Prof. H.-Chr. Grunau
Dipl.-Math. L. Pulst

09.10.2012
Wintersemester 2012/13

ÜBUNGEN ZUR DIFFERENTIALGEOMETRIE I
BLATT 1

(1) (a) Seien $c : I \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{c} : J \to \mathbb{R}^n$ regulär parametrisierte Kurven. Zeigen Sie, dass die folgende Relation eine Äquivalenzrelation ist (vgl. Definition 1.3(b)):

c und $\tilde{c}$ sind äquivalent wenn sie Umparametrisierungen voneinander sind.

(b) Seien $c : I \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{c} : J \to \mathbb{R}^n$ regulär parametrisierte Kurven. Zeigen Sie, dass die folgende Relation eine Äquivalenzrelation ist (vgl. Definition 1.3(d)):

c und $\tilde{c}$ sind äquivalent wenn sie durch eine orientierungserhaltende Parametertransformation auseinander hervorgehen.

(c) Zeigen Sie, dass die beiden regulären parametrisierten Kurven c_1 und c_2 dieselbe Spur haben, aber trotzdem nicht äquivalent sind, wobei

$$c_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad c_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix},$$
$$c_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad c_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

(2) Die *Epizykloide* ist eine ebene Kurve, die von einem festen Punkt p auf einer Kreislinie K erzeugt wird, wenn K ohne zu gleiten auf der Außenseite eines festen Kreises K_0 rollt. Geben Sie eine Parameterdarstellung c der Epizykloide an, wenn K den Radius r hat, K_0 seinen Mittelpunkt im Ursprung und den Radius r_0 hat und p sich zu Beginn der Rollbewegung bei $(r_0, 0)$ befindet. Sei $m := \frac{r_0}{r} \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass es ein $L > 0$ gibt, so dass $c(0) = c(L)$. Ist die Parametrisierung regulär?

★ (3) (a) Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine parametrisierte reguläre Kurve. Zeigen Sie: $L(c) \geq |c(b) - c(a)|$. D.h., die Verbindungsstrecken sind in der Ebene immer die kürzesten Verbindungskurven.

(b) Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte reguläre Kurve, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Bewegung, d.h. $F(x) = Ax + b$ mit $A \in O(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: $L(c) = L(F \circ c)$.

(c) Sei $c : [a, b] \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte reguläre Kurve; $\tilde{c}$ sei der kürzere Teil des Großkreises durch $c(a)$ und $c(b)$. Man zeige, dass $L(c) \geq L(\tilde{c})$.

Hinweis: Verwenden Sie (b) um zu zeigen, dass Sie o.B.d.A. annehmen können, dass $c(a)$ und $c(b)$ auf einem „Längenkreis“ liegen.

(4) Betrachten Sie $G : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)^T\} \to \mathbb{R}^2$,
$$G \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{p^1}{1-p^3} \\ \frac{p^2}{1-p^3} \end{pmatrix}$$
Man zeige, dass G bijektiv ist und berechne $F = G^{-1}$. Zeigen Sie, dass F konform ist, d.h.
$$\left|\frac{\partial F}{\partial u^1}\right| = \left|\frac{\partial F}{\partial u^2}\right|, \qquad \frac{\partial F}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial F}{\partial u^2} = 0.$$

Die Aufgabenblätter finden Sie unter
http://www-ian.math.uni-magdeburg.de/~pulst/Differentialgeometrie_I.html.

Ihre Lösungen der mit einem Stern ★ versehenen Aufgabe geben Sie bitte am 16.10.2012 vor der Vorlesung ab.

Bitte bereiten Sie die übrigen Aufgaben als Präsenzaufgaben für die Übung vor.

Prof. H.-Chr. Grunau
Dipl.-Math. L. Pulst

11.10.2012
Wintersemester 2012/13

ÜBUNGEN ZUR DIFFERENTIALGEOMETRIE I
BLATT 1 – ZUSATZ

(1) Wir lassen in der (x, y)-Ebene eine Kreisscheibe vom Radius 1 in Richtung der positiven x-Achse abrollen. Eine zweite Kreisscheibe mit Radius $r > 0$ habe denselben Mittelpunkt und sei fest mit der ersten verbunden.

(a) Man begründe: Die sogenannte Zykloide $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$c(t) := \begin{pmatrix} t - r\sin(t) \\ 1 - r\cos(t) \end{pmatrix},$$

beschreibt dann eine Bahn, die ein Punkt auf dem Rand der zweiten Kreisscheibe durchläuft.

(b) Man skizziere die parametrisierte Kurve für die Fälle $r < 1$, $r = 1$, $r > 1$.

(c) In welchen Fällen ist die parametrisierte Kurve regulär?

(d) Im Falle $r = 1$ bestimme man die Länge der Kurve für einen Umlauf der Kreisscheibe.

Achtung!!

Sie können die Aufgabe 3 von Blatt 1 auch erst nächsten Freitag (19.10.2012) vor der Vorlesung abgeben.

Prof. H.-Chr. Grunau
Dipl.-Math. L. Pulst

16.10.2012
Wintersemester 2012/13

ÜBUNGEN ZUR DIFFERENTIALGEOMETRIE I
BLATT 2

(1) *(Blatt1, Aufgabe 1.)*

(a) Seien $c : I \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{c} : J \to \mathbb{R}^n$ regulär parametrisierte Kurven. Zeigen Sie, dass die folgende Relation eine Äquivalenzrelation ist (vgl. Definition 1.3(b)):

c und $\tilde{c}$ sind äquivalent wenn sie Umparametrisierungen voneinander sind.

(b) Seien $c : I \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{c} : J \to \mathbb{R}^n$ regulär parametrisierte Kurven. Zeigen Sie, dass die folgende Relation eine Äquivalenzrelation ist (vgl. Definition 1.3(d)):

c und $\tilde{c}$ sind äquivalent wenn sie durch eine orientierungserhaltende Parametertransformation auseinander hervorgehen.

(c) Zeigen Sie, dass die beiden regulären parametrisierten Kurven c_1 und c_2 dieselbe Spur haben, aber trotzdem nicht äquivalent sind, wobei

$$c_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad c_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix},$$
$$c_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad c_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

(2) Betrachten Sie für Parameter $a \geq b > 0$ die parametrisierte Ellipse $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto c(t) = (a \sin t, b \cos t)^T$. Bestimmen Sie deren Bogenlänge $L(c)$. Finden Sie eine Umparametrisierung $\varphi : [0, L(c)] \to [0, 2\pi]$ derart, dass $c \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Hinweis: Ohne einen Blick in ein Buch über spezielle Funktionen wird Ihnen die Lösung dieser Aufgabe nicht gelingen.

★ (3) Zeigen Sie, dass die Zykloide $c : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2, c(t) = (t + \sin(t), 1 - \cos(t))^T$ nach der Bogenlänge durch

$$\tilde{c}(s) = \begin{pmatrix} 2 \arcsin\left(\frac{s}{4}\right) + \frac{s}{2}\sqrt{1 - \frac{s^2}{16}} \\ \frac{s^2}{8} \end{pmatrix}, \; s \in [-4, 4],$$

parametrisiert wird. Nun bewege sich ein Massenpunkt reibungsfrei entlang der Zykloide. Die Erdbeschleunigung sei dabei $-ge_2, g \approx \pi^2$. Berechnen Sie die Zeit, die der Massenpunkt zum tiefsten Punkt braucht, wenn er an einem Punkt der Zykloide der Höhe $h_0 = h(0)$ losgelassen wird.

Hinweis: Benutzen Sie die soeben gewonnene Parametrisierung nach der Bogenlänge. Die Tangentialgeschwindigkeit ergibt sich aus der potentiellen Energie, d.h. $\dot{s}(\tau) = -\sqrt{2g(h_0 - h(\tau))}$, wobei $h(\tau)$ die Höhe des Massenpunktes zum Zeitpunkt τ ist.

(4) Betrachten Sie den Zylindermantel $Z = \{(x,y,z)^T, x^2+y^2 = 1\}$ und die Einheitssphäre $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z)^T, x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Es bezeichne außerdem $L = \{(x,0,z)^T, x \leq 0, x^2+z^2 = 1\}$ den halben „Nullmeridian“. Es sei $\Phi : \mathbb{S}^2 \setminus L \to Z$ die orthogonale Projektionsabbildung von Punkten der Sphäre in den Zylindermantel. Weiter entsteht durch „Aufwickeln“ $\Psi : (-\pi,\pi) \times \mathbb{R} \to Z, \Psi(\varphi,h)^T = (\cos\varphi, \sin\varphi, h)^T$ der Zylindermantel aus der Ebene. Wir betrachten die Koordinatenabbildung $\Psi^{-1} \circ \Phi : \mathbb{S}^2 \setminus L \to (-\pi,\pi) \times \mathbb{R}$ und die Parametrisierung $\Phi^{-1} \circ \Psi : (-\pi,\pi) \times (-1,1) \to \mathbb{S}^2 \setminus L$. Berechnen Sie diese Abbildungen. Zeigen Sie, dass $\Phi^{-1} \circ \Psi$ flächentreu, aber nicht konform (vgl. Aufgabe 1.4) ist.

(5) (a) Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine parametrisierte reguläre Kurve mit konstanter Krümmung $\kappa(t) \equiv \kappa_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $c(I)$ Teilmenge eines Kreises oder einer Geraden ist.

(b) Es sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve, so dass $|c(t)| \leq R$ für ein $R > 0$ und alle $t \in I$, d.h. c verläuft innerhalb der Kreisscheibe mit Radius R um den Nullpunkt. Man zeige: Wenn die Kurve für einen inneren Punkt $t_0 \in I^\circ$ den Rand der Kreisscheibe mit $|c(t_0)| = R$ berührt, so ist dort $|\kappa(t_0)| \geq \frac{1}{R}$.

Hinweis: Man betrachte die Ableitungen $\frac{d}{dt}|c(t)|^2$ und $\frac{d^2}{dt^2}|c(t)|^2$ an der Stelle $t = t_0$.

Ihre Lösungen der mit einem Stern ★ versehenen Aufgabe geben Sie bitte am 23.10.2012 vor der Vorlesung ab.

Bitte bereiten Sie die übrigen Aufgaben als Präsenzaufgaben für die Übung vor.

Prof. H.-Chr. Grunau
Dipl.-Math. L. Pulst

23.10.2012
Wintersemester 2012/13

ÜBUNGEN ZUR DIFFERENTIALGEOMETRIE I
BLATT 3

(1) Zeigen Sie, dass die Krümmung orientierter ebener Kurven invariant unter orientierungsgerhaltenden Bewegungen (d.h. $F(x) = Ax + b$ mit $A \in SO(2)$ und $b \in \mathbb{R}^2$) ist.

(2) (a) Unter der Annahme, dass die $\mathbb{S}^2$ ein geeignetes Modell für unsere Erde ist, berechnen Sie die kürzeste Verbindung $c(\,.\,)$ von Frankfurt nach Los Angeles. Fertigen Sie mit maple o.ä. ein Bild von $c(\,.\,)$ an.

(b) Betrachten Sie ähnlich wie in Aufgabe 2.4 $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z)^T, x^2+y^2+z^2 = 1\}$, $L = \{(x,0,z)^T, x \leq 0, x^2+z^2 = 1\}$ und für eine geeignete glatte Funktion $h : I \to (-1,1)$ mit $h' > 0$

$$F : (-\pi,\pi) \times I \to \mathbb{S}^2 \setminus L, \qquad F\begin{pmatrix} \varphi \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-h(x)^2}\cos(\varphi) \\ \sqrt{1-h(x)^2}\sin(\varphi) \\ h(x) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie h so, dass F konform ist. Berechnen Sie F^{-1}.

Hinweis. F^{-1} heißt Mercatorprojektion.

(c) Projizieren Sie die kürzeste Verbindung $c(\,.\,)$ von Frankfurt nach Los Angeles aus (a) mit maple o.ä. unter F^{-1} in die Ebene. Verwenden Sie auch die Projektion aus Aufgabe 2.4.

★ (3) *(Die Evolute einer ebenen Kurve)*
Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre parametrisierte Kurve. Sei $n(t)$ das Einheitsnormalenvektorfeld an die Kurve wie in der Vorlesung und $\kappa(t)$ die Krümmung. Nehmen Sie an, dass $\kappa(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. In dieser Situation heißt die Kurve

$$b(t) = c(t) + \frac{1}{\kappa(t)} n(t), \quad t \in I,$$

die *Evolute* (Brennkurve) von c.

(a) Wann ist die parametrisierte Kurve b regulär?

(b) Zeigen Sie, dass die Tangente an b in $b(t)$ normal zu c in $c(t)$ ist.

(c) Betrachten Sie die Normalen an c in zwei benachbarten Punkten t_1, t_2, $t_1 \neq t_2$. Zeigen Sie, dass für $t_1 \to t_2$ die Schnittpunkte der Normalen gegen einen Punkt auf der Evolute von c konvergieren.

(d) Die parametrisierte Kurve $c(t) = (t, \cosh(t))^T$, $t \in \mathbb{R}$, heißt Kettenlinie. Man finde eine Parametrisierung der Evolute von c.

Ihre Lösungen der mit einem Stern ★ versehenen Aufgabe geben Sie bitte am 30.10.2012 vor der Vorlesung ab.

Bitte bereiten Sie die übrigen Aufgaben als Präsenzaufgaben für die Übung vor.

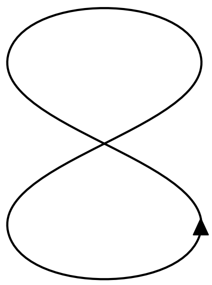
Prof. H.-Chr. Grunau
Dipl.-Math. L. Pulst

30.10.2012
Wintersemester 2012/13

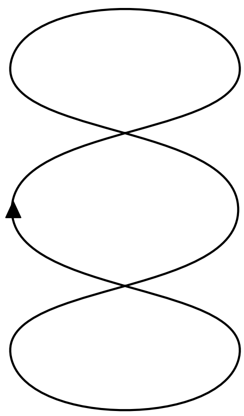
ÜBUNGEN ZUR DIFFERENTIALGEOMETRIE I
BLATT 4

(1) Bestimmen Sie für die folgende Kurven empirisch die Umlaufzahl n_c und skizzieren Sie schematisch eine Winkelfunktion $\vartheta(\,.\,)$ gemäß Hilfssatz 2.7:

(a)



(b)



★ (2) (a) Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre parametrisierte periodische ebene Kurve mit minimaler Periode $L > 0$. Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine orientierungserhaltende Umparametrisierung derart, dass $\tilde{c} := c \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Sei $\tilde{L} > 0$ die minimale Periode von $\tilde{c}$ und $\tilde{\vartheta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine Winkelfunktion gemäß Hilfssatz 2.7 und

$$\vartheta := \tilde{\vartheta} \circ \varphi^{-1}.$$

Zeigen Sie:

(i) $\frac{\dot{c}(t)}{|\dot{c}(t)|} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta(t) \\ \sin\vartheta(t) \end{pmatrix}$;

(ii) $\vartheta(L) - \vartheta(0) = \tilde{\vartheta}(\tilde{L}) - \tilde{\vartheta}(0)$.

(b) Betrachten Sie nun das konkrete Beispiel:

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad c(t) = (2 + \sin(t/2)) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

(i) Skizzieren Sie $c(\,.\,)$.
(ii) Bestimmen Sie die minimale Periode $L > 0$ von $c(\,.\,)$.
(iii) Berechnen Sie $\vartheta(\,.\,)$ wie in (a).
(iv) Berechnen Sie die Umlaufzahl n_c von $c(\,.\,)$.

(3) Ist jede periodische Funktion $\kappa \in C^\infty(\mathbb{R})$ Krümmung einer geschlossenen, nach der Bogenlänge parametrisierten ebenen Kurve? Beweisen Sie die Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(4) Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene reguläre parametrisierte Kurve mit minimaler Periode $L > 0$. Nehmen Sie an, dass mit einer Konstante $a > 0$ für die Krümmung $\kappa(t)$ gilt

$$0 < \kappa(t) \leq a\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Beweisen Sie:

$$L(c|_{[0,L]}) \geq \frac{2\pi}{a} n_c.$$

Hier bezeichnet n_c die Umlaufzahl von c.

Ihre Lösungen der mit einem Stern ★ versehenen Aufgabe geben Sie bitte am 06.11.2012 vor der Vorlesung ab.

Bitte bereiten Sie die übrigen Aufgaben als Präsenzaufgaben für die Übung vor.

Prof. H.-Chr. Grunau
Dipl.-Math. L. Pulst

06.11.2012
Wintersemester 2012/13

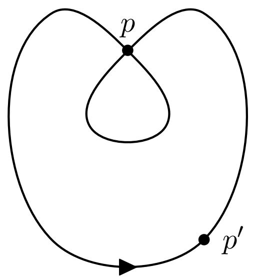
ÜBUNGEN ZUR DIFFERENTIALGEOMETRIE I
BLATT 5

(1) Zeigen Sie: Eine konvexe geschlossene Kurve ist einfach geschlossen.

(2) Es sei c eine orientierte ebene geschlossene nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Krümmung $\kappa \geq 0$. Nehmen Sie an, dass c mindenstens eine Selbstschnittpunkt p hat. Beweisen Sie:

(a) Der Drehwinkel der Tangente auf dem positiv durchlaufenen Bogen von c, der aus $pp'p$ gebildet wird, ist strikt größer als π.

(b) Die Umlaufzahl von c ist größer oder gleich 2.



★ (3) Eine ebene Kurve sei in Polarkoordinaten, d.h. durch $\varphi \mapsto r(\varphi)\,(\cos\varphi, \sin\varphi)^T$, gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass die Bogenlänge im Intervall $[\varphi_1, \varphi_2]$ gegeben ist durch

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\varphi\,,$$

wobei $r' = \frac{d}{d\varphi} r$.

(b) Zeigen Sie, dass die Krümmung durch

$$\kappa(\varphi) = \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

gegeben ist.

(c) Ist die Kurve mit $r(\varphi) = \cos(2\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, regulär? Skizzieren Sie die Kurve. Berechnen Sie gegebenenfalls die Umlaufzahl der Kurve.

Ihre Lösungen der mit einem Stern ★ versehenen Aufgabe geben Sie bitte am 13.11.2012 vor der Vorlesung ab.

Bitte bereiten Sie die übrigen Aufgaben als Präsenzaufgaben für die Übung vor.

Prof. H.-Chr. Grunau
Dipl.-Math. L. Pulst

13.11.2012
Wintersemester 2012/13

ÜBUNGEN ZUR DIFFERENTIALGEOMETRIE I
BLATT 6

(1) Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte, geschlossene und konvexe Kurve mit Krümmung $\kappa_c(t) \geq 0$ für alle t und sei so orientiert, dass $n(t)$ für alle t nach Innen zeigt. Die *Parallelkurve* zu c im Abstand $s \geq 0$ ist die Kurve $c_s(t) := c(t) - sn(t)$.

(a) Aufgabe 1, Blatt 5, zeigt, dass c sogar einfach geschlossen ist. Sei L die Periode von c. Zeigen Sie: die Kurve c_s erfüllt ebenfalls $c_s(t+L) = c_s(t)$ und $c_s|_{(t,t+L)}$ ist injektiv für alle t. Insbesondere ist c_s auch einfach geschlossen.

(b) Zeigen Sie: die Krümmung von c_s für alle t ist

$$\kappa_{c_s}(t) = \frac{\kappa_c(t)}{1 + s\kappa_c(t)}.$$

Insbesondere ist c_s wieder konvex.

(c) Sei $L_s := \int_0^L |\dot{c}_s(t)|dt$. Beweisen Sie: $L_s = L + 2\pi s$.

(d) Zeigen Sie, dass die Flächeninhalte der beschränkten Gebiete G und G_s, welche von c und c_s eingeschlossen werden, die Gleichung

$$|G_s| = |G| + sL + \pi s^2$$

erfüllen.

Hinweis. Benutzen Sie für den Flächeninhalt die Formel aus Hilfssatz 2.23:

$$|G| = \int_0^L c^1(t)\dot{c}^2(t)dt$$

und nehmen Sie ohne Beweis an, dass die einfach geschlossenen Kurven c und c_s tatsächlich beschränkte Gebiete beranden.

★ (2) Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\kappa(t) \neq 0$ für alle t und begeleitendem 3-Bein $(v(t) := \dot{c}(t), n(t), b(t))$. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

(a) Es gibt ein $w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ derart, dass $v(.) \cdot w$ konstant ist.

(b) Es gibt ein $w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $n(.) \cdot w = 0$.

(c) Es gibt ein $w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ derart, dass $b(.) \cdot w$ konstant ist.

(d) Der Quotient $\frac{\tau(.)}{\kappa(.)}$ ist konstant.

(3) Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit Krümmung $\kappa(.)$ und (sofern $\kappa(.) \neq 0$) Torsion $\tau(.)$. Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x) = Ax + p$ mit $p \in \mathbb{R}^3$ und $A \in SO(3)$. Betrachten Sie die Kurve $\tilde{c} = F \circ c$ mit Krümmung $\tilde{\kappa}(.)$ und (sofern $\tilde{\kappa}(.) \neq 0$) Torsion $\tilde{\tau}(.)$. Zeigen Sie, dass $\tilde{\kappa}(.) = \kappa(.)$ und $\tilde{\tau}(.) = \tau(.)$. Geben Sie das begleitende 3-Bein von $\tilde{c}$ an. Was passiert, wenn $-A \in SO(3)$?

Bitte beachten Sie folgende Terminänderungen:

- *Am Donnerstag, den 22.11.12, findet in Raum G05-300, um* **11.00 Uhr - 12.30 Uhr** *die Vorlesung vom darauf folgenden Dienstag statt.*

- *Die Übung vom Donnerstag, den 22.11.12, wird auf den Vorlesungstermin (11.15 Uhr - 12.45 Uhr, G03-214) des darauf folgenden Dienstags, den 27.11.12, verschoben.*

- *Die Vorlesung am Freitag, den 30.11.12, entfällt und wird zu einem späteren Termin nachgeholt.*

Ihre Lösungen der mit einem Stern ★ *versehenen Aufgabe geben Sie bitte am 20.11.2012 vor der Vorlesung ab.*

Bitte bereiten Sie die übrigen Aufgaben als Präsenzaufgaben für die Übung vor.

Prof. H.-Chr. Grunau
Dipl.-Math. L. Pulst

20.11.2012
Wintersemester 2012/13

ÜBUNGEN ZUR DIFFERENTIALGEOMETRIE I
BLATT 7

(1) Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre parametrisierte Kurve. Nehmen Sie an, dass $\kappa(t) = C_1 > 0$ und $\tau(t) = C_2 \in \mathbb{R}$ für alle $t \in I$. Zeigen Sie, dass c ein Teil einer Schraubenlinie ist.

★ (2) Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit $\kappa \neq 0$. Sei $t_0 \in I$ gegeben. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Krümmung von c in t_0 ist gleich der Krümmung in t_0 der ebenen Kurve, die man durch Projektion von $c(\,.\,) - c(t_0)$ auf die Schmiegeebene von c in $c(t_0)$ erhält.

(b) Es existiert eine eindeutig bestimmte Schraubenlinie $b : I \to \mathbb{R}^3$ derart, dass beide Kurven in t_0 dasselbe begleitende 3-Bein sowie diesselbe Krümmung und Torsion besitzen.

(c) Sei $\{v(t_0), n(t_0), b(t_0)\}$ das begleitende 3-Bein von c in t_0. Finden Sie die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und ε so, dass nahe t_0 gilt:

$$\begin{aligned} c(t) &= c(t_0) + \alpha v(t_0)(t-t_0) + \beta n(t_0)(t-t_0)^2 + \gamma v(t_0)(t-t_0)^3 \\ &\quad + \delta n(t_0)(t-t_0)^3 + \varepsilon b(t_0)(t-t_0)^3 + O((t-t_0)^4)\,. \end{aligned}$$

(3) Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Nehmen Sie an, dass $\kappa(t) \neq 0$, $\tau(t) \neq 0$ und $\dot\kappa(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Zeigen Sie, dass

$$R(t)^2 + \dot R(t)^2 T(t)^2 = \text{konst.}$$

eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass $c(I)$ auf eine Sphäre liegt. Dabei ist $R(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$, $T(t) = \frac{1}{\tau(t)}$.

Hinweis. Bestimmen Sie die Koeffizienten der Darstellung $c(t) = \alpha + \beta(t)v(t) + \gamma(t)n(t) + \delta(t)b(t)$.

Bitte beachten Sie folgende Terminänderungen:

- *Am Donnerstag, den 22.11.12, findet in Raum G05-300, um* **11.00 Uhr - 12.30 Uhr** *die Vorlesung vom darauf folgenden Dienstag (27.11.12) statt.*

- *Die Übung vom Donnerstag, den 22.11.12, wird auf den Vorlesungstermin (11.15 Uhr - 12.45 Uhr, G03-214) des darauf folgenden Dienstags, den 27.11.12, verschoben.*

- *Die Vorlesung am Freitag, den 30.11.12, entfällt und wird zu einem späteren Termin nachgeholt.*

Ihre Lösungen der mit einem Stern ★ versehenen Aufgabe geben Sie bitte am 27.11.2012 vor der Übung ab.

Bitte bereiten Sie die übrigen Aufgaben als Präsenzaufgaben für die Übung vor.

Prof. H.-Chr. Grunau
Dipl.-Math. L. Pulst

27.11.2012
Wintersemester 2012/13

ÜBUNGEN ZUR DIFFERENTIALGEOMETRIE I
BLATT 8

(1) Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ ein nach der Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve. Sei c geschlossen und konvex. Zeigen Sie, dass c eine konvexe Menge berandet.

★ (2) Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Es sei angenommen, dass $|c(t)| = 1$ für alle $t \in I$, d.h. das Bild von c liegt in der Einheitssphäre $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Sei $\kappa > 0$ die Krümmung von c, τ die Torsion von c und $J := \det(c, \dot{c}, \ddot{c})$. Zeigen Sie, dass

(a) $\ddot{c} = -c + Jc \times \dot{c}$;

(b) $\kappa = \sqrt{1 + J^2}$ und $\tau = \dot{J}(1 + J^2)^{-1}$.

Beweisen Sie weiter die folgenden Aussagen:

(c) $J \equiv 0$ ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass c ein Großkreis ist.

(d) $J \equiv$ konst. $\neq 0$ ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass c ein Kleinkreis ist. Dabei ist ein Kleinkreis die Schnittmenge der Einheitssphäre mit einer Ebene, die den Ursprung nicht enthält.

(3) (a) Sei $P = (a_1, \ldots, a_m | a_1)$, $(a_k \in \mathbb{R}^3)$, ein geschlossenes Polygon. Zeigen Sie, dass für den Totalwinkel $\kappa(P)$ von P gilt:

$$\kappa(P) \geq 2\pi.$$

Zeigen Sie weiter: Gleichheit gilt genau dann, wenn P eben und konvex ist.

(b) Zeigen Sie den *Satz von Fenchel* (Satz 3.20) ohne die Brückenzahl zu benutzen.

Satz von Fenchel: Sei c eine einfach geschlossene Raumkurve, dann gilt $\kappa(c) \geq 2\pi$.

(4) Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine als lediglich stetig vorausgesetzte periodische lokal injektive parametrisierte Raumkurve mit minimaler Periode $L > 0$. Für $e \in \mathbb{S}^2$ sei $\mu(c, e)$ wie in Definition 3.17 definiert, d.h.

$$\mu(c, e) := \#\{\text{lokale Maxima in } [0, L) \text{ der Funktion } \mathbb{R} \ni t \mapsto e \cdot c(t) \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mu(c, e) = \mu(c, -e)$.

Ihre Lösungen der mit einem Stern ★ versehenen Aufgabe geben Sie bitte am 04.12.2012 vor der Vorlesung ab.

Bitte bereiten Sie die übrigen Aufgaben als Präsenzaufgaben für die Übung vor.

Prof. H.-Chr. Grunau
Dipl.-Math. L. Pulst

04.12.2012
Wintersemester 2012/13

ÜBUNGEN ZUR DIFFERENTIALGEOMETRIE I
BLATT 9

★ (1) Beweisen Sie Hilfssatz 3.22 mit Hilfe des *Brouwerschen Fixpunktsatzes.*

Hinweis. Sei Φ die Abbildung aus Hilfssatz 3.22. Betrachten Sie für $x_0 \notin \Phi(\overline{B_R(0)})$

$$f : \overline{B_R(0)} \to \overline{B_R(0)}, \quad f(x) = -R\frac{\Phi(x) - x_0}{|\Phi(x) - x_0|}.$$

3.22 Hilfssatz. Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Es gebe ein $R > 0$ derart, dass für alle x mit $|x| \geq R$ gilt: $\Phi(x) = x$. Dann ist Φ surjektiv.

Brouwerscher Fixpunktsatz. Jede stetige Abbildung $f : \overline{B_R(0)} \to \overline{B_R(0)}$ besitzt einen Fixpunkt.
Vgl. Proseminar „Analysis“, Sommersemester 2012, oder J. Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie, Seite 213 f.

(2) Zeigen Sie, dass ambiente Isotopie eine Äquivalenzrelation auf der Menge der einfach geschlossenen Raumkurven definiert.

(3) Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ einfach geschlossen und mit minimaler Periode $L = 4$. Wir nehmen weiter an, dass $c|_{[-1,3]} : [-1, 3] \to \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ mit

$$\forall x \in [-1, 1] : \qquad c(x) = (x, u(x), 0)^t,$$
$$\forall x \in [1, 3] : \qquad c(x) = (2 - x, -u(2 - x), 0)^t.$$

Dabei sei $u : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ so, dass $u > 0$ in $(-1, 1)$ und $u(-1) = u(1) = 0$. Die Krümmung von c in $c(-1) = (-1, 0, 0)^t$ und $c(1) = (1, 0, 0)^t$ sei verschieden von Null.

(a) Zeigen Sie, dass die Grenzwerte

$$\lim_{x\nearrow 1} \frac{u(x)}{\sqrt{1 - x^2}} = s_1 \neq 0, \qquad \lim_{x\searrow -1} \frac{u(x)}{\sqrt{1 - x^2}} = s_{-1} \neq 0$$

existieren.

Hinweis. In einer Umgebung von $(1, 0, 0)^t$ beschreiben Sie das Bild von c als Graph über der y-Achse.

(b) Zeigen Sie, dass c ambient isotop zu $\mathbb{S}^1 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ ist.

Ihre Lösungen der mit einem Stern ★ versehenen Aufgabe geben Sie bitte am 11.12.2012 vor der Vorlesung ab.

Bitte bereiten Sie die übrigen Aufgaben als Präsenzaufgaben für die Übung vor.

Prof. H.-Chr. Grunau
Dipl.-Math. L. Pulst

11.12.2012
Wintersemester 2012/13

ÜBUNGEN ZUR DIFFERENTIALGEOMETRIE I
BLATT 10

(1) Untersuchen Sie, ob es sich bei den folgenden Mengen um reguläre Flächen handelt.

(a) $S_1 = \{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=z^2,\ z \geq 0\}$.

(b) $S_2 = \{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1,\ z \in [0,h],\ h>0\}$.

(2) (a) Zeigen Sie: Ist $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $W \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, so ist auch $W \cap S$ eine reguläre Fläche.

(b) Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Teilmenge. Für jeden Punkt $p \in S$ gebe es eine offene Umgebung V von p in $\mathbb{R}^3$, so dass $V \cap S$ eine reguläre Fläche ist. Zeigen Sie: Dann ist auch S eine reguläre Fläche.

★ (3) Sei C die Kreislinie in der Ebene $\{0\} \times \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt $(0,a,0)^t$, $a>1$, und Radius $r=1$. Sei M die Menge der Punkte, die man aus C durch Rotation bezüglich der Achse $(0,0,1)^t$ erhält. Zeigen Sie:

(a) $M = \{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 :\ z^2 + (\sqrt{x^2+y^2}-a)^2 = 1\}$;

(b) M ist eine reguläre Fläche.

Finden Sie außerdem lokale Parametrisierungen für M, d.h. finden Sie für alle $p_0 \in M$ ein $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, ein $V \subset \mathbb{R}^3$ offen mit $p_0 \in V$ und eine glatte Abbildung $F: U \to \mathbb{R}^3$ so, dass $F(U) = M \cap V$ und $\operatorname{Rg} DF(u) = 2$ für alle $u \in U$.

(4) Betrachten Sie die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xyz^2$.

(a) Für welche Werte von $C \in \mathbb{R}$ ist $\Gamma_C := \{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 :\ f(x,y,z) = C\}$ eine reguläre Fläche?

(b) Finden Sie lokale Parametrisierungen für Γ_1, d.h. für Γ_C mit $C=1$.

Ihre Lösungen der mit einem Stern ★ versehenen Aufgabe geben Sie bitte am 18.12.2012 vor der Vorlesung ab.

Bitte bereiten Sie die übrigen Aufgaben als Präsenzaufgaben für die Übung vor.

Prof. H.-Chr. Grunau
Dipl.-Math. L. Pulst

18.12.2012
Wintersemester 2012/13

ÜBUNGEN ZUR DIFFERENTIALGEOMETRIE I
BLATT 11

(1) (a) Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge.

(i) Begründen Sie, dass $S_1 := U \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche ist.

(ii) Sei $S_2 := \{(x, y, \varphi(x, y))^t : (x, y) \in U\}$ mit einer glatten Funktion $\varphi : U \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Flächen S_1 und S_2 diffeomorph sind.

(b) Seien

$$\begin{aligned} S_1 &:= \left\{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}, \\ S_2 &:= \left\{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\} \end{aligned}$$

mit $a, b, c > 0$.

(i) Begründen Sie, dass S_1 und S_2 reguläre Flächen sind.

(ii) Zeigen Sie, dass S_1 und S_2 diffeomorph sind.

(2) *(Das Möbiusband)*
Es sei S das Bild der Abbildung $F : \mathbb{R} \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$ mit

$$F(t, s) := ((1 + s\cos(t))\cos(2t), (1 + s\cos(t))\sin(2t), s\sin(t))^t.$$

(a) Es bezeichne $\tilde{F} : (0, \pi) \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$ die Restriktion von F auf $(0, \pi) \times (-1, 1)$. Man zeige, dass $\tilde{F}$ injektiv ist.

(b) Sei $S' := \tilde{F}((0, \pi) \times (-1, 1))$. Characterisieren Sie S'.

(c) Man zeige, dass S eine reguläre Fläche ist.

(d) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(t, s) \mapsto s$ die Projektion auf die s-Koordinate. Man zeige, dass sich $f \circ \tilde{F}^{-1} : S' \to \mathbb{R}$ nicht als stetige Funktion auf S fortsetzen lässt.

(3) (a) Sie T der Torus wie in Aufgabe 10.3 mit seiner *universellen Parametrisierung* (Definition siehe unten) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$:

$$F(s, t) = ((a + \cos(t))\sin(s), (a + \cos(t))\cos(s), \sin(t)),$$

mit $a > 1$. Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Unter welchen Bedingungen definiert u eine glatte Funtion auf T? D.h., wann existiert glattes $\tilde{u} : T \to \mathbb{R}$ so, dass $\tilde{u} \circ F = u$?

(b) Sei $\mathbb{S}^2$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$ mit der Parametrisierung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ durch Polarkoordinaten

$$F(\varphi, \theta) = (\cos(\varphi)\sin(\theta), \sin(\varphi)\sin(\theta), \cos(\theta)).$$

(Diese Parametrisierung ist global, aber weder im Allgemeinen lokal injektiv noch regulär.) Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Unter welchen Bedingungen definiert u eine glatte Funtion auf $\mathbb{S}^2$?

Definition. Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $A \subset \mathbb{R}^2$ offen. Eine Abbildung $F : A \to \mathbb{R}^3$ heißt eine *universelle Parametrisierung* von S, wenn es zu jedem $p \in S$ eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^3$ von p und eine offene Menge $U \subset A$ gibt, so dass $F|_U : U \to V \cap S$ eine lokale Parametrisierung von S um p ist.

★ (4) Sei $f : [0, a] \to \mathbb{R}$, $a > 0$, eine glatte Funktion. Betrachten Sie den Graph von $f|_{(0,a)}$ in $\mathbb{R}^3$, d.h. die Menge

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y = f(x),\ z = 0 \text{ und } x \in (0, a)\}.$$

Sei S die Menge der Punkte, die man aus $\mathcal{G}(f)$ durch Rotation bezüglich der Achse $(1, 0, 0)^t$ erhält.

(a) Unter welcher zusätzlichen Annahme an f ist S eine reguläre Fläche?

(b) Sei nun f so gewählt, dass S eine reguläre Fläche ist.

(i) Berechnen Sie die Tangentialebene von S in $p_0 \in S$, p_0 beliebig. Welche Relation gibt es zwischen den Tangentialebenen in den Punkten $p_0, p_1 \in S$, falls $p_0^1 = p_1^1$ gilt, d.h. bezüglich Punkten mit derselben ersten Koordinate?

(ii) Berechnen Sie die erste Fundamentalform von S in den lokalen Koordinaten

$$(x, \varphi) \mapsto (x, f(x) \cos\varphi, f(x) \sin\varphi)^t.$$

(c) Betrachten Sie nun $f(x) = \frac{1}{b}\cosh(bx)$ mit $b > 0$ für $x \in (0, 1)$. Skizzieren Sie S in diesem Fall. Berechnen Sie den Flächeninhalt von S.

Hinweis. Die Punkte auf diese Aufgabe werden Ihnen als **Zusatzpunkte** gutgeschrieben.

Ihre Lösungen der mit einem Stern ★ versehenen Aufgabe geben Sie bitte am 08.01.2013 vor der Vorlesung ab.

Bitte bereiten Sie die übrigen Aufgaben als Präsenzaufgaben für die Übung vor.

Fröhliche Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Prof. H.-Chr. Grunau
Dipl.-Math. L. Pulst

08.01.2013
Wintersemester 2012/13

ÜBUNGEN ZUR DIFFERENTIALGEOMETRIE I
BLATT 12

(1) Seien $S_1,\ S_2$ und S_3 reguläre Flächen und $f : S_1 \to S_2,\ g : S_2 \to S_3$ Abbildungen. Sei $p \in S_1$. Zeigen Sie: Ist f glatt nahe p und g glatt nahe $f(p) \in S_2$, so ist $g \circ f$ glatt nahe p und es gilt

$$d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p).$$

★ (2) (a) Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $N : S \to \mathbb{S}^2$ ein Einheitsnormalenfeld. Man zeige: Es ist N stetig genau dann, wenn N glatt ist.

(b) Man zeige, dass die Orientierbarkeit einer regulären Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ invariant unter Diffeomorphismen ist.

Hinweis. Satz 6.3.

(3) Es sei S das Möbiusband von Blatt 11, Aufgabe 2 mit der dort angegebenen universellen Parametrisierung F. Man zeige, dass S nicht orientierbar ist, d.h. es gibt kein glattes Einheitsnormalenfeld $N : S \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Hinweis. Man nehme an, S wäre orientierbar, und bestimme dann die möglichen Lösungen für N längs der Kurve $c : \mathbb{R} \to S$ mit $c(t) := F(t, 0)$.

(4) (a) Betrachten Sie die parametrisierte Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$t \mapsto ((1 + \frac{1}{2}\cos(2t))\cos(t), (1 + \frac{1}{2}\cos(2t))\sin(t) + 1)^t\,.$$

Skizzieren Sie c. Zeigen Sie, dass c regulär ist und dass $c^2(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. (Hier bezeichnet c^2 die zweite Komponente der Kurve.) Sei nun n die Normale an die orientierte Kurve, $n : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$. Begründen Sie, dass $n(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1$.

(b) Sei nun $\tilde{c}$ die Raumkurve $t \mapsto (c^1(t), c^2(t), 0)^t$, wobei $c = (c^1, c^2)^t$ die ebene Kurve von Teil 1 ist. Sei S die Menge der Punkte, die man aus $\tilde{c}(\mathbb{R})$ durch Rotation bezüglich der Achse $(1, 0, 0)^t$ erhält.

(i) Geben Sie eine universelle Parametrisierung für die Fläche S an.

(ii) Zeigen Sie, dass S orientierbar ist.

(iii) Berechnen Sie in den lokal durch die universelle Parametrisierung gegebenen Koordinaten die erste Fundamentalform der Fläche.

(iv) Sei nun $N : S \to \mathbb{S}^2$ die Gauß-Abbildung. Begründen Sie, dass $N(S) = \mathbb{S}^2$.

(v) Berechnen Sie in den lokal durch die universelle Parametrisierung gegebenen Koordinaten die Weingartenabbildung der Fläche.

Ihre Lösungen der mit einem Stern ★ versehenen Aufgabe geben Sie bitte am 15.01.2013 vor der Vorlesung ab.

Bitte bereiten Sie die übrigen Aufgaben als Präsenzaufgaben für die Übung vor.

Prof. H.-Chr. Grunau
Dipl.-Math. L. Pulst

15.01.2013
Wintersemester 2012/13

ÜBUNGEN ZUR DIFFERENTIALGEOMETRIE I
BLATT 13

Definition. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Sei $c : I \to S$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Falls $\dot{c}(t)$ für alle $t \in I$ eine Hauptkrümmungsrichtung ist, so heißt c Krümmungslinie.

(1) Wie in Aufgabe 4, Blatt 11, sei $f : [0, a] \to \mathbb{R}$, $a > 0$, eine glatte strikt positive Funktion. Betrachten Sie den Graph von $f|_{(0,a)}$ in $\mathbb{R}^3$, d.h. die Menge

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = f(x),\ z = 0 \text{ und } x \in (0, a)\}.$$

Sei S die Menge der Punkte, die man aus $\mathcal{G}(f)$ durch Rotation bezüglich der Achse $(1, 0, 0)^t$ erhält.

(a) Berechnen Sie die zweite Fundamentalform und die Weingartenabbildung von S in den lokalen Koordinaten

$$(x, \varphi) \mapsto (x, f(x)\cos\varphi, f(x)\sin\varphi)^t.$$

(b) Berechnen Sie die Hauptkrümmungen von S und finden Sie eine Familie von Krümmungslinien.

(2) Sei S der Graph in $\mathbb{R}^3$ der Funktion $\varphi : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\varphi(x, y) = \log(\cos(y)) - \log(\cos(x)),$$

die so genannte *Scherksche Fläche*. Zeigen Sie, dass S eine Minimalfläche ist. Fertigen Sie einen maple-Plot der Fläche an.

★ (3) Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte reguläre Fläche und $p \in S$. Seien (U, F, V) und $(\hat{U}, \hat{F}, \hat{V})$ lokale Parametrisierungen mit $p = F(u) = \hat{F}(\hat{u})$, $u \in U$ und $\hat{u} \in \hat{U}$, so dass für alle $u \in F^{-1}(S \cap \hat{V} \cap V)$ gilt:

$$\det(D(\hat{F}^{-1} \circ F)(u)) > 0.$$

Weiter sei

$$G = \hat{F}^{-1} \circ F : F^{-1}(V \cap \hat{V}) \to \hat{F}^{-1}(V \cap \hat{V}),$$
$$\text{mit } DG(u) = (b^i{}_j)_{i,j=1,2} \text{ und } (DG(u))^{-1} = (\hat{b}^i{}_j)_{i,j=1,2}.$$

(a) Seien $(h_{ij})_{i,j=1,2}$ die Koordinaten der zweiten Fundamentalform bzgl. (U, F, V) und $(\hat{h}_{ij})_{i,j=1,2}$ die Koordinaten der zweiten Fundamentalform bzgl. $(\hat{U}, \hat{F}, \hat{V})$. Zeigen Sie, dass

$$\hat{h}_{ij}(\hat{u}) = \sum_{k,\ell=1}^{2} \hat{b}^k_i\, h_{k\ell}(u)\, \hat{b}^\ell{}_j.$$

(b) Seien $(h^i{}_j)_{i,j=1,2}$ die Koordinaten der Weingartenabbildung bzgl. (U, F, V) und $(\hat{h}^i{}_j)_{i,j=1,2}$ die Koordinaten der Weingartenabbildung bzgl. $(\hat{U}, \hat{F}, \hat{V})$. Zeigen Sie, dass

$$\hat{h}^i{}_j(\hat{u}) = \sum_{k,\ell=1}^{2} b^i{}_k\, h^k{}_\ell(u)\, \hat{b}^\ell{}_j.$$

Ihre Lösungen der mit einem Stern ★ versehenen Aufgabe geben Sie bitte am 22.01.2013 vor der Vorlesung ab.

Bitte bereiten Sie die übrigen Aufgaben als Präsenzaufgaben für die Übung vor.

Prof. H.-Chr. Grunau
Dipl.-Math. L. Pulst

22.01.2013
Wintersemester 2012/13

ÜBUNGEN ZUR DIFFERENTIALGEOMETRIE I
BLATT 14

(1) Zeigen Sie, dass die Beziehungen „isometrisch“ und „lokal isometrisch“ auf der Menge der regulären Flächen Äquivalenzrelationen bilden.

(2) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lokale Isometrie des $\mathbb{R}^2$ mit $f(0) = 0$ und $Df(0) = \mathbb{I} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Zeigen Sie, dass dann $Df(x) = \mathbb{I} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

(3) Seien $S_1 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ die x-y-Ebene und $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = \frac{1}{3}z^2 \text{ mit } z > 0\}$ eine Kegelfläche. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : S_1 \to S_2, \quad f(x, y, 0) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \\ \sqrt{3}(x^2 + y^2) \end{pmatrix},$$

eine lokale Isometrie ist.