Übungen zu "Dynamische Systeme" **H.-Ch. Grunau**

Blatt 1

03.04.2006

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$-\ddot{x} = f(x)$$

mit $f = U'$ und $U \in C^2((\alpha, \beta), \mathbb{R})$ und schreiben Sie diese in der Form

$$\dot{x} = p, \qquad \dot{p} = -U'(x).$$

(a) Skizzieren Sie die Phasenportraits für folgende Potentiale:

- $U(x) = -\frac{1}{x} + \frac{a}{x^2}, \quad (x \neq 0)$ mit einer Konstanten $a > 0$.
-
-

(b) Zeigen Sie, dass auf jeder auf einem Intervall existierenden Lösung $t \mapsto x(t)$ die Energie

$$E(t) := \frac{1}{2}p(t)^2 + U(x(t))$$

konstant ist.

(c) Sei $t \mapsto x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung auf einem Zeitintervall $[t_1, t_2]$ mit Energie E_0; die Lösung sei dort monoton wachsend. Es bezeichne $x_1 := x(t_1)$, $x_2 := x(t_2)$. Zeigen Sie, dass für die Zeit, um von x_1 nach x_2 (in positiver Richtung!) zu gelangen, gilt:

$$t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2(E_0 - U(x))}}.$$

(d) Die Differentialgleichung des mathematischen Pendels lautet:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell}\sin(\varphi).$$

Dabei bezeichnet φ den momentanen Auslenkungswinkel aus der vertikalen Ruhelage, ℓ die Länge des Pendels und g die Erdbeschleunigung.

Leiten Sie aus (c) ein Integral für die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels her.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Bewegung eines Massenpunktes in $\mathbb{R}^3$ in einem Zentralfeld, d.h. betrachten Sie die Differentialgleichung

$$-m\ddot{x} = \nabla U(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

mit $U \in C^2((0,\infty),\mathbb{R})$ und Masse m.

(a) Zeigen Sie, dass für jede auf einem Intervall existierende Lösung $t \mapsto x(t)$ das Drehmoment

$$M(t) := mx(t) \times \dot{x}(t)$$

konstant ist.

(b) Man zeige, dass die Bewegung in ebenen Bahnen (senkrecht zum konstanten Vektor M) erfolgt.

(c) Man zeige das Keplersche Gesetz, wonach der „Fahrstrahl" bezüglich des Ursprungs in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht.

Hinweis. Zeigen Sie zunächst, dass man durch eine Rotation des Koordinatensystems erreichen kann, dass die Bewegung in der $x_1 - x_2$–Ebene stattfindet. Verwenden Sie dann den Gaußschen Integralsatz.

Abgabe: Montag, 17.4.2006, in der Vorlesung.

Übungen zu "Dynamische Systeme" **H.-Ch. Grunau**
Blatt 2
12.04.2006

Definition
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt in $x_0 \in D$ **unterhalbstetig**, falls für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_0) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_k).$$

Die Funktion f heißt **unterhalbstetig** (in D), falls sie in jedem $x_0 \in D$ unterhalbstetig ist.

Aufgabe 1
Eine Teilmenge $O \subset \mathbb{R}^n$ ist offen genau dann, wenn die charakteristische Funktion $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto 1_O(x)$ unterhalbstetig ist.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass mit den Bezeichnungen und unter den Voraussetzungen des Satzes 2.3 der Vorlesung gilt:

$$G \ni U_0 \mapsto T^+(U_0) \;\text{ ist unterhalbstetig.}$$

Hinweis. Satz 2.7.

Aufgabe 3
Studieren Sie das nicht autonome Anfangswertproblem

$$\dot{u}\,(t) = -2(t-1)u(t)^2, \quad u(0) = u_0,$$

um zu zeigen, dass $u_0 \mapsto T^+(u_0)$ im Allgemeinen nicht stetig ist.

Aufgabe 4
Entwickeln Sie aus Aufgabe 3 ein Beispiel für ein autonomes System, bei dem die Funktion T^+ im Allgemeinen ebenfalls unstetig ist.

Aufgabe 5
Beschreiben Sie das Phasenporträt eines ebenen linearen Flusses, wenn mindestens ein Eigenwert 0 ist.

Abgabe: Mittwoch, 03.05.2006, in der Vorlesung.

Übungen zu "Dynamische Systeme" **H.-Ch. Grunau**
Blatt 3
03.05.2006

Aufgabe 1
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie:
$$\det\left(e^A\right) = e^{\operatorname{Spur}(A)}.$$

Aufgabe 2
Man zeige, dass die Menge der „hyperbolischen Matrizen"
$$H := \left\{A \in \mathbb{C}^{n\times n}:\ \sigma_n(A) = \emptyset\right\}$$
offen und dicht in $\mathbb{C}^{n\times n}$ ist.
Hinweis. Windungszahl oder Abbildungsgrad aus der Funktionentheorie. Jordansche Normalform.

Aufgabe 3
Man betrachte die Gleichung des gedämpften mathematischen Pendels
$$\ddot{\varphi} + \alpha\,\dot{\varphi} + \beta\sin(\varphi) = 0$$
mit Reibungskoeffizienten $\alpha > 0$ und $\beta := g/\ell > 0$ in der Form
$$\dot{\varphi} = p, \qquad \dot{p} = -\alpha p - \beta\sin(\varphi)$$
und diskutiere die Stabilität der kritischen Punkte.

Aufgabe 4
Sei $0 \in G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F: G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $F(0) = 0$. Zeigen Sie: Besitzt $DF(0)$ einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$, so existiert eine nichttriviale Lösung $x: (-\infty, 0] \to G$ von $\dot{x} = F(x)$ mit
$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0.$$
Hinweis. Benutzen Sie den Instabilitätssatz 4.3, um ein $\varepsilon > 0$, Folgen $\xi_k \to 0$, $t_k \to -\infty$, $(k \to \infty)$ sowie Lösungen $\dot{x}_k = F(x_k)$ zu finden mit $|x_k(0)| = \varepsilon$ und $x_k(t_k) = \xi_k \to 0$, $(k \to \infty)$. Man überlege sich, dass mit modifiziertem $\varepsilon > 0$ der Beweis von 4.3 nicht nur mit φ, sondern gleichzeitig auch mit $\psi(t) = \frac{1}{2}\|Px(t)\|^2 - \|Qx(t)\|^2$ geführt werden kann.

Aufgabe 5
Sei $0 \in G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F: G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $F(0) = 0$. Zeigen Sie: Besitzt $DF(0)$ einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda < 0$, so existiert eine nichttriviale Lösung $x: [0, \infty) \to G$ von $\dot{x} = F(x)$ mit
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$
Hinweis. Aufgabe 4.

Abgabe: Mittwoch, 17.05.2006, in der Vorlesung.

Übungen zu "Dynamische Systeme" **H.-Ch. Grunau**
Blatt 4
17.05.2006

Aufgabe 1
Das folgende autonome System tritt in der Modellierung von Zellteilungen auf:

$$\begin{cases} \dot{x}\,(t) = -x + \frac{1}{2+z}, \\ \dot{y}\,(t) = x - y, \\ \dot{z}\,(t) = y - z, \end{cases} \tag{1}$$

wobei nur solche Lösungen betrachtet werden sollen, dass für $t \geq 0$ stets $x(t) \geq 0, y(t) \geq 0, z(t) \geq 0$ gilt. Zeigen Sie, dass es in $[0,\infty)^3$ genau einen Ruhepunkt gibt und diskutieren Sie dessen Stabilitätsverhalten.

Aufgabe 2
Betrachten Sie das System (1) aus Aufgabe 1 und zeigen Sie, dass $[0,\infty)^3$ positiv invariant ist. Bestimmen Sie eine Folge kompakter positiv invarianter Teilmengen von $[0,\infty)^3$, deren Vereinigung $[0,\infty)^3$ ergibt. Zeigen Sie so, dass für jedes $(x_0, y_0, z_0) \in [0,\infty)^3$ die Lösung von (1) mit $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0$ für alle positiven Zeiten $t \geq 0$ in $[0,\infty)^3$ existiert.

Aufgabe 3
Das folgende autonome System

$$\begin{cases} \dot{x}\,(t) = \frac{1}{\varepsilon}\left(x + y - xy - x^2\right), \\ \dot{y}\,(t) = -xy - y + 2z, \\ \dot{z}\,(t) = x - z, \end{cases} \tag{2}$$

ist für ein bestimmtes Regime ein Spezialfall von Systemen, die zur Beschreibung von „Belousov-Zhabotinsky-Reaktionen“ verwendet werden. Dabei ist $\varepsilon > 0$ ein „kleiner“ Parameter.
Bestimmen Sie den Ruhepunkt in $(0,\infty)^3$ und bestimmen Sie für diesen sowie für $(0,0,0)$ das Stabilitätsverhalten von (2).
Hinweis. Bei der Untersuchung von $(0,0,0)$ betrachten Sie zunächst ein einfacheres Polynom, dessen Nullstellen leicht explizit zu berechnen sind und verändern dann einen Parameter bis zum realen Wert. Zeigen Sie, dass bei diesem Prozess keine Nullstelle des Polynoms die imaginäre Achse kreuzen kann.

Aufgabe 4
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $0 \in I$ und $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zu gegebenem x_0 soll eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}\,(t) = f(t, x(t)), t \in I, \qquad x(0) = x_0 \tag{3}$$

gesucht werden. Wir nehmen an, dass (3) eine Oberlösung $v : I \to \mathbb{R}$

$$\dot{v}\,(t) \geq f(t, v(t)), t \in I, \qquad v(0) =: v_0 \geq x_0$$

und eine Unterlösung $u : I \to \mathbb{R}$

$$\dot{u}\,(t) \leq f(t, u(t)), t \in I, \qquad u(0) =: u_0 \leq x_0$$

mit $\forall t \in I : u(t) \leq v(t)$ besitzt. Zeigen Sie, dass die Lösung $x(\,.\,)$ von (3) auf dem gesamten positiven Intervall $I \cap [0, \infty)$ existiert.
Hinweis. Führen Sie eine zusätzliche Variable $y(t) = t$ ein und betrachten Sie das autonome System für $(x(\,.\,), y(\,.\,))$. Konstruieren Sie für dieses unter Benutzung von $u(\,.\,)$ und $v(\,.\,)$ eine geeignete positiv invariante Menge.

Abgabe: Mittwoch, 07.06.2006, in der Vorlesung.

Übungen zu "Dynamische Systeme" **H.-Ch. Grunau**

Blatt 5

07.06.2006

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei $x_0 \in G$ so, dass die Menge $\{x_0\}$ stabil bzgl. des von $\dot{x}\,(t) = f(x(t))$ erzeugten Flusses ist.
Man zeige, dass dann $f(x_0) = 0$, d.h. x_0 ein kritischer Punkt ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ f(x) := -\nabla V(x)$ besitze nur endlich viele Nullstellen und für jedes $c \in \mathbb{R}$ sei $V^{-1}((-\infty, c])$ kompakt. Betrachten Sie das autonome System $\dot{x}\,(t) = f(x(t))$ und den davon erzeugten Fluss $U(\,.\,,\,.\,)$. Zeigen Sie:

(a) $\forall x \in \mathbb{R}^n :\ T^+(x) = +\infty$.

(b) Seien $x_1, \ldots, x_k$ die Nullstellen von f. Dann existiert für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} U(t,x)$, und es gibt ein $j \in \{1, \ldots, k\}$ so, dass

$$\lim_{t\to\infty} U(t,x) = x_j.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n),\ n > 2$ eine (strikt) positive Lösung von

$$\forall x \in \mathbb{R}^n :\ -\Delta u(x) = u(x)^p; \tag{4}$$

dabei sei $p > (n+2)/(n-2)$. Weiter nehmen wir an, dass u radialsymmetrisch ist, d.h. $\exists v \in C^2([0,\infty))$ so dass $\forall x \in \mathbb{R}^n :\ u(x) = v(|x|)$.

(a) Zeigen Sie: $v'(0) = 0$. Für $r > 0$ gilt die radiale Form der Differentialgleichung (4)

$$-v''(r) - \frac{n-1}{r} v'(r) = v(r)^p. \tag{5}$$

(b) Für $t \in \mathbb{R}$ sei

$$w(t) := e^{2t/(p-1)} v(e^t).$$

Zeigen Sie, dass w mit geeigneten Konstanten $K_0 > 0, K_1 > 0$ die folgende autonome Differentialgleichung löst:

$$-w''(t) - K_1 w'(t) + K_0 w(t) = w(t)^p. \tag{6}$$

Außerdem ist

$$\lim_{t\to-\infty} w(t) = \lim_{t\to-\infty} w'(t) = \lim_{t\to-\infty} w''(t) = 0.$$

(c) Betrachten Sie für das vorher definierte w die Lyapunovfunktion

$$L(t) := \frac{1}{2}w'(t)^2 - \frac{K_0}{2}w(t)^2 + \frac{1}{p+1}w(t)^{p+1},$$

d.h. zeigen Sie, dass $t \mapsto L(t)$ streng monoton fallend ist, sofern w nicht konstant ist. Folgern Sie, dass $L(t) < 0$, dass $w(t)$ und $w'(t)$ für $t \to \infty$ beschränkt sind und dass $\int_{\mathbb{R}} w'(s)^2\, ds < \infty$.

(d) Man folgere nun aus der Differentialgleichung (6), dass auch $\int_{\mathbb{R}} w''(s)^2\, ds < \infty$. Es gibt also eine Folge $t_k \nearrow \infty$, so dass

$$\lim_{k\to\infty} w(t_k)\left(w(t_k)^{p-1} - K_0\right) = 0; \quad \lim_{k\to\infty} L(t_k) = -\frac{p-1}{2(p+1)}K_0^{(p+1)/(p-1)}.$$

Daraus folgere man

$$\lim_{t\to\infty} w(t) = K_0^{1/(p-1)}, \quad \text{d.h. } \lim_{|x|\to\infty} \left(u(x)|x|^{2/(p-1)}\right) = K_0^{1/(p-1)}.$$

Abgabe: Mittwoch, 21.06.2006, in der Vorlesung.

Übungen zu "Dynamische Systeme" **H.-Ch. Grunau**
Blatt 6
21.06.2006

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Poincaré-Bendixson, dass das ebene System

$$\begin{cases} \dot{x}\,(t) &= -x - y + (x^2 + 2y^2)x, \\ \dot{y}\,(t) &= x - y + (x^2 + 2y^2)y \end{cases}$$

eine nichttriviale periodische Lösung besitzt.
Hinweis. Zeitumkehr.

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Sei $R > 0$ eine Konstante. In $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ betrachte man das dynamische System

$$\Big(\dot{x}\,(t), \dot{y}\,(t), \dot{z}\,(t)\Big) = f(x(t), y(t), z(t)) \tag{7}$$

mit

$$f(x,y,z) = \left(-\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2\pi y, -\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\pi x, \sqrt{x^2+y^2} - R \right).$$

(a) Man bestimme alle kritischen Punkte in G.

(b) Man zeige, dass für $0 < r < R$ durch

$$(x(t), y(t), z(t)) = ((R + r\cos t)\cos(2\pi t), (R + r\cos t)\sin(2\pi t), r\sin t)$$

eine Lösung von (7) gegeben ist.

(c) Für $(x,y,z) = (R + r, 0, 0)$ bestimme man die ω-Limesmenge $\omega(x,y,z)$. Handelt es sich um eine periodische Lösung, bzw. enthält $\omega(x,y,z)$ eine periodische Lösung von (7)?

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Betrachten Sie das van der Pol-System mit Parameter $\mu > 0$

$$\begin{cases} \dot{x}\,(t) &= \mu(y - x^3 + x), \\ \dot{y}\,(t) &= -x \end{cases} \tag{8}$$

und gehen Sie davon aus, dass man wie in §6 der Vorlesung für jedes $\mu > 0$ die Existenz genau einer nichttrivialen periodischen Lösung nachweisen kann.
Mit Hilfe geeigneter positiver bzw. negativ invarianter Mengen zeige man, dass diese periodischen Lösungen für $\mu \to \infty$ gegen diejenige geschlossene Kurve konvergieren, die aus den horizontalen Strecken durch die lokalen Extrema von $h(x) = x^3 - x$ und die davon ausgeschnittenen monoton wachsenden Bereiche des Graphen von h besteht.

Abgabe: Mittwoch, 05.07.2006, in der Vorlesung.