : K \to \mathbb{R}, f_k : K \to \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{N}$, stetige Funktionen mit

$$f_0 \leq f_1 \leq \ldots \leq f_k \leq f_{k+1} \leq \ldots.$$

Falls für alle $x \in K$ $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ gilt, zeige man, dass die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f in K konvergiert.
Hinweis: Man überlege sich, dass folgendes gilt:
$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in K \ \exists k_0(x) \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0(x) : |f(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ und es existiert ein $\delta(x) > 0 :$ $\left|f_{k_0(x)}(x) - f_{k_0(x)}(y)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $y \in K$ mit $\|y - x\| < \delta(x)$. Man betrachte $f - f_k$ und für alle $x \in K$ die Überdeckung $U_x := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \delta(x)\}$ von K.

6.4 ⋆ Aufgabe

Sei K eine kompakte Teilmenge eines normierten Vektorraumes V und $(O_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von K. Man zeige:
Es gibt eine Zahl $\lambda > 0$ mit folgender Eigenschaft: Zu jeder Teilmenge $A \subset K$ mit $\operatorname{diam}(A) \leq \lambda$ existiert ein $j_0 \in J$ mit $A \subset O_{j_0}$.

6.5 ⋆ Aufgabe

Diese Aufgabe sollen sie **allein** mit der Überdeckungskompaktheit und ohne den Satz von Heine-Borel (18.2) lösen.
Seien V, W normierte Vektorräume, und $K \subset V$ kompakt.

1) Sei $A \subset K$ eine abgeschlossene Teilmenge. Man beweise, dass dann A überdeckungskompakt ist.

2) Sei $f : V \to W$ eine stetige Abbildung. Man zeige, dass $f(K) \subset W$ kompakt ist.

6.6 Aufgabe

Man beweise durch Betrachtung der Definition 19.7, dass die Funktion

1)
$$f(x, y) = |x| \log(1 + y)$$
in $(0, 0)$ differenzierbar ist;

2)
$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 (y - 1)}$$
in $(0, 1)$ nicht differenzierbar ist.

6.7 $\star$ Aufgabe

Man berechne für $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Hessesche Matrix von $f(x, y, z) = x^y(1 + z)$.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 18.05.11 in der **Linearen Algebra** Vorlesung ab.]

Analysis II – Sommersemester 2011

Prof. H.-Ch. Grunau, Dipl.-Math. L. Pulst

7 18.05.11

7.1 ⋆ Aufgabe

Es sei $x \in \mathbb{R}^n$, $r = \|x\|_2$ und $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar sowie radialsymmetrisch, d.h. es existiert ein $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ so dass

$$u = f \circ r.$$

Man berechne Δu für die Funktionen

1) $f(r) = r^\alpha$;
2) $f(r) = \frac{1}{r} e^{\alpha r}$;
3) $f(r) = \frac{1}{r} \cos(\alpha r)$;

wobei $\alpha \neq 0$ ist, und gebe alle Fälle an, in denen u einer Differentialgleichung $\Delta u = \lambda u$ mit einem geeigneten $\lambda \in \mathbb{R}$ genügt.

7.2 Aufgabe

Gegeben seien eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so, dass $A^t A = E$ (Drehung oder Drehspiegelung). Sei $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert gemäß$v(x) := u(Ax)$. Man zeige, dass dann

$$\Delta v(x) = (\Delta u)(Ax);$$

das heißt insbesondere, dass der Laplace-Operator rotationsinvariant ist.

7.3 ⋆ Aufgabe

Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Mit Hilfe der Polarkoordinatenabbildung

$$p : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad p(r, \varphi) := (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$$

bilde man $v := u \circ p$ und zeige, dass für alle $(x, y) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)), r \neq 0$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}(r, \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}(r, \varphi) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \Delta u(x, y)$$

gilt.

7.4 Aufgabe

Gegeben sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Es gelte für $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Wellengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = 0.$$

Man bestimme die Form der allgemeinen Lösung der Wellengleichung und finde eine Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, die sowohl die Wellengleichung, als auch

$$\begin{cases} u(x, 0) = e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

erfüllt.
Hinweis: Man benutze die Variablentransformation

$$\xi = t + x, \qquad \eta = t - x, \qquad v(\xi,\eta) := u(t,x) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right).$$

Man zeige, dass $v(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)$ mit geeigneten Funktionen $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ gilt.

7.5 ⋆ Aufgabe

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *positiv-homogen* vom Grade $k \in \mathbb{N}_0$, wenn $f(tx) = t^k f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ gilt. Man zeige:

1) Jede positiv-homogene Funktion genügt in allen Punkten, in denen sie differenzierbar ist, der Differentialgleichung
$$\langle \nabla f(x), x\rangle = kf(x).$$

2) Eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ erfüllt genau dann $\langle \nabla f(x), x\rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, wenn f auf allen vom Nullpunkt ausgehenden Strahlen konstant ist.

7.6 Aufgabe

Sei $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $F(x) = \frac{1}{x_1^2+x_2^2}\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

⋆ 1) Man berechne $\operatorname{rot} F(x)$.

⋆ 2) Auf $\left\{x \in \mathbb{R}^3, x_1 \neq 0\right\}$ berechne man $\operatorname{grad}\left(\arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right)$ und auf $\left\{x \in \mathbb{R}^3, x_2 \neq 0\right\}$ berechne man $\operatorname{grad}\left(-\arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\right)$.

⋆ 3) Man berechne für $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) := (\cos(t), \sin(t), 0)$
$$\int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt.$$

4) Sei $G := \mathbb{R}^3 \setminus \left(\left\{x \in \mathbb{R}^3, x_1 = x_2 = 0\right\}\right)$. Existiert ein $\psi : G \to \mathbb{R}$, so dass
$$\forall x \in G: \ \operatorname{grad}\psi(x) = F(x)\ ?$$

Hinweis: Sei $\gamma : [a,b] \to G$ eine glatte, reguläre und auf $[a,b)$ injektive Kurve. Man nehme an, es existiert ein ψ mit $\operatorname{grad}\psi = F$ und zeige mit Hilfe der Kettenregel:
$$\int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = \psi(\gamma(b)) - \psi(\gamma(a)).$$

[Die mit ⋆ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 25.05.11 in der Vorlesung ab.]

Analysis II – Sommersemester 2011

Prof. H.-Ch. Grunau, Dipl.-Math. L. Pulst

8 25.05.11

8.1 Aufgabe

Für die reellwertige Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ gelte $\operatorname{grad} f(x) = \lambda(x)\, x$ mit einer reellwertigen Funktion λ. Man zeige, dass f nur von $r = \|x\|_2$ abhängt, d.h. auf jeder Sphäre $S_r := \{x, \|x\|_2 = r\}$ konstant ist.
Hinweis: Man zeige zuerst, dass man zwei Punkte $a, b \in S_r$ durch eine C^1-Funktion $\phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ mit $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$, $\|\phi(t)\|_2 = r$ verbinden kann (durch eine orthogonale Transformation lassen sich a, b in die (x_1, x_2)-Ebene bringen) und betrachte dann die Funktion $f(\phi(t))$.

8.2 $\star$ Aufgabe

Man bestimme das globale Minimum und Maximum von $f(x, y) = x^3 + 2x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2$ in $[-1, 1]^2$.

8.3 Aufgabe

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x^{(0)} \in G$ ein lokales Maximum von f. Man zeige, dass dann $\operatorname{Hess} f\left(x^{(0)}\right)$ negativ semidefinit ist.

8.4 Aufgabe

Gegeben seien ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

(1) Man zeige: Falls $-\Delta u < 0$ in Ω gilt, dann besitzt u kein lokales Maximum in Ω. Insbesondere gilt:
$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$
Hinweis: Aufgabe 8.3

(2) Nun gelte lediglich $-\Delta u \leq 0$ in Ω. Zeigen Sie, dass auch unter dieser Voraussetzung gilt:
$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$
Hinweis: Betrachten Sie für geeignetes R und $\varepsilon > 0$ die Funktionen $u_\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon\left(R^2 - \|x\|^2\right)$.

8.5 $\star$ Aufgabe

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f : G \to \mathbb{R}$. f heißt konvex, falls für je zwei Punkte $x_0, x_1 \in G$, $x_0 \neq x_1$ und für $t \in [0, 1]$ gilt:
$$f(tx_0 + (1-t)x_1) \leq tf(x_0) + (1-t)f(x_1).$$
Sei nun f zweimal stetig differenzierbar. Man zeige, dass f genau dann konvex ist, wenn $\operatorname{Hess} f(x)$ für alle $x \in G$ positiv semidefinit ist.

8.6 Aufgabe

Gegeben seien eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, ein Punkt $\xi \in U$ und eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$. Es gelte für $x \in U \setminus \{\xi\}$:

$$\langle (x - \xi), \nabla f(x) \rangle > 0 \quad \text{bzw.} \quad < 0.$$

Man zeige, dass f an der Stelle ξ ein lokales Minimum bzw. ein lokales Maximum besitzt.

8.7 $\star$ Aufgabe

1) Sei $f \in C^n([a,b], \mathbb{R})$. Für ein $x_0 \in (a,b)$ gelte $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{n-1}(x_0) = 0$, aber $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Man zeige:

   a) Ist n ungerade, dann hat f in x_0 kein lokales Extremum.

   b) Ist n gerade, dann besitzt f in x_0 ein Maximum bzw. Minimum, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$ bzw. $f^{(n)}(x_0) > 0$.

2) Man zeige, dass $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3x^2y - y^3$ in $(0,0)$ kein lokales Extremum besitzt.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 01.06.11 in der Vorlesung ab.]

Analysis II – Sommersemester 2011

Prof. H.-Ch. Grunau, Dipl.-Math. L. Pulst

9 01.06.11

9.1 ⋆ Aufgabe

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2(1-x^2) - y^2$$

und die Menge

$$M := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x,y) = 0\right\}.$$

Erzeugen Sie zunächst (z.B. mit Hilfe von *Maple*) einen Plot von M. Man bestimme, für welche $(x,y) \in M$ man den Satz von der impliziten Funktion benutzen kann, um M lokal als Graph über der x-Achse bzw. über der y-Achse zu beschreiben. Bestimmen Sie die Graphen.

9.2 Bemerkung

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^k, 1 \le k < n$ sei stetig differenzierbar, wir betrachten

$$N := \{x \in U : f(x) = 0\}.$$

Für alle $x \in N$ gelte: Rang $\frac{\partial}{\partial x} f(x) = k$. Sei $x^{(0)} \in N$ und die Variablen so nummeriert, dass mit $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ gilt: $\frac{\partial f}{\partial x''}\left(x^{(0)}\right)$ ist regulär. Gemäßdem dem Satz von der impliziten Funktion existiert eine Umgebung $U' \times U''$ von $x^{(0)}$ und eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\mathbb{R}^{n-k} \supset U' \ni x' \mapsto g\left(x'\right) \in U'' \subset \mathbb{R}^k$$

mit

$$\left(U' \times U''\right) \cap N = \left\{\left(x', g\left(x'\right)\right) : x' \in U'\right\}.$$

Eine Tangentialebene an die *Untermannigfaltigkeit* N in $x^{(0)}$ ist dann durch

$$\text{Bild}\left(\frac{\partial\left(x', g\left(x'\right)\right)}{\partial\left(x', x''\right)}\left(x^{(0)}\right)\right)$$

gegeben.

9.3 Aufgabe

Man zeige, dass

$$M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + 2x + e^y + y - 2z^3 = 0\right\}$$

in einer Umgebung von $P = (-1,0,0)$ eine Fläche darstellt, die durch einen stetig differenzierbaren Graphen der Form $y = g(x,z)$ beschrieben wird. Man bestimme die Gleichung der Tangentialebene an diesen Graphen (d.h. an die glatte Fläche) in P.

9.4 Aufgabe

Sei (x_0, y_0, z_0) ein Punkt auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^2$ des $\mathbb{R}^3$, d.h.

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1.$$

Man gebe die Gleichung der Tangentialebene in (x_0, y_0, z_0) an.

9.5 $\star$ Aufgabe

Gegeben seien die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = \sinh(z - 1) - e^x + e^y + xz - y$$

und die Menge

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ f(x, y, z) = 0\right\}.$$

1) Man beweise, dass es offene Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(0, 0)$ und $V \subset \mathbb{R}$ von 1 und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to V$ gibt, so dass gilt: $(x, y, z) \in M \cap (U \times V) \iff z = g(x, y)$.

2) Man bestimme das Taylorpolynom zweiter Ordnung von $g(x, y)$ mit Entwicklungspunkt $(0, 0)$.

   Hinweis: Man leite $0 \equiv f(x, y, g(x, y))$ bzgl. x und y ab.

9.6 $\star$ Aufgabe

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = (x + y + z)^2.$$

Man bestimme die Extrema von f unter der Nebenbedingung

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1.$$

9.7 Aufgabe

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}$ und $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ die Determinantenfunktion. Man identifiziere $\mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$ und die Determinantenfunktion für $k \in \{1, \dots, n\}$ als

$$f : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}, \quad f(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{k+\ell} a_{k\ell} d_{k\ell}$$

wobei für $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$ die Cofaktoren $d_{k\ell}$ definiert sind als die Determinanten derjenigen Untermatrizen von A, die durch Streichen der k-ten Zeile und ℓ-ten Spalte entstehen. Sei die Menge

$$M := \left\{a \in \mathbb{R}^{n^2} : f(a) = 0\right\}$$

definiert als die Nullstellenmenge von f. Man zeige, dass für alle $a \in M$ gilt:

$$\nabla f(a) = 0 \quad \text{falls für die zugehörige Matrix } A \text{ gilt: } \operatorname{Rang} A < n - 1$$

und

$$\nabla f(a) \neq 0 \quad \text{falls für die zugehörige Matrix } A \text{ gilt: } \operatorname{Rang} A = n - 1.$$

Hinweis: Sie dürfen für die Adjunkte $\operatorname{ad} A := \left(\left((-1)^{k+\ell} d_{k\ell}\right)_{k,\ell=1,\dots,n}\right)^T$ der Matrix A benutzen:

$$\operatorname{Rang} A < n - 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Rang}(\operatorname{ad} A) = 0; \quad \operatorname{Rang} A = n - 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Rang}(\operatorname{ad} A) = 1.$$

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 08.06.11 in der Vorlesung ab.]

Analysis II – Sommersemester 2011

Prof. H.-Ch. Grunau, Dipl.-Math. L. Pulst

10 08.06.11

10.1 ⋆ Aufgabe

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $h = (h_1, \ldots, h_k) : U \to \mathbb{R}^k$, $1 \leq k < n$ sei stetig differenzierbar; wir betrachten:

$$N := \{x \in U : h(x) = 0\}.$$

Für alle $x \in N$ gelte:

$$\text{Rang} \frac{\partial h}{\partial x}(x) = k.$$

Man beweise, dass $\nabla h_1\big(x^{(0)}\big), \ldots, \nabla h_k\big(x^{(0)}\big)$ das Orthogonalkomplement des Tangentialraums an N in $x^{(0)} \in N$ aufspannen.
Hinweis: Bemerkung 9.2 auf Blatt 9.

10.2 ⋆ Aufgabe

Gegeben sei eine nichtnegative stetige Funktion $f : [0, a] \to \mathbb{R}$. Man zeige, dass

$$\int_0^a f(x_1) \int_0^{x_1} f(x_2) \ldots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \frac{1}{n!} \left(\int_0^a f(\xi)\, d\xi \right)^n.$$

Hinweis: Induktion.

10.3 ⋆ Aufgabe

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$ und $f : I \times I \to \mathbb{R}$, $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ eine stetige, nach der zweiten Variable stetig partiell differenzierbare Funktion. Man zeige, dass die durch

$$F(y) = \int_a^y f(x, y)\, dx$$

definierte Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und dass für alle $y \in I$ gilt

$$F'(y) = f(y, y) + \int_a^y f_y(x, y)\, dx.$$

Hinweis: Man beweise, dass die durch

$$G(y, z) = \int_a^z f(x, y)\, dx$$

definierte Funktion $G : I \times I \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar ist und wende die Kettenregel an.

10.4 ⋆ Aufgabe

Gegeben sei die Gammafunktion $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$. Man zeige, dass $\Gamma(x) \in C^\infty(0, \infty)$ und

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty e^{-t} (\log t)^k t^{x-1} dt.$$

10.5 Aufgabe

Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $f : [0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; man betrachte die eindimensionale Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = f(t,x) & ,t \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = 0 & ,x \in \mathbb{R} \\ u_t(0,x) = 0 & ,x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Man zeige, dass dieses Problem höchstens eine Lösung $u \in C^2\left([0,\infty)\times\mathbb{R}\right)$ besitzt.

Hinweis: Seien $u, v \in C^2\left([0,\infty)\times\mathbb{R}\right)$ Lösungen von (1), man betrachte $w := u - v$. Sei $R > 0$ beliebig, aber fest. Für $0 \leq t < R$ betrachte man

$$e(t) := \int_{-R+t}^{R-t} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}(t,x) \right)^2 \right) dx$$

und berechne $e'(t)$.

(b) Man zeige, dass die Lösung $u(t,x)$ des Problems (1) gegeben ist durch

$$u(t,x) = \frac{1}{2} \int_0^t \left(\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi \right) d\tau.$$

10.6 Aufgabe

Man berechne das Volumen der vierdimensionalen Halbkugel analog zu Beispiel 22.8.

$\left[\begin{array}{l}\text{Die mit } \star \text{ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.} \\ \text{Die Lösungen geben Sie bitte am 15.06.11 in der Vorlesung ab.}\end{array}\right]$

Analysis II – Sommersemester 2011

Prof. H.-Ch. Grunau, Dipl.-Math. L. Pulst

11 15.06.11

11.1 ⋆ Aufgabe

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ konvex, das Vektorfeld $F : G \to \mathbb{R}^3$ sei stetig differenzierbar, und es gelte:

$$\forall x \in G : \qquad \operatorname{div} F(x) = 0.$$

Man beweise, dass dann ein zweimal stetig differenzierbares $A : G \to \mathbb{R}^3$ existiert, so dass

$$\forall x \in G : \qquad \operatorname{rot} A(x) = F(x).$$

Hinweis: Sei $x^{(0)} \in G$ beliebig. Für $x \in G$ betrachte $A(x) = \int_0^1 tF\left(x^{(0)} + t\left(x - x^{(0)}\right)\right) dt \times \left(x - x^{(0)}\right)$.

11.2 Aufgabe

Gegeben seien eine beliebige Menge X und die Mengensysteme $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$ und $\mathcal{A} = \{X, \emptyset\}$. Man beweise, daß$\mathcal{P}$ und $\mathcal{A}$ σ-Algebren auf X sind.

11.3 Aufgabe

Man beweise: Gegeben sei $(\mathcal{A}_j)_{j\in J}$ eine beliebige Familie von σ-Algebren auf einer beliebigen Menge X; so ist $\mathcal{A} = \bigcap\limits_{j\in J} \mathcal{A}_j$ ebenfalls eine σ-Algebra auf X.

11.4 ⋆ Aufgabe

Sei X eine beliebige Menge. Man beweise:

(a) Das Mengensystem $\mathcal{R}_1 := \{A \subset X : \ A \text{ endlich oder } {}^{c}A \text{ endlich}\}$ ist ein Ring in X. Ist außerdem X endlich, so ist $\mathcal{R}_1$ bereits eine σ-Algebra in X.

(b) Das Mengensystem $\mathcal{A}_1 := \{A \subset X : \ A \text{ abzählbar oder } {}^{c}A \text{ abzählbar}\}$ ist eine σ-Algebra in X.

(c) Sei X' eine weitere beliebige Menge und $f : X' \to X$ eine Abbildung. Sei $\mathcal{A}_2$ eine σ-Algebra auf X. Das System der Urbildmengen von f: $\mathcal{A}_3 := \left\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}_2\right\}$ ist eine σ-Algebra in X'.

11.5 Aufgabe

Man beweise oder widerlege, dass es eine abzählbar unendliche σ-Algebra gibt.

11.6 ⋆ Aufgabe

Sei nun X eine unendliche Menge. Man untersuche, ob die wie folgt definierte Mengenfunktion μ ein Inhalt auf dem Ring $\mathcal{R}_1 := \{A \subset X : \ A \text{ endlich oder } {}^{c}A \text{ endlich}\}$ aus Aufgabe 11.4 ist: Für $A \in \mathcal{R}_1$ sei

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & , A \text{ endlich} \\ 1 & , {}^{c}A \text{ endlich.} \end{cases}$$

11.7 ⋆ Aufgabe

Man überprüfe in den folgenden Fällen ob $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum ist.

(a) $X = \mathbb{R}^n, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ und für ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sei μ das Diracmaß, d.h. für $A \in \mathcal{A}$ sei

$$\delta_{x_0} := \mu(A) = \begin{cases} 1 & , x_0 \in A \\ 0 & , x_0 \notin A. \end{cases}$$

(b) $X = \mathbb{Q}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ und μ das Zählmaß, d.h. für $A \in \mathcal{A}$ sei

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & , A = \emptyset \\ \infty & , A \text{ unendlich} \\ \#A & , A \text{ endlich.} \end{cases}$$

[Die mit ⋆ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 22.06.11 in der Vorlesung ab.]

Analysis II – Sommersemester 2011

Prof. H.-Ch. Grunau, Dipl.-Math. L. Pulst

12 22.06.11

12.1 ⋆ Aufgabe

Man beweise, dass die Borel-σ-Algebra

$$\mathcal{B} := \mathcal{A}(\mathcal{O}) := \bigcap_{\mathcal{A}\supset\mathcal{O},\mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra}} \mathcal{A} \qquad \text{wobei } \mathcal{O} = \{O \subset \mathbb{R}^n : O \text{ offen}\}$$

vom System aller kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ erzeugt werden kann.

12.2 Aufgabe

Sei $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und μ das Zählmaß, d.h. für $A \subset \mathbb{N}$:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & , A = \emptyset \\ \infty & , A \text{ unendlich} \\ \#A & , A \text{ endlich,} \end{cases}$$

sowie für $k \in \mathbb{N}$: $A_k := \{k+1, k+2, k+3, \ldots\}$. Man vergleiche $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$ und $\mu(A)$, wobei $A := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$.

12.3 ⋆ Aufgabe

Man beweise, dass das äußere (Lebesgue-)Maßλ^* auf $\mathcal{E}$ den Lebesgueschen Inhalt λ auf $\mathcal{E}$ fortsetzt, das heißt, dass gilt:

$$\lambda|_{\mathcal{E}} = \lambda^*|_{\mathcal{E}}.$$

12.4 ⋆ Aufgabe

Sei X eine beliebige nichtleere Menge. Eine Funktion $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ heißt *äußeres Maß* (vgl. Satz 23.16) auf X, falls gilt:

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(2) $A \subset B \subset X \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,

(3) für $A_k \subset X$ $(k \in \mathbb{N})$ gilt $\mu^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(A_k)$.

Sei nun $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ wie folgt definiert: $\mu^*(\emptyset) = 0$ und für $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\mu^*(A) := \sup\{|x_i - y_i|,\ i = 1,\ldots,n;\ x, y \in A\}.$$

Ist μ^* ein äußeres Maß?

12.5 Aufgabe

Es sei $(\mu^*)_{j\in J}$ eine Familie von äußeren Maßen (vgl. Aufgabe 12.4) auf $\mathcal{P}(X)$.

(a) Man zeige, dass $\bar{\mu}$ mit $\bar{\mu}(A) := \sup\left\{\mu_j^*(A),\ j \in J\right\}$ für $A \subset X$ ein äußeres Maßist.

(b) Ist $\underline{\mu}$ mit $\underline{\mu}(A) := \inf\left\{\mu_j^*(A),\ j \in J\right\}$ für $A \subset X$ ein äußeres Maß?

(c) Sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ring. Man beweise, dass das äußere Maß$\hat{\mu}$ auf $\mathcal{P}(X)$

$$\hat{\mu}(A) := \inf\left\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \inf_{j\in J} \mu_j^*\left(E^k\right):\ A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E^k, E^k \in \mathcal{R}\ \ (k \in \mathbb{N})\right\}$$

folgende Eigenschaften besitzt:

(1) $\hat{\mu}(A) \leq \mu_j^*(A)$ für alle $j \in J$.

(2) Sei λ ein weiteres äußeres Maßmit $\lambda(A) \leq \mu_j^*(A)$ für alle $j \in J$, so folgt $\lambda(A) \leq \hat{\mu}(A)$.

Ist $\hat{\mu}$ durch die Eigenschaften (1) und (2) eindeutig bestimmt?

12.6 ⋆ Aufgabe

Man beweise:

(a) Jede Teilmenge der Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$ ist in $\mathbb{R}^n$ eine (Lebesgue-) Nullmenge.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ stetig. Der Graph $G = \left\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^{n-1}\right\}$ ist in $\mathbb{R}^n$ eine (Lebesgue-) Nullmenge.

12.7 Aufgabe

Im folgenden soll die sogenannte Cantormenge konstruiert werden: Man startet mit dem Intervall $C_0 := [0,1]$ und schneidet das mittlere Drittel heraus: $C_1 := \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}\right]$. Aus den beiden Intervallen von C_1 entfernt man wieder jeweils das mittlere Drittel und erhält vier Intervalle als Rest. Durch rekursive Anwendung dieses Verfahrens erhält man eine Folge von Mengen $C_k \subset [0,1]$ bestehend aus 2^k abgeschlossenen Intervallen. Die Cantormenge C sei nun der Durchschnitt all dieser Mengen:

$$C := \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k.$$

Man beweise, dass C eine überabzählbare (Lebesgue-) Nullmenge ist.

[Die mit ⋆ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 29.06.11 in der Vorlesung ab.]

Analysis II – Sommersemester 2011

Prof. H.-Ch. Grunau, Dipl.-Math. L. Pulst

13 29.06.11

13.1 Aufgabe

Auf $\mathbb{R}$ sei folgende Äquivalenzrelation definiert: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Die zugehörigen Äquivalenklassen sind für $a \in \mathbb{R}$: $[a] := a + \mathbb{Q}$. Aus jeder Klasse wähle man einen Vertreter vom Betrag kleiner gleich eins. Die Menge $A \subset (-1, 1)$ sei die Menge dieser Vertreter. Für $r, s \in \mathbb{Q}$ beweise man:

(a) $r \neq s$: $(r + A) \cap (s + A) = \emptyset$,

(b) $\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (r + A) = \mathbb{R}$.

(c) Für $S := \bigcup_{|r|<2} (r + A)$ gilt: $(-1, 1) \subset S \subset (-3, 3)$.

Man zeige, dass A nicht (Lebesgue-) messbar ist.

Hinweis: Mit Hilfe von (a) und (c) leite man aus der Messbarkeit der Mengen $r + A$ einen Widerspruch ab; dabei sind die Fälle $\lambda(A) = 0$ und $\lambda(A) > 0$ zu unterscheiden.

Bemerkung: Für die Menge A aus Aufgabe 13.1 benötigt man das *Auswahlaxiom*:
Sei $\mathcal{A}$ eine nicht-leere Menge von nicht-leeren Mengen, so existiert eine Funktion $f : \mathcal{A} \to \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, so dass $f(A) \in A$.
Intuitiv: Dieses f bewirkt die simultane Auswahl eines Elements aus jeder der Mengen von $\mathcal{A}$.

13.2 Aufgabe

(a) Man beweise, dass $A \subset \mathbb{R}^n$ eine $G_\delta-$ Menge ist, genau dann, wenn ${}^c\!A \subset \mathbb{R}^n$ eine $F_\sigma-$ Menge ist.

(b) Man beweise, dass jede abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ eine $G_\delta-$ Menge ist.

13.3 Aufgabe

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Sei $E \subset \mathbb{R}$ mit $\lambda(E) = 0$. Man beweise, dass $\lambda(f(E)) = 0$.

13.4 Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $g : D \to \mathbb{R}$ messbar. Man beweise: $f \circ g$ ist auch messbar.

13.5 Aufgabe

Seien $(a_k)_{k \in K} \subset \overline{\mathbb{R}}$, $K \subset \mathbb{N}$, die paarweise verschiedenen Werte der Treppenfunktion f, so gilt mit

$$D_k = \{x \in D : \ f(x) = a_k\} : \qquad f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k 1_{D_k}.$$

Man beweise, dass die Treppenfunktion genau dann messbar ist, wenn alle D_k messbar sind.

13.6 Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar und seien $f, g : D \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Man beweise, dass die Menge

$$P = \{x \in D : \ f(x) < g(x)\}$$

messbar ist.

13.7 Aufgabe

Man beweise, dass die Menge der Punkte, wo eine Folge von reellen, messbaren Funktionen (punktweise) konvergiert, eine messbare Menge ist.

Analysis II – Sommersemester 2011

Prof. H.-Ch. Grunau, Dipl.-Math. L. Pulst

14 06.07.11

14.1 Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $\lambda(D) < \infty$ und die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiere punktweise fast überall in D gegen ein f. Des weiteren existiere ein Konsante M für $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $|f_k(x)| \leq M$ fast überall in D. Man zeige, dass

$$\lim_{k\to\infty} \int_D f_k(x)\, dx = \int_D f(x)\, dx.$$

14.2 Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $\lambda(D) < \infty$ und die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiere punktweise in D gegen ein f. Für $\eta > 0$ sei

$$E_k(\eta) := \{x \in D : |f_k(x) - f(x)| > \eta\}.$$

Man beweise, dass gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \lambda(E_k(\eta)) = 0.$$

14.3 Aufgabe

Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge, $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ eine beliebige Funktion und es gebe eine Partition π_0 von D, so dass $S^\star(|f|, \pi_0) < \infty$, dass heißt es gelte (AK). Man beweise, dass die Definition des (Lebesgueschen) Ober- und Unterintegrals nicht von der Wahl der Partition π_0 abhängt.

14.4 Aufgabe

Sei $f \in \mathscr{L}^1(D)$. Falls $m \leq f \leq n$ und $\lambda(D) < \infty$, zeige man, dass ein c mit $m \leq c \leq n$ existiert, so dass

$$\int_D f(x)\, dx = c\lambda(D).$$

14.5 Aufgabe

Sei $f : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ so, dass $f|_{(a,b]}$ stetig ist und $f(a) = \infty$. Man zeige, dass $f \in \mathscr{L}^1([a, b])$ genau dann, wenn $|f|$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist.

14.6 Aufgabe

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Man beweise die folgende Formel für radialsymmetrische Integration:

$$\int_{\|x\|\leq R} f(\|x\|)\, dx = ne_n \int_0^R r^{n-1} f(r)\, dr,$$

wobei $e_n = \mathrm{vol}_n(B_1(0)) = \int_{B_1(0)} 1\, dx$ das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel ist.

14.7 Aufgabe

Man berechne

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d\,(x,y)$$

und stelle eine Verbindung mit dem (Gaußschen Fehler-) Integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx$$

her.

14.8 Aufgabe

Man zeige, dass für das Volumen der Einheitskugel $e_n = \mathrm{vol}_n\,(B_1\,(0)) = \int_{B_1(0)} 1\,dx$ gilt:

$$e_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},$$

dabei ist $\Gamma\,(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ die Gamma-Funktion.

Hinweis: Mittels Satz 22.7 und Aufgabe 14.6 kann man eine Rekursionsformel für e_n herleiten. Bei der Bestimmung von $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ hilft Aufgabe 14.7.