Analysis III – Wintersemester 2011/12

Prof. H.-Ch. Grunau, Dipl.-Math. L. Pulst

1 14.10.11

★ 1.1 Aufgabe

Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ kompakt und $\mu \in \mathscr{L}^1(K)$. Für $x \in \mathbb{R}^3$ sei $\rho(x, L) := \inf\{\|x - y\|_2, y \in L\}$ der euklidische Abstand von x zu einer Geraden $L \subset \mathbb{R}^3$. Man berechne die Integrale

$$\Theta(K, \mu, L) := \int_K \rho(x, L)^2 \mu(x)\, dx \qquad \text{und} \qquad M(K, \mu) := \int_K \mu(x)\, dx$$

für $\mu(x) \equiv c > 0$, $L = \mathbb{R} \times 0 \times 0$ und für $r > 0$: $K = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 \leq r\right\}$.

Hinweis: Aufgabe 14.6 aus Analysis II.

★ 1.2 Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $\lambda(D) < \infty$ und $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Man beweise, dass $f \in \mathscr{L}^1(D)$ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\{|f| > k\}) < \infty.$$

★ 1.3 Aufgabe

Man zeige, dass die Aussage des Satzes von Egorov (Satz 24.15) falsch wird, wenn man auf die Voraussetzung $\lambda(D) < \infty$ verzichtet.

1.4 Aufgabe

Die Funktionenfolge $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine Folge messbarer Funktionen, so dass $f_k(x) \to f(x)$ f.ü. in $\mathbb{R}$. Für alle $r > 0$ existiere ein $n(r) \in \mathbb{N}$, so dass die Menge

$$T_n(r) := \bigcup_{k=n}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : |f_k(x) - f(x)| > r\}$$

für $n = n(r)$ endliches Maßhat, d.h. $\lambda\left(T_{n(r)}(r)\right) < \infty$. Man beweise, dass für alle $\varepsilon > 0$ eine messbare Menge $A \subset \mathbb{R}$ mit $\lambda(A) \leq \varepsilon$ existiert, so dass die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf ${}^{c}A$ gegen f konvergiert:

$$f_k|_{{}^{c}A} \to f|_{{}^{c}A} \quad \text{gleichmäßig.}$$

Hinweis: Man beweise zunächst für alle $r > 0$: $\lim_{n\to\infty} \lambda(T_n(r)) = 0$ und folgere, dass für $\varepsilon > 0$ und für alle $p \in \mathbb{N}$ ein $n_p \in \mathbb{N}$ existiert, s.d. $\lambda\left(T_{n_p}\left(\frac{1}{p}\right)\right) \leq \frac{\varepsilon}{2^p}$. Man betrachte die Vereinigung dieser Mengen.

★ 1.5 Aufgabe

(a) Für die messbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gelte für alle $x \in B_1(0) :\ |f(x)| \leq \|x\|^{-\alpha}$. Man beweise, dass $f \in \mathscr{L}^1(B_1(0))$ für $\alpha < n$.

(b) Man untersuche, ob die folgenden Funktionen uneigentlich Riemann- bzw. Lebesgue-integrierbar sind.

(1) $f_1(x) := \cos(x^2), \quad x \in [0, \infty)$,
(2) $f_2(x) := \frac{1}{x(\log(x))^2}, \quad x \in [2, \infty)$.

1.6 Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $f, g : D \to \overline{\mathbb{R}}$ seien messbar und es gelte $\int_D f^2 dx < \infty, \int_D g^2 dx < \infty$. Man beweise, dass dann $f \cdot g \in \mathscr{L}^1(D)$ und es gilt

$$\left| \int_D f \cdot g dx \right| \leq \left(\int_D f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_D g^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sei nun $K := \left\{ g : D \to \overline{\mathbb{R}} \text{ messbar}, \ g \geq 0 \text{ fast überall}, \ \int_D g^2 dx < \infty \right\}$. Sei f wie oben und die Funktion $g \in K$ erfülle für alle $h \in K$

$$\int_D (f - g)(h - g)\, dx \leq 0. \tag{1}$$

Man zeige, dass

$$\left(\int_D (f - g)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \min_{h \in K} \left(\int_D (f - h)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

gilt und $g = f \cdot 1_{\{x \in D : f(x) \geq 0\}}$ Bedingung (1) erfüllt.

[Die mit ★ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 21.10.11 in der Vorlesung ab.]

Analysis III – Wintersemester 2011/12

Prof. H.-Ch. Grunau, Dipl.-Math. L. Pulst

2 21.10.11

2.1 Aufgabe

Sei $B \in GL(n, \mathbb{R})$ eine bijektive lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $X \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $Y := B(X)$. Man beweise, dass die Funktion $f : Y \to \mathbb{R}$ genau dann integrierbar ist, wenn die Funktion $x \mapsto |\det B| (f \circ B)(x)$ integrierbar ist. Man zeige, dass dann gilt

$$\int_Y f(y)\, dy = \int_X (f \circ B)(x)\, |\det B|\, dx.$$

★ 2.2 Aufgabe

Man Hilfe des Satzes von Beppo Levi (Satz 27.1) zeige man

$$\lim_{k\to\infty} \int_2^4 \frac{7k+3}{k(x-2)^2+3} dx = \int_2^4 \lim_{k\to\infty} \frac{7k+3}{k(x-2)^2+3} dx.$$

★ 2.3 Aufgabe

Sei $f : (0, \infty) \to [0, \infty)$ eine monoton fallende, beschränkte Funktion. Man beweise, dass f genau dann integrierbar auf $(0, \infty)$ ist, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergiert.

★ 2.4 Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar und sei $f_k : D \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen, so dass die Folge der Integrale beschränkt ist. Man zeige, dass dann $\lim_{k\to\infty} f_k(x) < \infty$ fast überall gilt, und die fast überall definierte Grenzfunktion $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ ist integrierbar mit Integral

$$\int_D f(x)\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_D f_k(x)\, dx.$$

★ 2.5 Aufgabe

Sei

$$f_k(x) := \begin{cases} 1, & k \le x < k+1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(1) Für welche Funktion gilt $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ punktweise f.ü.?

(2) Man beweise, dass $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\, dx \neq \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$.

(3) Welche Eigenschaft des Satzes von majorisierten Konvergenz von Lebesgue (Folgerung 27.10) ist nicht erfüllt?

2.6 Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $f \in \mathscr{L}^1(D)$ und die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}^1(D)$ mit

$$\lim_{k\to\infty} \int_D |f_k(x) - f(x)|\, dx = 0.$$

Man zeige, dass die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichgradig absolutstetig bezüglich des Integrals ist.

2.7 Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $f, g : D \to \overline{\mathbb{R}}$ seien messbar und es gelte $\int_D |f|^p\, dx < \infty$, $\int_D |g|^q\, dx < \infty$, wobei $p, q > 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Man beweise, dass dann $f \cdot g \in \mathscr{L}^1(D)$ und es gilt

$$\int_D |f \cdot g|\, dx \leq \left(\int_D |f|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_D |g|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

$\Big[$ Die mit $\bigstar$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 28.10.11 in der Vorlesung ab. $\Big]$

Analysis III – Wintersemester 2011/12

Prof. H.-Ch. Grunau, Dipl.-Math. L. Pulst

3 28.10.11

★ 3.1 Aufgabe

Gegeben sei eine Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ und eine nichtnegative messbare Funktion g mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{t} = \infty$,

(b) $\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} g(|f_k|)\, dx < \infty$.

Man zeige, dass die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichgradig absolutstetig bezüglich des Integrals ist.

3.2 Aufgabe

Gegeben sei eine Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ seien die Reihenglieder der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f_k)$ definiert durch

$$a_n(f_k) := n\lambda(\{n \le |f_k| < n+1\}).$$

Man zeige, dass die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ genau dann gleichgradig absolutstetig bezüglich des Integrals ist, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f_k)$ gleichmäßig in k konvergiert.

★ 3.3 Aufgabe

Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$. Die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch $f_k(x) := kf(kx)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Man beweise:

(1) $\forall k \in \mathbb{N}: \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\, dx = 1$,

(2) $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(0)$.

★ 3.4 Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $f, g : D \to \overline{\mathbb{R}}$ seien messbar und es gelte $\int_D |f|^p\, dx < \infty, \int_D |g|^p\, dx < \infty$ für $1 \le p < \infty$.

(1) Man beweise

$$\left(\int_D |f+g|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_D |f|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_D |g|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(2) Für f gelte nun zusätzlich $\int_D |f|^q\, dx < \infty$ mit $1 \le q < \infty$. Man zeige, dass für $1 \le r < \infty$, $\theta \in [0,1]$ mit $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$ gilt

$$\int_D |f|^r\, dx < \infty \qquad \text{und} \qquad \left(\int_D |f|^r\, dx\right)^{\frac{1}{r}} \le \left(\int_D |f|^p\, dx\right)^{\frac{1-\theta}{p}} \left(\int_D |f|^q\, dx\right)^{\frac{\theta}{q}}.$$

Hinweis: Aufgabe 2.7.

3.5 Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $\lambda(D) < \infty$ und die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiere punktweise fast überall in D gegen ein f. Weiter existiert eine Konstante C, so dass für ein festes $0 < p < \infty$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\int_D |f_k(x)|^p \, dx \le C$. Man beweise, dass dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_D |f_k(x)|^p - |f_k(x) - f(x)|^p - |f(x)|^p \, dx = 0.$$

★ 3.6 Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $\lambda(D) < \infty$. Für $p > 1, \lambda \in \mathbb{R}$ und $u : D \to \mathbb{R}$ messbar mit $\int_D |u|^{p+1} \, dx < \infty$ zeige man, dass

$$F(u) := \int_D |u|^{p+1} \, dx + \lambda \int_D |u|^2 \, dx$$

wohldefiniert ist und berechne für $\varphi : D \to \mathbb{R}$ messbar mit $\int_D |\varphi|^{p+1} \, dx < \infty$ und $u \neq 0$ f.ü.

$$\frac{d}{dt} F(u + t\varphi)\bigg|_{t=0}.$$

Hinweis: Aufgabe 2.7.

$\left[\begin{array}{l}\text{Die mit ★ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.}\\ \text{Die Lösungen geben Sie bitte am 04.11.11 in der Vorlesung ab.}\end{array}\right]$

Analysis III – Wintersemester 2011/12

Prof. H.-Ch. Grunau, Dipl.-Math. L. Pulst

4 04.11.11

★ 4.1 Aufgabe

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $h > 0$. Sei

$$K_B := \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in [0,h] \, , x \in \frac{h-t}{h} \cdot B \right\}$$

der Kegel in $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Basis B und Spitze $(0,h)$. Man beweise

$$\lambda^{(n+1)} (K_B) = \frac{h}{n+1} \lambda^{(n)} (B) \, .$$

Seien nun $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig und sei

$$S_n := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \in \mathbb{R}^n : \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n \text{ und } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leq 1 \right\} .$$

Man zeige

$$\lambda^{(n)} (S_n) = \frac{1}{n!} \left| \det (a_1, \dots, a_n) \right| .$$

★ 4.2 Aufgabe

Sei

$$f : (0,1) \times (0,1) \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := \frac{x-y}{(x+y)^3} .$$

Man berechne

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \, dx dy, \quad \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \, dy dx,$$
$$\int_0^1 \int_0^1 |f(x,y)| \, dx dy, \quad \int_0^1 \int_0^1 |f(x,y)| \, dy dx.$$

★ 4.3 Aufgabe

Seien $f, g \in \mathscr{L}^1$. Man zeige, dass das Integral

$$(f * g)(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, g(y-x) \, dx$$

wohldefiniert ist und beweise:

(1) $\int_{\mathbb{R}^n} |f * g| \, dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |g| \, dy$;

(2) $f * g = g * f$.

★ 4.4 Aufgabe

Seien $0 < r < R$. Es sei T der Volltorus, der durch die Rotation der Kreisscheibe

$$K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, (x - R)^2 + z^2 \leq r^2\right\}$$

um die z-Achse entsteht. Man berechne $\lambda^{(3)}(T)$.

4.5 Aufgabe

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei

$$K := \left\{x \in G : \det\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0\right\}.$$

Man zeige, dass die Menge der kritischen Werte $f(K)$ von f eine Lebesgue-Nullmenge ist.

$\left[\begin{array}{l}\text{Die mit ★ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.}\\ \text{Die Lösungen geben Sie bitte am 11.11.11 in der Vorlesung ab.}\end{array}\right]$

Analysis III – Wintersemester 2011/12

Prof. H.-Ch. Grunau, Dipl.-Math. L. Pulst

5 11.11.11

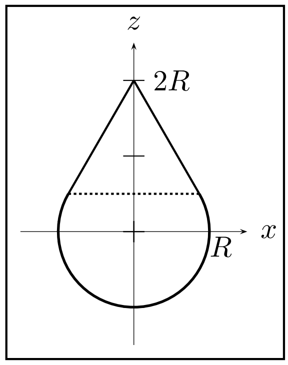
5.1 Aufgabe

Sei $R \in (0,\infty], h \in (0,\infty]$ und für $\mathbb{R}^2 := B_\infty(0)$ sei $\mathbb{R}^3 = B_\infty(0) \times \mathbb{R}$. Man zeige, dass $f : B_R(0) \times [-h,h] \to \mathbb{R}$ genau dann integrierbar ist, wenn $[0,R) \times [0,2\pi] \times (-h,h) \ni (r,\varphi,z) \mapsto r \cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$ integrierbar ist, und es gilt:

$$\int\limits_{B_R(0)\times[-h,h]} f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \int\limits_{-h}^{h}\int\limits_{0}^{R}\int\limits_{0}^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,r d\varphi dr dz.$$

5.2 Aufgabe

Ein Körper K ist aus einem Kugelabschnitt mit der Dichte $\rho_B = 7$ und einem Kegel mit Dichte ρ_C zusammengesetzt, wobei der Kegelmantel tangential an der Kugeloberfläche anliegt. Die Gesamthöhe beträgt das Dreifache des Kugelradius. Man bestimme die Dichte ρ_C, damit sich der Körper immer wieder aufrichtet. (Dazu muss der Schwerpunkt unterhalb des Kugelmittelpunktes liegen).



Hinweis: Ohne Beweis darf verwendet werden, dass der Schwerpunkt auf der Symmetrieaches von K liegt. Die z-Komponente des Schwerpunktes ist gegeben durch $s_z = \frac{1}{M}\int_K z \cdot \rho(x,y,z)\,d(x,y,z)$ wobei $M = \int_K \rho(x,y,z)\,d(x,y,z)$ die Gesamtmasse von K ist.

★ 5.3 Aufgabe

Sei $Z := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \le \left(\frac{R}{2}\right)^2\right\}$ und $K := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\right\}$ mit $R > 0$. Man berechne das Volumen von $Z \cap K$.

★ 5.4 Aufgabe

Sei $c : I := [a,b] \to \mathbb{R}^2,\ c(t) = r(t)(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$ mit $r,\varphi \in C^1(I), \varphi' > 0$ und $\varphi \in [0,2\pi]$. Man zeige, dass die vom Ortsvektor überstrichene Fläche gegeben ist durch

$$A = \frac{1}{2}\int_I r^2(t)\,\varphi'(t)\,dt.$$

★ 5.5 Aufgabe

Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein Diffeomorphismus $\Phi : V \to U$ heißt *konformer Diffeomorphismus*, falls für alle $x \in V$ gilt:

$$\text{(i)} \quad \langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(x), \frac{\partial \Phi}{\partial x_l}(x) \rangle := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k}(x) \cdot \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_l}(x) = 0, \quad \text{für alle } 1 \leq k, l \leq n,\ k \neq l;$$

$$\text{(ii)} \quad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(x) \right\|_2^2 = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x_l}(x) \right\|_2^2, \quad \text{für alle } 1 \leq k, l \leq n.$$

(a) Man zeige, dass die folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ konforme Diffeomorphismen sind:

(1) Translation: $x \mapsto x + d,\ d \in \mathbb{R}^n$;

(2) Streckung: $x \mapsto rx,\ r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(3) Rotation: $x \mapsto Ax,\ A \in SO(n, \mathbb{R})$, mit $SO(n, \mathbb{R}) := \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(A) = 1,\ A^T A = E \right\}$.

(b) Man zeige, dass die Spiegelung an der Einheitssphäre $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \Phi(x) := \frac{x}{\|x\|_2^2}$ ein konformer Diffeomorphismus ist.

Bemerkung: Konforme Abbildungen spielen in der, im nächsten Semester folgenden, Vorlesung *Funktionentheorie* eine wichtige Rolle. Man wird zeigen können, dass auf einem Gebiet des $\mathbb{R}^2$ komplex differenzierbare, d.h. *holomorphe* Abbildungen, deren Ableitung nicht verschwindet, genau die konformen Abbildungen sind. Allgemein kann man sogar zeigen, dass jedes nichtleere einfach zusammenhängende (ohne Loch) Gebiet, welches nicht ganz $\mathbb{C}$ ist, biholomorph (Abb. bij. und Umkehrabb. holomorph), also insbesondere durch einen konformen Diffeomorphismus, auf die Einheitskreisscheibe abgebildet werden kann.

★ 5.6 Aufgabe

Seien $U, V \subset \mathbb{R}^2$ offen, $\Phi : V \to U$ ein *konformer Diffeomorphismus* (siehe Aufgabe 5.5) und $f : U \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetig differenzierbare Funktion. Man beweise, dass dann gilt:

$$\int_U \|\nabla f(y)\|_2^2 \, dy = \int_V \|\nabla (f \circ \Phi)(x)\|_2^2 \, dx,$$

wobei $\nabla f(y) := \operatorname{grad} f(y) := \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}(y), \frac{\partial f}{\partial y_2}(y) \right)$.

[Die mit ★ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 18.11.11 in der Vorlesung ab.]

Analysis III – Wintersemester 2011/12

Prof. H.-Ch. Grunau, Dipl.-Math. L. Pulst

6 18.11.11

★ 6.1 Aufgabe

Seien $U := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}$ und $V := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\}$. Man identifiziere $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ via der Abbildung $(x,y) \mapsto x + iy =: z$. Man zeige,

(a) dass $\Phi : U \to V,\ z \mapsto -i\frac{z+1}{z-1}$ ein Diffeomorphismus ist,

(b) dass für $f : V \to \mathbb{R}$, so dass $\frac{f(x,y)}{y^2} \in \mathscr{L}^1(V)$, gilt:

$$\int_V \frac{f(x,y)}{y^2} d(x,y) = \int_U (f \circ \Phi)(x,y) \frac{4}{\left(1 - x^2 - y^2\right)^2} d(x,y).$$

Hinweis: Um Φ in reellen Koordinaten (x,y) zu berechnen, hilft es $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ zu benutzen.

★ 6.2 Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Man beweise folgende Aussagen:

(a) $\|(f)_h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(D)}$, $(f)_h \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($(f)_h$ ist definiert wie in Definition 29.10),

(b) $(f)_h \to f$ in $L^p(D)$, $h \searrow 0$.

Hinweis: Für (a) betrachtet man zunächst $|(f)_h|$ und zerlege den Glättungskern entsprechend, um die Hölderungleichung zu benutzen. Für die Berechnung der L^p-Norm $\|(f)_h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ wende man Funbini-Tonelli an. Für (b) benutze man, dass $C_0^\infty(D)$ dicht in $L^p(D)$ liegt, um $f \in L^p(D)$ mit $\tilde{f} \in C_0^\infty(D)$ zu approximieren. Um anschließend $\|(f)_h - f\|_{L^p(D)}$ abzuschätzen, glättet man $\tilde{f}$ und wendet die Ungleichung aus (a) an.

6.3 Aufgabe

Sei $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$. Man beweise, dass gilt:

(a) $(D^\alpha f)_h = D^\alpha (f)_h$, wobei α ein Multiindex (siehe Analysis II, 19.11) der Länge $|\alpha| \leq k$ ist und $(f)_h$ wie in Definition 29.10 definiert ist;

(b) $(D^\alpha f)_h \to D^\alpha f$ für jedes $|\alpha| \leq k$ gleichmäßig auf jedem Kompaktum für $h \searrow 0$.

★ 6.4 Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Es sei

$$L^\infty(D) := \left\{ f : D \to \mathbb{C};\ f \text{ messbar},\ \exists N \subset D \text{ mit } \lambda(N) = 0 : \sup_{x \in D \setminus N} |f(x)| < \infty \right\}$$

und

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in D} |f(x)| := \inf_{\substack{N \subset D,\\ \lambda(N)=0}} \sup_{x \in D \setminus N} |f(x)|,$$

wobei „ess sup“ für „essential supremum“, d.h. *wesentliches Supremum* steht. Man zeige:

(a) Für alle $f \in L^\infty(D)$ existiert eine Nullmenge $N_f \subset D$, so dass $\|f\|_\infty = \sup_{x \in D \setminus N_f} |f(x)|$.

(b) $L^{\infty}(D)$ ist ein komplexer Vektorraum mit der Semi-Norm $\|.\|_{\infty}$, das heißt

   (i) $\|0\|_{\infty} = 0$,
   (ii) $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall f \in L^{\infty}(D): \ \|\alpha f\|_{\infty} = |\alpha| \, \|f\|_{\infty}$,
   (iii) $\forall f, g \in L^{\infty}(D) : \|f+g\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$.

(c) Falls $f = g$ f.ü. in D, dann folgt $\|f\|_{\infty} = \|g\|_{\infty}$.

Definiert man die Gleichheit zweier Elemente $f, g \in L^{\infty}(D)$ analog zu Definition 30.4 durch:

$$f = g \in L^{\infty}(D) \ :\Leftrightarrow \ f(x) = g(x) \ \text{ f.ü. in } D,$$

dann wird die Semi-Norm $\|.\|_{\infty}$ zu einer Norm auf dem komplexen Vekorraum $L^{\infty}(D)$. Man beweise:

(d) $(L^{\infty}(D), \|.\|_{\infty})$ ist vollständig.

★ 6.5 Aufgabe

Sei $i \in \mathbb{N}$ und $j = 1, \ldots, 2^i$. Sei $f_{i,j} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_{i,j}(x) := \begin{cases} 1, & (j-1) \cdot 2^{-i} \leq x \leq j \cdot 2^{-i}; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Man zeige, dass die Funktionenfolge $(f_{1,1}, f_{1,2}, f_{2,1}, \ldots, f_{2,4}, f_{3,1}, \ldots)$ in $L^1(\mathbb{R})$ konvergiert.

(b) Man zeige, dass die in (a) definierte Folge auf $(0,1)$ in keinem Punkt konvergiert.

(c) Man gebe eine Teilfolge für die in (a) definierte Folge an, die auf ganz $\mathbb{R}$ punktweise konvergiert.

6.6 Aufgabe

Sei $f_k(x) := k^2 \cdot 1_{(0, \frac{1}{k})}(x)$ für $k \in \mathbb{N}$. Man beweise:

(a) $\forall k \in \mathbb{N}: \ f_k \in L^1(\mathbb{R})$.

(b) $f_k(x) \to 0$ punktweise fast überall.

(c) $\|f_k\|_1 \to \infty$.

[Die mit ★ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 25.11.11 in der Vorlesung ab.]

Analysis III – Wintersemester 2011/12

Prof. H.-Ch. Grunau, Dipl.-Math. L. Pulst

7 25.11.11

★ 7.1 Aufgabe

Man beweise, dass $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ nicht dicht in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegen kann.

★ 7.2 Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Man beweise:

(a) Ist $f \in L^\infty(D)$, so gilt: $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

(b) Die Inklusion $L^\infty((0,1)) \subset \bigcap\limits_{1\le p<\infty} L^p((0,1))$ ist echt.

(c) Für alle $1 \le p < \infty$ existiert ein $f \in L^p(\mathbb{R})$ und $f \notin L^\infty(\mathbb{R})$ sowie ein $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ mit $g \notin L^p(\mathbb{R})$.

★ 7.3 Aufgabe

Man entscheide und begründe, welche der folgenden Mengen M im $\mathbb{R}^2$ differenzierbare Untermannigfaltigkeiten sind:

(a) $M = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$,

(b) $M = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$,

(c) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 1\}$,

(d) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 1,\ x > 0\}$,

(e) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 1,\ x \ge 0\}$,

(f) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3\}$.

★ 7.4 Aufgabe

Man beweise die folgenden Aussagen:

(a) Seien $M_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ m_i-dimensionale $(1 \le m_i < n_i)$ C^{l_i}-glatte $(l_i \ge 1)$ Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{n_i}$ $(i = 1,2)$. Dann ist $M_1 \times M_2$ eine $m_1 + m_2$ dimensionale $C^{\min\{l_1,l_2\}}$ -glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$.

(b) $\mathbb{S}_N^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 = 1,\ x_3 \ge 0\}$ ist keine Untermannigfaltigkeit.

7.5 Aufgabe

Für $0 < r < R$ betrachte man den Torus

$$T := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2\right\}.$$

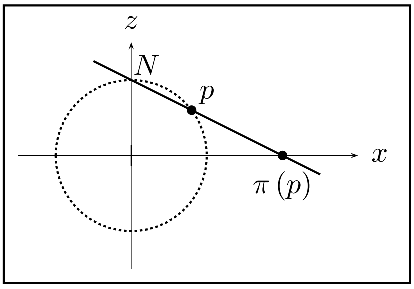
Man beweise:

(a) T ist eine 2-dimensionale kompakte differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

(b) $\gamma(u,v) := \begin{pmatrix} (R + r\cos v)\cos u \\ (R + r\cos v)\sin u \\ r\sin v \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in U \times V \subset \mathbb{R}^2$, mit $U, V \subset \mathbb{R}$ geeignet im Sinne von Definition 32.1, ist eine lokale Parametrisierung von T.

7.6 Aufgabe

Sei $\mathbb{S}^2 := \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 = 1\right\}$ und $N := (0,0,1)$. Sei $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$, wobei für alle $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, $\pi(p)$ definiert ist als der Schnittpunkt der Geraden durch N und p mit der Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Man zeige, dass $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ ein Homöomorphismus und $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ eine stetig differenzierbare konforme (erfüllt Bedingungen (i), (ii) aus Aufgabe 5.5) Abbildung ist.



[Die mit ★ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 02.12.11 in der Vorlesung ab.]

Analysis III – Wintersemester 2011/12

Prof. H.-Ch. Grunau, Dipl.-Math. L. Pulst

8 02.12.11

★ 8.1 Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ messbar und $f|_K \in L^1(K)$ für jede kompakte Menge $K \subset D$. Für alle $\varphi \in C_0^\infty(D)$ sei

$$\int_D f(x)\,\varphi(x)\,dx = 0.$$

Man zeige, dass $f = 0$ punktweise fast überall.

Hinweis: Man wähle ein Kompaktum K in D und multiplziere f mit charakteristischen Funktionen auf Kugeln in K. Weiter nutze man die Dichtheit von $C_0^\infty(D)$ in $L^1(D)$ und Aufgabe 6.2 aus.

★ 8.2 Aufgabe

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $f \in C^2(D)$ und $h \in C_0^\infty(D)$ beweise man

$$\int_D \Delta f \cdot h dx = -\int_D \langle \nabla f, \nabla h \rangle dx = \int_D f \cdot \Delta h dx.$$

Hinweis: Man setze f so nach $\mathbb{R}^n$ fort, dass sich das Integral nicht ändert. Dazu konstruiere man eine $C_0^\infty(D)$-Funktion, die auf dem Träger von h identisch Eins ist, und auf einer grösseren kompakten in D enthaltenen Menge verschwindet. Anschließend hilft der Satz von Fubini.

8.3 Aufgabe

Seien $U, D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : U \to D$ ein Diffeomorphismus. Für $u \in U$ sei die Matrix $g = (g_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ definiert durch

$$g(u) = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u)^T \circ \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u)$$

wobei g^{ij} die Einträge der inversen Matrix von g bezeichnen. Seien $f, h \in C^1(D)$, dann beweise man

$$\langle \nabla f, \nabla h \rangle \circ \Phi = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_i} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial u_j} = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_j} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial u_i},$$

wobei $\tilde{f} = f \circ \Phi$, $\tilde{h} = h \circ \Phi$.

8.4 Aufgabe

Man berechne die Oberfläche der Sphäre $\mathbb{S}^2 := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3$.

★ 8.5 Aufgabe

Seien $a, b > 0$. Man integriere die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{a^4} + \frac{z^2}{b^4}}$ über den Ellipsoiden

$$E := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 = 1 \right\}.$$

★ 8.6 Aufgabe

Es sei $\mathbb{S}_+^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1, x_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$. Für $p_1, \ldots, p_n > 0$ zeige man

$$\int_{\mathbb{S}_+^{n-1}} x_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{p_n} dS(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{p_1+1}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \Gamma\left(\frac{p_n+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{p_1+\ldots+p_n+n}{2}\right)}.$$

Hinweis: Sei $\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \; x_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$. Man wende auf das Integral

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{p_n} e^{-\|x\|_2^2} dx$$

die Formeln aus 32.19 (b), (c) an.

$\left[\begin{array}{l}\text{Die mit ★ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.}\\ \text{Die Lösungen geben Sie bitte am 09.12.11 in der Vorlesung ab.}\end{array}\right]$

Analysis III – Wintersemester 2011/12

Prof. H.-Ch. Grunau, Dipl.-Math. L. Pulst

9 09.12.11

★ 9.1 Aufgabe

Seien $U, D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : U \to D$ ein $C^2(D)$-Diffeomorphismus. Für $f \in C^2(D)$ und den Notationen wie in Aufgabe 8.3 beweise man

$$\Delta_\Phi \tilde{f} := (\Delta f) \circ \Phi = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\sqrt{\det(g)} g^{ij} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_j} \right).$$

Hinweis: Man betrachte für ein $h \in C_0^\infty(D)$ das Integral $\int_D \Delta f \cdot h dx$. Man benutze die Transformationsformel sowie die Aufgaben 8.1, 8.2, 8.3.

★ 9.2 Aufgabe

(a) Sei $\Phi(G) \subset \mathbb{R}^3$, wobei $G = (-1,1) \times (-\pi, \pi)$ und $\Phi(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta, \sin(\beta))^T$. Man berechne das Integral

$$\int_{\Phi(G)} z dS(x, y, z).$$

(b) Man berechne für $G = [-1,1]^3$ mit der äußeren Normalen ν das Integral

$$\int_{\partial G} \langle (x, y^2, z^3)^T, \nu(x, y, z) \rangle dS(x, y, z).$$

★ 9.3 Aufgabe

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion, d.h. $\Delta f \equiv 0$, $(x_0, y_0) \in G$ und $\overline{B_r((x_0, y_0))} \subset G$. Man zeige:

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_0 + r\cos(t), y_0 + r\sin(t)) dt.$$

Hinweis: Aus $\int_{\partial G} \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) dS(x) = 0$ folgt zunächst, dass obiges Integral bzgl. r konstant ist.

9.4 Aufgabe

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-glattes berandetes Gebiet. Sei $1 < p < \infty$. Man zeige, dass eine Konstante $C = C(n, p, \operatorname{diam}(G))$ derart existiert, dass für alle stetig differenzierbaren Funktionen $u : \overline{G} \to \mathbb{R}$ mit $u|_{\partial G} = 0$ gilt:

$$\|u\|_p \le C \cdot \|\nabla u\|_p := C \cdot \| \, \|\nabla u\|_2 \, \|_p.$$

Hinweis: Man betrachte die Konstante Funktion 1 als Divergenz des Vektorfeldes $x \mapsto x$ und wende den Satz von Gaußan.

★ 9.5 Aufgabe

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge mit C^1-Rand. Für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $u \in C^2\left(\overline{G}\right)$, $u \not\equiv 0$, Lösung des Problems

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{in } G, \\ \quad u = 0, & \text{auf } \partial G. \end{cases}$$

Man zeige $\lambda > 0$. Was gilt für die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ auf ∂G?

[Die mit ★ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 16.12.11 in der Vorlesung ab.]

Analysis III – Wintersemester 2011/12

Prof. H.-Ch. Grunau, Dipl.-Math. L. Pulst

10 16.12.11

10.1 Aufgabe

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\dot{x}\,(t) = x\,(t)\cos(t). \tag{2}$$

(a) Man skizziere das Richtungsfeld.

(b) Man bestimme und skizziere die Lösung der Differentialgleichung (2) mit der Anfangsbedingung $x\,(0) = 2$.

★ 10.2 Aufgabe

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\ddot{x}\,(t) - 2\dot{x}\,(t) + 5x\,(t) = 0.$$

(a) Man finde zwei verschiedene Lösungen, indem man den Ansatz $x\,(t) = e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{C}$ wählt.

(b) Jede Linearkombination zweier Lösungen mit komplexen Koeffizienten ist wieder ein Lösung. Man ermittle durch Bildung von Linearkombinationen der gefundenen Lösungen mit komplexen Koeffizienten zwei linear unabhängige Lösungen, die aber rein reell sind (d.h. für $x_1, x_2 \not\equiv 0$ existiert keine Konstante α, so dass $x_1\,(t) = \alpha x_2\,(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$).

★ 10.3 Aufgabe

Man löse folgende Differentialgleichung

$$y''\,(x) = \frac{1}{k}\sqrt{1 + (y'\,(x))^2}$$

für $k \neq 0$ und den Anfangsbedingungen $y\,(0) = k,\ y'\,(0) = 0$.

Hinweis: Man substituiere $u\,(x) = y'\,(x)$.

10.4 Aufgabe

Man löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x}\,(t) = x\,(t)^2 - t^2, \\ x\,(0) = 1 \end{cases}$$

durch einen Potenzreihenansatz $x\,(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$. Das heißt, man setze die Potenzreihe in die Differentialgleichung ein und bestimme eine Rekursionsformel für die a_k durch Koeffizientenvergleich. Man zeige, dass die so gefundene Potenzreihe für $t \in (-1, 1)$ absolut konvergiert.

Hinweis: Man zeige per Induktion: $|a_k| \leq 1$.

10.5 Aufgabe

Es sei

$$\dot{x}(t) = -x(t)^2 + x(t) + 2x(t)\,t^2 + 2t - t^2 - t^4.$$

(a) Man zeige, dass $x(t) = 1 + t^2$ die Differentialgleichung löst.

(b) Sei $x_1(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung mit Anfangswert $x_1(0) < 1$. Man beweise, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $x_1(t) < 1 + t^2$.

★ 10.6 Aufgabe

(a) Man zeige, dass $x_1(t) \equiv 0$ und $x_2(t) = \frac{1}{27}t^3$ Lösungen des Anfangswertproblems

$$(1) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)^{\frac{2}{3}}, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

für $x_0 = 0$ sind. Diese Lösungen sind verschieden. Warum ist dies kein Widerspruch zu Satz 34.14?

(b) Man zeige, dass das Anfangswertproblems (1) mit $x_0 = 1$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung besitzt, die für $t \geq 0$ eindeutig ist.

10.7 Aufgabe

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $G \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, $f : I \times G \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung (bzgl. x). Seien $t_0 \in I$, $K \subset G$ kompakt und seien für $x_{0,1}, x_{0,2} \in K$

$$x_1, x_2 : [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_1] \to K \hookrightarrow G$$

stetig differenzierbare Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\begin{cases} \dot{x}_j(t) = f(t, x_j(t)), \quad t \in [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_1] \\ x_j(t_0) = x_{0,j}. \end{cases}$$

Man beweise, dass es eine Konstante $L > 0$ gibt, so dass für alle $t \in [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_1]$ gilt:

$$\|x_2(t) - x_1(t)\| \leq \|x_{0,2} - x_{0,1}\|\, e^{L|t-t_0|}.$$

Hinweis: Man benutze das Gronwallsche Lemma mit $a = \|x_{0,2} - x_{0,1}\|$ in 34.14.

10.8 Aufgabe

Man bestimme für folgende Anfangswertprobleme

(a) $t_{\min}$ und $t_{\max}$: $\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)^3, \\ x(0) = 1. \end{cases}$

(b) $t_{\max}$: $\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t)\,z(t) - x(t)^3, \\ \dot{y}(t) = -x(t)\,z(t) - y(t)^3, \\ \dot{z}(t) = 2x(t)\,y(t) - z(t)^3, \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,\ z(0) = z_0. \end{cases}$

(c) $t_{\min}$ und $t_{\max}$: $\begin{cases} \dddot{x}(t) = t^3\left(x(t) + \dot{x}(t) + \ddot{x}(t)\right), \\ x(0) = 1, \\ \dot{x}(0) = \dfrac{1}{2}, \\ \ddot{x}(0) = 0. \end{cases}$

10.9 Aufgabe

Die Funktion $f\left(\left(t,x\right)\right.$ sei im Streifen $S = J \times \mathbb{R}$, $J = [0,a]$, stetig und genüge der Bedingung

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq \frac{k}{t}|x-y| \quad \text{für } 0 \leq t \leq a \quad \text{und } x,y \in \mathbb{R}$$

mit $k < 1$. Man zeige, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t,x), \text{ in } J \\ x(0) = \eta \end{cases}$$

genau eine Lösung besitzt, und dass sie sich durch sukzessive Approximation berechnen lässt.

Hinweis: Man zeige, dass der Operator T

$$(Tu)(t) = \int_0^t f(\tau, \eta + u(\tau))\, d\tau,$$

im Banachraum B aller Funktionen $u \in C(J)$ mit endlicher Norm

$$\|u\| = \sup\left\{\frac{|u(t)|}{t} : 0 < t \leq a\right\}$$

einer Lipschitzbedingung genügt. Die Fixpunkte von T sind dann, bis auf eine Konstante, die Lösungen des Anfangswertproblems.

Die mit ★ gekennzeichneten Aufgaben sind Zusatzaufgaben. Sie können sich damit zusätzliche Punkte erarbeiten, ohne dass die Grenze der 100 Prozent bei den Hausaufgaben erhöht wird. Die Lösungen geben Sie bitte am 13.01.12 in der Vorlesung ab.

Analysis III – Wintersemester 2011/12

Prof. H.-Ch. Grunau, Dipl.-Math. L. Pulst

11 13.01.12

★ 11.1 Aufgabe

Gegeben sei eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, mit der Eigenschaft

$$\langle \xi, f(t, \xi) \rangle < 0 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, t \in \mathbb{R},$$

und die bezüglich x einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt. Sei $u : [0, a] \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$. Man zeige, dass u als Lösung bis $+\infty$ fortgesetzt werden kann.

★ 11.2 Aufgabe

Man integriere die folgenden Differentialgleichungen:

(a) $\left(1 - t^2\right) \dot{x}(t) - tx(t) - tx(t)^2 = 0;$

(b) $t\dot{x}(t) + x(t)\left(1 - tx(t)^n\right) = 0;$

(c) $\ddot{x}(t) = \frac{1}{t}\dot{x}(t) + t^2 \sin(t);$

(d) $2x(t)\ddot{x}(t) - \dot{x}(t)^2 - 1 = 0;$

(e) $\ddot{x}(t)\sqrt{1 - x(t)^2} = 1.$

★ 11.3 Aufgabe

Für $x_0 \in \mathbb{R}$ betrachte man das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -2t\left(t^2 - 1\right) x(t)^2, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Man bestimme den maximalen Definitionsbereich in Abhängigkeit von x_0.

★ 11.4 Aufgabe

Die Funktion $k(x, t, y)$ sei für $0 \le t \le a$, $-\infty < y < \infty$ stetig und genüge einer Lipschitzbedingung bezüglich y, die Funktion $g(x)$ sei für $0 \le x \le a$ stetig. Man zeige, dass

$$y(x) = g(x) + \int_0^x k(x, t, y(t))\, dt$$

genau eine in $0 \le x \le a$ stetige Lösung besitzt.

11.5 Aufgabe

Sei $f = f(x) \in C([0,b])$. Für $\alpha > 0$ sei das folgende Anfangswertproblem gegeben

$$\begin{cases} y''(x) + \dfrac{\alpha}{x} y'(x) = f(x) \text{ in } (0,b], \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{$\star$}$$

Man beweise:

(a) Sei $y \in C([0,b]) \cap C^2((0,b])$, y' beschränkt und löse $(\star)$. Dann gilt

$$y \in C^2([0,b]), \; y'(0) = 0, \; \lim_{x \searrow 0} \frac{y'(x)}{x} = y''(0) = \frac{f(0)}{\alpha+1}$$

und

$$y(x) = y_0 + \int_0^x s^{-\alpha} \int_0^s t^\alpha f(t)\, dtds.$$

(b) Sei

$$y(x) := y_0 + \int_0^x s^{-\alpha} \int_0^s t^\alpha f(t)\, dtds,$$

dann löst y das Anfangswertproblem $(\star)$ und es gilt:

$$y \in C^2([0,b]), \; y'(0) = 0, \; \lim_{x \searrow 0} \frac{y'(x)}{x} = y''(0) = \frac{f(0)}{\alpha+1}.$$

11.6 Aufgabe

Die Funktion $f(x,y)$ sei in $[0,b] \times \mathbb{R}$ stetig und genüge bezüglich y einer Lipschitzbedingung. Man zeige, dass das Anfangswertproblem $(\star)$ aus Aufgabe 11.5 mit $\alpha > 0$ genau eine Lösung $y \in C^2([0,b])$ besitzt.

[Die mit ★ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 20.01.12 in der Vorlesung ab.]

12 20.01.12

12.1 Aufgabe

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Man bestimme $e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k$.

12.2 Aufgabe

(a) Sei $[0, \infty) \ni t \mapsto A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig mit $\operatorname{Spur} A(t) \le -\frac{1}{t+1}$ für $t \in [0, \infty)$, und sei $X := (x_1(.), \ldots, x_n(.))$, wobei $\{x_1(.), \ldots, x_n(.)\}$ ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ bildet. Man zeige, dass dann

$$\lim_{t \to \infty} \det X(t) = 0$$

gilt.

(b) Sei $[0, T] \ni t \mapsto A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig und $X := (x_1(.), \ldots, x_n(.))$, $Y := (y_1(.), \ldots, y_n(.))$ seien die Matrizen aus den Fundamentalsystemen $\{x_1(.), \ldots, x_n(.)\}$ bzw. $\{y_1(.), \ldots, y_n(.)\}$ der Differentialgleichungssysteme $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ bzw. $\dot{y}(t) = -A^T(t)y(t)$ mit $X(0) = Y(0) = Id$. Man zeige, dass für $t \in [0, T]$ gilt:

$$X(t) = \left(Y^T(t)\right)^{-1}.$$

12.3 Aufgabe

Gegeben seien ein Intervall I, zwei stetige Funktionen $P, Q : I \to \mathbb{R}$ und die homogene Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + P(t)\dot{x}(t) + Q(t)x(t) = 0. \tag{3}$$

Nun seien x_1, x_2 zwei linear unabhängige Lösungen von (3). Man zeige:

(a) x_1 und x_2 haben keine gemeinsame Nullstelle.
Hinweis: Durch Widerspruch: Man berechne die Wronski-Determinante einer gemeinsamen Nullstelle.

(b) Die Nullstellen von x_1 und x_2 sind alternierend in I, d.h. x_1 genau eine Nullstelle zwischen zwei aufeinander folgenden Nullstellen von x_2 besitzt.
Hinweis: Seien a und b zwei aufeinander folgende Nullstellen von x_2; man nehme an, dass x_1 keine Nullstelle in $[a, b]$ besitzt. Man studiere die Wronski-Determinante $W(t)$ in den Punkten a und b.

12.4 Aufgabe

(a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$$

für $t \in I$ eine stetige Abbildung. Die Differentialgleichung $\dot{y}(t) = A(t)\, y(t)$ besitze die spezielle Lösung $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^2$. Im Teilintervall $J \subset I$ gelte $\phi_1(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. Man zeige: Man erhält eine zweite Lösung $\psi : J \to \mathbb{R}^2$ durch den Ansatz

$$\psi(t) = u(t) \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

wobei $u, g : J \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sind, die den folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$\dot{g}(t) = \left(a_{22}(t) - a_{12}(t) \frac{\phi_2(t)}{\phi_1(t)} \right) g(t), \quad \dot{u}(t) = \frac{a_{12}(t)}{\phi_1(t)} g(t).$$

(b) Man betrachte für $t > 0$ das folgende homogene Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = \frac{1}{t} y_1(t) - y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = \frac{1}{t^2} y_1(t) + \frac{2}{t} y_2(t). \end{cases}$$

Man schreibe dieses System in Matrix-Form und gebe ein Fundamentalsystem an. Man benutze die Methode aus (a).

12.5 Aufgabe

Für das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (3t-1)\, x(t) + (t-1)\, y(t) \\ \dot{y}(t) = -(t+2)\, x(t) + (t-2)\, y(t). \end{cases}$$

berechne man ein Fundamentalsystem.

Hinweis: Aufgabe 12.4. Eine Lösung des Systems ist von der Form $(\phi(t), -\phi(t))$.