Differentialgeometrie II
Sommersemester 2013
H.-Ch. Grunau

1 09.04.2013

1.1 Aufgabe (3+2+3 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit nichtleerem Inneren, $I \ni t \mapsto (f(t), 0, g(t))^T \in \mathbb{R}^3$ mit $f > 0$ die Profilkurve, durch deren Drehung um die x^3-Achse die dazu gehörige, durch

$$I \times [0, 2\pi) \ni \begin{pmatrix} t \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto F \begin{pmatrix} t \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \cos\varphi \\ f(t) \sin\varphi \\ g(t) \end{pmatrix}$$

parametrisierte reguläre Rotationsfläche entsteht.

(a) Berechnen Sie die Gaußkrümmung $K(F \begin{pmatrix} t \\ \varphi \end{pmatrix})$ dieser Rotationsfläche.

(b) Bestimmen Sie alle Rotationsflächen mit $K(F \begin{pmatrix} t \\ \varphi \end{pmatrix}) \equiv 0$.

(c) Man berechne die Gaußkrümmung der durch die Traktrix aus Beispiel 1.2 (c) erzeugten Rotationsfläche:

$$\Big((0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)\Big) \times [0, 2\pi) \ni \begin{pmatrix} t \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin t\, \cos\varphi \\ \sin t\, \sin\varphi \\ \cos t + \log\tan\frac{t}{2} \end{pmatrix}.$$

1.2 Aufgabe (5 Punkte)

Sei $S = \mathbb{S}^2$ die Einheitssphäre; $c : [0, 2\pi) \to S$, $c(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)^T$ sei eine Parametrisierung des Äquators. Bestimmen Sie alle Tangentialvektorfelder $x : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ an S längs $c(\,.\,)$, so dass gilt:

$$\frac{\nabla}{d\varphi} x(\varphi) = 0.$$

1.3 Aufgabe (4+2 Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $x, y : S \to \mathbb{R}^3$ seien (glatte Tangential-) Vektorfelder an S, $f : S \to \mathbb{R}$ sei eine glatte Funktion. Wir definieren eine „modifizierte Hessematrix“ im Geiste von Definition 8.1 in $p \in S$ durch

$$\nabla^2_{x,y} f(p) := \partial_x(\partial_y f)(p) - \partial_{\nabla_x y} f(p).$$

Zeigen Sie:

(a) Außer von f und seinen Ableitungen nahe p hängt $\nabla^2_{x,y} f(p)$ nur von $x(p)$ und $y(p)$ ab. Diese „modifizierte Hessematrix“ ist symmetrisch, d.h.: $\nabla^2_{x,y} f(p) = \nabla^2_{y,x} f(p)$. Berechnen Sie dazu $\nabla^2_{x,y} f(p)$ in lokalen Koordinaten.

(b) Unter Verwendung des kontravarianten Gradienten ∇f gilt:

$$\nabla^2_{x,y} f(p) = I_p(\nabla_x(\nabla f)(p), y(p)).$$

Ihre Lösungen geben Sie bitte am Dienstag, den 23.04.2013 in der Vorlesung ab.

Differentialgeometrie II

Sommersemester 2013

H.-Ch. Grunau

2 23.04.2013

2.1 Aufgabe (6 Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit erster und zweiter Fundamentalform und (U, F, V) eine lokale *konforme* Parametrisierung, d.h.:

$$\frac{\partial F}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial F}{\partial u^2} = 0, \qquad \left|\frac{\partial F}{\partial u^1}\right|^2 = \left|\frac{\partial F}{\partial u^2}\right|^2 \neq 0.$$

Zeigen Sie, dass dann F (komponentenweise) folgende Differentialgleichung löst:

$$\forall u \in U : \quad \Delta F(u) = 2H(F(u)) \frac{\partial F}{\partial u^1} \times \frac{\partial F}{\partial u^2}.$$

Hinweis. Folgern Sie aus den Konformitätsrelationen der Parametrisierung, dass $\Delta F \cdot \frac{\partial F}{\partial u^j} = 0$.

Bemerkung. Die lokale Existenz solcher konformen Parametrisierungen oder sogar die Existenz in einfach zusammenhängenden Teilgebieten von S, bei denen ggfs. ein Punkt entfernt werden muss, zeigt man ähnlich wie den Riemannschen Abbildungssatz.

2.2 Aufgabe (4 Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit erster und zweiter Fundamentalform und lokaler Parametrisierung (U, F, V). Bezüglich dieser betrachten wir wie in 8.4 den einfach kontra- und dreifach kovarianten Riemannschen Krümmungstensor

$$R^\ell_{ijk} = \Gamma^\ell_{kj,i} - \Gamma^\ell_{ki,j} + \sum_{m=1}^{2} \left(\Gamma^\ell_{mi}\Gamma^m_{kj} - \Gamma^\ell_{mj}\Gamma^m_{ki} \right).$$

Außerdem betrachten wir den vierfach kovarianten Riemannschen Krümmungstensor

$$R_{mijk} := \sum_{\ell=1}^{2} g_{m\ell} R^\ell_{ijk}.$$

Zeigen Sie hierfür unter Verwendung der Gaußgleichungen aus Satz 8.5 in lokalen Koordinaten die folgenden Symmetrierelationen:

(a) $R_{mijk} = -R_{mjik}$,

(b) $R_{mijk} = -R_{kijm}$,

(c) $R_{mijk} = R_{imkj} = R_{jkmi}$,

(d) $R^\ell_{ijk} + R^\ell_{kij} + R^\ell_{jki} = 0$ (Bianchi-Identität).

2.3 Aufgabe (5 Punkte)

Können eine kompakte reguläre Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ und die x-y-Ebene (jeweils wie bisher stets mit der Standardmetrik versehen) lokal isometrisch sein? Finden Sie ein Beispiel oder beweisen Sie das Gegenteil!

2.4 Aufgabe (5 Punkte)

Betrachten Sie die Halbebene $H := \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 : u^2 > 0\}$, $F : H \to \mathbb{R}^3$, $F(u^1, u^2) = (u^1, u^2, 0)$. Wir betrachten die reguläre Fläche $S = F(H)$ mit Hilfe der globalen Parametrisierung F und definieren bzgl. dieser die Riemannsche Metrik:

$$g_{ij} = \frac{1}{(u^2)^2}\delta_{ij}.$$

Berechnen Sie die Gauß-Krümmung dieser Metrik.

Hinweis. Verwenden Sie die Symmetrierelationen des Riemannschen Krümmungstensors aus Satz 9.6.

Ihre Lösungen geben Sie bitte am Dienstag, den 07.05.2013 in der Vorlesung ab.

Differentialgeometrie II
Sommersemester 2013
H.-Ch. Grunau

3 07.05.2013

3.1 Aufgabe (5 Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit Riemannscher Metrik $(g_p)_{p\in S}$, die in lokalen Koordinaten durch $u \mapsto g_{ij}(u)$ gegeben wird. Für je zwei glatte Tangentialvektorfelder $x(\,.\,)$, $y(\,.\,)$ sei die kovariante Ableitung $\nabla_y x$ gemäß 9.4 aus der Vorlesung definiert.

Sei $f\colon S \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 seien glatte (Tangential-) Vektorfelder, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $p \in S$. Zeigen Sie, dass dann analog zu Hilfssatz 7.19 auch in diesem allgemeineren Kontext gilt:

(a) Linearität bzgl. des zu differenzierenden Vektorfeldes: $\nabla_y(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1\nabla_y x_1 + c_2\nabla_y x_2$.

(b) Linearität bzgl. des Vektorfeldes, nach dem differenziert wird: $\nabla_{(c_1y_1+c_2y_2)}x = c_1\nabla_{y_1}x + c_2\nabla_{y_2}x$, sogar $\nabla_{(fy)}x = f\nabla_y x$.

(c) Produktregel I: $\big(\nabla_y(fx)\big)(p) = df(p)\big(y(p)\big)x(p) + f(p)\big(\nabla_y x\big)(p)$.

(d) Produktregel II:

$$\partial_y g(x_1, x_2) = g\big(\nabla_y x_1, x_2\big) + g\big(x_1, \nabla_y x_2\big).$$

3.2 Aufgabe (2 Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit Riemannscher Metrik $(g_p)_{p\in S}$, die in lokalen Koordinaten durch $u \mapsto g_{ij}(u)$ gegeben wird. Für je zwei glatte Tangentialvektorfelder $x(\,.\,)$, $y(\,.\,)$ definieren wir deren Lieklammer in lokalen Koordinaten durch

$$([x,y])^i := \sum_{j=1}^{2}\left(y^i_{,j}x^j - x^i_{,j}y^j\right).$$

und die kovariante Ableitung $\nabla_y x$ gemäß 9.4 aus der Vorlesung. Zeigen Sie:

$$[x,y] = \nabla_x y - \nabla_y x.$$

Das liefert einen weiteren (und kurzen) Beweis, dass es sich bei der Lieklammer um ein wohldefiniertes Tangentialvektorfeld handelt.

Man beachte, dass die Lieklammer durch $\partial_x\big(\partial_y f\big) - \partial_y\big(\partial_x f\big) = \partial_{[x,y]}f$ unabhängig von der Wahl der Metrik und wohldefiniert ist.

3.3 Aufgabe (5 Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit Riemannscher Metrik $(g_p)_{p\in S}$, die in lokalen Koordinaten durch $u \mapsto g_{ij}(u)$ gegeben wird. Für *noch nicht spezifizierte* Christoffelsymbole Γ^k_{ij} und je zwei Vektorfelder $x(\,.\,)$, $y(\,.\,)$ sei eine kovariante Ableitung $\nabla_y x$ in lokalen Koordinaten durch

$$\big(\nabla_y x\big)\big(F(u)\big) := \sum_{j,k=1}^{2}\left(x^k_{,j} + \sum_{i=1}^{2}\Gamma^k_{ij}\,x^i\right)y^j\,\frac{\partial F}{\partial u^k}(u),$$

definiert. Die Eigenschaften (a) bis (c) aus Aufgabe 3.1 sind dann unabhängig von der Definition der Christoffelsymbole erfüllt. Nehmen Sie weiter an, dass für die so definierte kovariante Ableitung stets gilt:

$$\partial_y g(x_1, x_2) = g\big(\nabla_y x_1, x_2\big) + g\big(x_1, \nabla_y x_2\big), \tag{1}$$

$$\nabla_x y - \nabla_y x = [x, y]. \tag{2}$$

Folgern Sie daraus, dass diese Eigenschaften die Christoffelsymbole eindeutig festlegen:

$$\Gamma^k_{ij}(u) = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{2} g^{k\ell}(u)\big(g_{i\ell,j}(u) + g_{j\ell,i}(u) - g_{ij,\ell}(u)\big).$$

3.4 Aufgabe (2 Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit Riemannscher Metrik $(g_p)_{p\in S}$, die in lokalen Koordinaten durch $u \mapsto g_{ij}(u)$ gegeben wird. Riemannscher Krümmungstensor und Riccitensor

$$R_{ij} = \sum_{\ell=1}^{2} R^{\ell}_{\ell ji}$$

seien wie in der Vorlesung definiert. Zeigen Sie zunächst für $R_{\ell mij} := \sum_{k=1}^{2} g_{\ell k} R^k_{mij}$, dass $R^k_{\ell ij} = \sum_{m=1}^{2} g^{km} R_{m\ell ij}$. Zeigen Sie dann die Symmetrie des Riccitensors, d.h.:

$$R_{ij} = R_{ji}.$$

3.5 Aufgabe (6 Punkte)

Sei $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$; wir betrachten außerdem die hyperbolische Halbebene $(H, g) = \Big(H, \big(g_{ij}(u)\big)_{i,j=1,2}\Big)$ aus Aufgabe 2.4. Zeigen Sie, dass es sich bei

$$f : B \to H, \quad f(x, y) = \left(\frac{-2y}{(1-x)^2 + y^2}, 2\frac{1-x}{(1-x)^2 + y^2} - 1\right)$$

um die reelle Darstellung ($z = x + iy$) der biholomorphen inversen Cayley-Abbildung

$$f : B \to H, \quad f(z) = i\frac{1+z}{1-z}$$

handelt.

Bestimmen Sie die nach B zurückgezogene hyperbolische Metrik f^*g.

Hinweis. Berechnen und verwenden Sie die komplexe Ableitung $f'(z)$.

3.6 Aufgabe (2 Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit Riemannscher Metrik $(g_p)_{p\in S}$ und $c : [a, b] \to S$ eine parametrisierte Kurve. Betrachten Sie die in 10.1 der Vorlesung definierten $L_g(c)$ und $E_g(c)$ und prüfen Sie, ob diese stets invariant gegenüber Umparametrisierungen sind.

Ihre Lösungen geben Sie bitte am Dienstag, den 21.05.2013 in der Vorlesung ab.

Differentialgeometrie II

Sommersemester 2013

H.-Ch. Grunau

4 21.05.2013

4.1 Aufgabe (5 Punkte)

Betrachten Sie die Halbebene $H := \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 : u^2 > 0\}$ mit der „hyperbolischen Metrik" $g_{ij}(u) = \frac{1}{(u^2)^2}\delta_{ij}$ aus Aufgabe 2.4 und zeigen Sie, dass die Inversion

$$F : H \to H, \qquad F(u^1, u^2) = \frac{1}{(u^1)^2 + (u^2)^2}(u^1, u^2)$$

eine Isometrie ist.

4.2 Aufgabe (6 Punkte)

Betrachten Sie wieder die hyperbolische Halbebene $(H, g) = \Big(H, (g_{ij}(u))_{i,j=1,2}\Big)$ mit $g_{ij}(u) = \frac{1}{(u^2)^2}\delta_{ij}$ und bestimmen Sie dort alle Lösungen der Geodätischen-Differentialgleichung

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t) = 0, \quad t \in I,$$

$I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

Hinweis. Lösungen der Geodätischen-Differentialgleichung sind stets proportional zur Bogenlänge parametrisiert. Nach Umparametrisierung können Sie o.B.d.A. annehmen, dass $c(\,.\,)$ nach der (hyperbolischen!) Bogenlänge parametrisiert ist. Betrachten Sie zunächst die Ableitung von $\dot{c}^1/(c^2)^2$.

4.3 Aufgabe (5 Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit Riemannscher Metrik $(g_p)_{p\in S}$, $p, q \in S$, $p \neq q$ und $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to S$ eine glatte Abbildung, so dass $\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon) : \quad c(s, a) = p, c(s, b) = q$ und dass $c_0(t) = c(0, t)$ eine reguläre parametrisierte Kurve mit

$$\forall t \in [a, b] : \frac{\nabla}{dt}\dot{c}_0(t) = 0$$

ist. Zeigen Sie, dass dann

$$\frac{d}{ds}L_g(c(s,\,.\,))|_{s=0} = 0,$$

d.h., dass dann c_0 auch kritisch für das Längenfunktional ist.

4.4 Aufgabe (4 Punkte)

Sei (S, g) eine reguläre Fläche mit Riemannscher Metrik, $c : [a, b] \to S$ eine reguläre nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Einheitstangentialvektorfeld $t \mapsto \tau(t) = \dot{c}(t)$, Einheitsnormalenvektorfeld $t \mapsto \nu(t) \in T_{c(t)}S$ und geodätischer Krümmung $\kappa_{\text{geod}}(\,.\,)$. Zeigen Sie die Frenetschen Gleichungen:

$$\frac{\nabla}{dt}\tau(t) = \kappa_{\text{geod}}(t)\nu(t), \qquad \frac{\nabla}{dt}\nu(t) = -\kappa_{\text{geod}}(t)\tau(t).$$

Ihre Lösungen geben Sie bitte am Dienstag, den 04.06.2013 in der Vorlesung ab.

Differentialgeometrie II
Sommersemester 2013
H.-Ch. Grunau

5 04.06.2013

5.1 Aufgabe (7 Punkte)

Sei $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $u : J \to (0, \infty)$ eine glatte Funktion. Betrachten Sie die dadurch erzeugte Rotationsfläche S

$$J \times \mathbb{R} \ni (x, \varphi) \mapsto F(x, \varphi) = (x, u(x) \cos \varphi, u(x) \sin \varphi)^T$$

zusammen mit der ersten Fundamentalform.

(a) Sei $c : I \to S$ eine Geodätische auf S und $\tilde{c} : I \to J \times \mathbb{R}$ sei diese Geodätische in Koordinaten, d.h. eine glatte parametrisierte Kurve mit $c = F \circ \tilde{c}$. Man zeige, dass für alle $t \in I$ gilt:

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{c}(t) \cdot F_\varphi(\tilde{c}(t)) \right) = 0.$$

Hinweis. Zeigen Sie zunächst $\frac{d^2}{dt^2} c(t) \perp T_{c(t)} S$.

(b) Unter welchen Bedingungen sind Breitenkreise

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto c(t) = F(x_0, t) = (x_0, u(x_0) \cos t, u(x_0) \sin t)^T$$

für festes $x_0 \in J$ Geodätische?

(c) Betrachten Sie für festes $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ die Meridiankurve

$$J = [a, b] \ni t \mapsto c(t) = F(t, \varphi) = (t, u(t) \cos \varphi_0, u(t) \sin \varphi_0)^T$$

und zeigen Sie, dass diese eine auf S Längen-minimierende Verbindungskurve ihrer Endpunkte $c(a)$ und $c(b)$ ist.

5.2 Aufgabe (7 Punkte)

Betrachten Sie die hyperbolische Halbebene $(H, g) = \Big(H, (g_{ij}(u))_{i,j=1,2}\Big)$, $g_{ij}(u) = \frac{1}{(u^2)^2} \delta_{ij}$, wie in den Aufgaben 2.4, 4.1 und 4.2. Sei $c : [a, b] \to H$ eine reguläre parametrisierte Kurve, als Einheitsnormalenfeld betrachten wir

$$\nu(t) = \frac{1}{g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))^{1/2}} (-\dot{c}^2(t), \dot{c}^1(t))^T.$$

(a) Berechnen Sie die geodätische Krümmung $\kappa_{\text{geod}}(\,.\,)$ der parametrisierten Kurve $c(\,.\,)$.

(b) Wie lautet das Ergebnis, wenn man speziell Graphen $c(x) = (x, u(x))^T$ mit einer glatten Funktion $u : [a, b] \to (0, \infty)$ betrachtet?

(c) Berechnen Sie für den Graphen aus (b) die elastische Energie

$$W_h(u) = \int_{\text{graph}(u)} \kappa_{\text{geod}}(x)^2 \, ds_h(x)$$

bezüglich der hyperbolischen Metrik $ds_h(x) = g_{(x,u(x))}((1, u'(x))^T, (1, u'(x))^T)^{1/2} \, dx$.

(d) Betrachten Sie nun die durch

$$[a,b] \times [0,2\pi] \ni (x,\varphi) \mapsto F(x,\varphi) = (x, u(x)\cos\varphi, u(x)\sin\varphi)^T$$

gegebene Rotationsfläche $\Gamma = F([a,b] \times [0,2\pi])$ mit mittlerer Krümmung H und Gaußscher Krümmung K und die dazugehörige Willmoreenergie

$$W(u) = \int_\Gamma (H^2 - K)\, dS.$$

Vergleichen Sie $(H^2 - K)(x)$ und $\kappa_{\text{geod}}(x)^2$ bzw. $W(u)$ und $W_h(u)$.

(e) Folgern Sie aus Aufgabe 4.1, dass sich die elastische Energie W_h einer Kurve in H bzw. die Willmoreenergie einer Rotationsfläche in $\mathbb{R}^3$ unter Inversion der Kurve bzw. Rotationsfläche nicht ändern.

5.3 Aufgabe (4 Punkte)

(a) Betrachten Sie nochmals die Halbebene $H := \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 : u^2 > 0\}$ mit der „hyperbolischen Metrik" $g_{ij}(u) = \frac{1}{(u^2)^2}\delta_{ij}$ und zeigen Sie, dass man je zwei Punkte $p, q \in H$ durch bis auf Umparamatrisierung genau eine Geodätische verbinden kann. Konstruieren Sie geodätische Dreiecke, deren Innenwinkelsumme beleibig nahe an 0 liegt.

(b) Betrachten Sie nun die Standardsphäre $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ zusammen mit der ersten Fundamentalform und konstruieren Sie geodätische Dreiecke, deren Innenwinkelsumme beleibig nahe an 3π liegt.

5.4 Aufgabe (4 Punkte)

Betrachten Sie erneut die Halbebene $H := \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 : u^2 > 0\}$ mit der „hyperbolischen Metrik" $g_{ij}(u) = \frac{1}{(u^2)^2}\delta_{ij}$ sowie die beiden Kurven

$$c_1 : [\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi] \to H,\ c_1(t) = \sqrt{2}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}, \qquad c_2 : [0,2] \to H,\ c_2(t) = \begin{pmatrix}1-t\\ 1\end{pmatrix},$$

die die Punkte $p = (1,1)^T$ und $q = (-1,1)^T$ verbinden. Berechnen Sie die Parallelverschiebung von $x_0 = (-1,1)^T$ längs der Kurven c_1 und c_2.
Hinweis. Verwenden Sie, dass eine geeignete Umparametrisierung $c_1 \circ \varphi$ eine Geodätische ist; beachten Sie dabei Satz 11.4 (b).

Ihre Lösungen geben Sie bitte am Dienstag, den 18.06.2013 in der Vorlesung ab.

Differentialgeometrie II
Sommersemester 2013
H.-Ch. Grunau

6 18.06.2013

6.1 Aufgabe (7 Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine wegweise zusammenhängende reguläre Fläche mit Riemannscher Metrik g. Es gelte, dass für je zwei Punkte $p, q \in S$ der Paralleltransport $T_pS \to T_qS$ nur von p und q, nicht aber von der Wahl der Verbindungskurve abhängt. Zeigen Sie, dass dann die Gaußsche Krümmung von S verschwindet:

$$K(p) \equiv 0 \text{ auf } S.$$

Hinweis. Wählen Sie p_0 und eine Orthonormalbasis $\{x_0, y_0\}$ von $T_{p_0}S$. Betrachten Sie globale Vektorfelder $x(\,.\,), y(\,.\,)$ mit $x(p_0) = x_0, y(p_0) = y_0$, die längs jeder Kurve parallel sind. Betrachten Sie nun Fermikoordinaten längs einer geeigneten Kurve und zeigen Sie in diesen Koordinaten $g_{ij}\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \equiv \delta_{ij}$.

6.2 Aufgabe (4 Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte reguläre Fläche mit Rand und mit Riemannscher Metrik g; weiter sei $f : S \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, $M_f := \{v : S \to \mathbb{R}, v \text{ ist glatt}, v|_{\partial S} = f|_{\partial S}\}$. Nehmen Sie an, dass ein $u \in M_f$ existiert derart, dass für alle $v \in M_f$ gilt:

$$\int_S g_p(\nabla u(p), \nabla u(p))\, dS(p) \leq \int_S g_p(\nabla v(p), \nabla v(p))\, dS(p).$$

Zeigen Sie: Dann ist u harmonisch auf S.

6.3 Aufgabe (3 Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte reguläre Fläche (d.h. ohne Rand) mit Riemannscher Metrik g; außerdem sei S wegweise zusammenhängend.

Man zeige, dass dann jede harmonische Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ konstant ist. Folgern Sie hieraus einen neuen Beweis, dass es keine kompakten Minimalflächen gibt.

6.4 Aufgabe (8 Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte reguläre Fläche mit Riemannscher Metrik g und entsprechender Gauß-Krümmung K und Laplaceoperator Δ_g. Sei $\varphi : S \to \mathbb{R}$; wir betrachten die zu g konforme Metrik $\tilde{g}(p) := e^{\varphi(p)} \cdot g(p)$ mit entsprechender Gauß-Krümmung $\tilde{K}$.

(a) Man zeige, dass für beliebiges $p \in S$ gilt:

$$-\Delta_g \varphi(p) + 2K(p) = 2\tilde{K}(p) \cdot e^{\varphi(p)}.$$

Hinweis. Wählen Sie $p \in S$ beliebig, aber fest, und betrachten Sie Riemannsche Normalkoordinaten in p.

(b) Geben Sie Lösungen φ im euklidischen $\mathbb{R}^2$ an für

$$-\Delta\varphi(p) = -2e^{\varphi(p)}, \qquad p \in B_1(0) \quad \text{bzw.} \quad -\Delta\varphi(p) = 2e^{\varphi(p)}, \qquad p \in \mathbb{R}^2.$$

Ihre Lösungen geben Sie bitte am Dienstag, den 02.07.2013 in der Vorlesung ab.