Aufgaben und Lösungsskizzen zum Kurs „Abbildungsgrad und Fixpunktsätze“

Nummern von Definitionen und Sätzen beziehen sich auf das Vorlesungmanuskript, welches man auf derselben Internetseite wie diese Lösungshinweise herunterladen kann.

1. **(a) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Man zeige: Es gibt eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A$, die dicht in A liegt.**

   (b) Man nennt einen metrischen Raum X separabel, falls er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Zeigen Sie in Verallgemeinerung von (a): Jeder Teilraum A eines separablen metrischen Raumes X ist wieder separabel.

Lösung:

(a) $A \cap \overline{B_R}$ ist kompakt. Für jedes n ist $\bigcup\limits_{x\in A\cap\overline{B_R}} B_{\frac{1}{n}}(x)$ offene Überdeckung, aus der man endliche Teilüberdeckung auswählen kann. Indem man $R \to \infty$ gehen lässt, findet man eine Folge

$$(x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}} \subset A \quad \text{mit} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}(x_{n,k}) \supset A.$$

$(x_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ leistet das Gewünschte.

(b) Sei $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine dichte Teilmenge im separablen metrischen Raum (X,d), $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{\frac{1}{2n}}(b_k) = X.$$

Betrachte nur die k_ℓ mit $B_{\frac{1}{2n}}(b_{k_\ell}) \cap A \neq \emptyset$, $\bigcup\limits_{\ell=1}^{\infty} B_{\frac{1}{2n}}(b_{k_\ell}) \supset A$. Wähle zu jedem ℓ ein $a_{n,\ell} \in A \cap B_{\frac{1}{2n}}(b_{k_\ell})$, wegen

$$d(y, a_{n,\ell}) \leq d(y, b_{k_\ell}) + d\underbrace{(b_{k_\ell}, a_{n,\ell})}_{<\frac{1}{2n}}$$

ist $B_{\frac{1}{2n}}(b_{k_\ell}) \subset B_{\frac{1}{n}}(a_{n,\ell})$, also

$$A \subset \bigcup_{\ell=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}(a_{n,\ell})$$

Die Folge $(a_{n,\ell})_{(n,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ leistet das Gewünschte.

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Konstruieren Sie eine stetige bzw. eine beliebig oft differenzierbare Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $0 \le \varphi(x) \le 1$ sowie

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \textbf{falls } x \in \Omega; \\ 0, & \textbf{falls dist}(x, \Omega) \ge 1. \end{cases}$$

Lösung: Eine stetige Lösung erhält man durch $\varphi(x) = \max\{1 - \operatorname{dist}(x, \Omega), 0\}$.

Zur C_0^∞-Variante: Sei $\tilde{\Omega} := \left\{x : \operatorname{dist}(x, \Omega) < \frac{1}{3}\right\}$, $\tilde{\varphi}(x) = \max\{1 - 3\operatorname{dist}(x, \Omega), 0\}$. Diese Funktion wird dem Glättungsprozedere aus dem Beweis des Weierstraßschen Approximationssatzes A.4 unterworfen, wobei der Glättungsradius des Glättungskernes $< \frac{1}{3}$ gewählt wird.

3. Sei $n \ge 2$. Man zeige: $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1(0)}$ ist zusammenhängend.

Lösung: $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1(0)}$ zu verbinden in $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1(0)}$.
Da $n \ge 2$, o. B. d. A. x_0, x_1 linear unabhängig, d. h.

$$\forall \tau \in [0,1] : \qquad x_\tau = \tau x_0 + (1-\tau)x_1 \neq 0,$$

das heißt $|x_\tau| > \varepsilon$.
Verbinde geradlinig zunächst $x_0, \frac{1}{\varepsilon}x_0$,
dann $\frac{1}{\varepsilon}x_0$ und $\frac{1}{\varepsilon}x_1$ über $\frac{1}{\varepsilon}x_\tau$, dann $\frac{1}{\varepsilon}x_1$ und x_1.

4. Sei $n \ge 2$, es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijektiv und stetig. Außerdem gelte $\lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = \infty$. Man zeige: $f(S^{n-1})$ zerlegt $\mathbb{R}^n$ in genau zwei disjunkte Gebiete, deren gemeinsamer Rand $f(S^{n-1})$ ist.

Lösung: Wir zeigen zunächst, dass auch f^{-1} stetig ist. Sei dazu $\lim_{k\to\infty} y_k = y_0$, es bezeichne $x_k := f^{-1}(y_k), x_0 := f^{-1}(y_0)$. Die Voraussetzung $\lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = \infty$ sichert, dass die Folge (x_k) beschränkt ist. Wir nehmen an, dass sie nicht gegen x_0 konvergiert, so dass dann eine Teilfolge (x_{k_ℓ}) existiert, die auf Grund des Satzes von Bolzano-Weierstraß gegen ein $\tilde{x}_0 \neq x_0$ konvergiert. Da f stetig ist, folgt

$$f(\tilde{x}_0) = \lim_{\ell\to\infty} f(x_{k_\ell}) = \lim_{\ell\to\infty} y_{k_\ell} = y_0 = f(x_0),$$

im Widerspruch zur Bijektivität von f.

Setze $\Omega_i = f(B_1(0))$, $\Omega_a = f\left(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1(0)}\right)$.
Ω_i, Ω_a sind Urbilder offener Mengen unter f^{-1}, also offen. (Weg-) Zusammenhang ist offensichtlich.

$(*)$ Wegen der Bijektivität ist auch $\Omega_i \cup f(S^{n-1}) \cup \Omega_a = \mathbb{R}^n$ offensichtlich.
Für jedes $x \in f(S^{n-1})$, $\varepsilon > 0$ gilt

$$f^{-1}(x) \in S^{n-1}, \qquad f^{-1}\left(B_\varepsilon(x)\right) \cap B_1(0) \neq \emptyset,$$

$$f^{-1}\left(B_\varepsilon(x)\right) \cap \left(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1(0)}\right) \neq \emptyset.$$

$$\Rightarrow B_\varepsilon(x) \cap \Omega_i \neq \emptyset, \qquad B_\varepsilon(x) \cap \Omega_a \neq \emptyset.$$

Das heißt $f(S^{n-1}) \subset \partial\Omega_i$, $f(S^{n-1}) \subset \partial\Omega_a$, die umgekehrte Inklusion ist wegen der disjunkten Zerlegung $(*)$ offensichtlich. Schließlich ist Ω_i beschränkt und Ω_a unbeschränkt.

5. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, dessen glatter Rand $\partial\Omega$ durch die glatte reguläre einfach geschlossene Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)$ gegeben werde. Dabei sei der Durchlaufsinn von γ so gewählt, dass durch

$$\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}\left(y'(t), -x'(t)\right)$$

ein *äußeres* Einheitsnormalenfeld an $\partial\Omega$ in $z = \gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$ gegeben werde. Weiter seien f, g in einer Umgebung von $\overline{\Omega}$ definiert und stetig differenzierbar. Man definiert allgemein das Kurvenintegral

$$\int_\gamma (f\,dx + g\,dy) := \int_a^b \left(f(\gamma(t)) \cdot x'(t) + g(\gamma(t)) \cdot y'(t)\right)\,dt.$$

Der Satz von Stokes lautet dann:

$$\int_\gamma (f\,dx + g\,dy) = \int_\Omega \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\right)\,d(x, y).$$

(a) Leiten Sie den Satz von Stokes für den Spezialfall $\Omega = B_R(0)$ direkt aus dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung her.

(b) Leiten Sie den allgemeinen Satz von Stokes aus dem Satz von Gauß her.

Lösung:

(a) Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \cos(t) + i\sin(t)$;

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (f\,dx + g\,dy) &= \int_0^{2\pi} \left(f(\gamma(t))\cdot(-R\sin(t)) + g(\gamma(t))\cdot R\cos(t)\right)\,dt \\
&= R\int_0^{\pi} f(R\cos t, R\sin t)\cdot(-\sin t)\,dt \\
&\quad +R\int_\pi^{2\pi} f(R\cos t, R\sin t)\cdot(-\sin t)\,dt \\
&\quad +R\int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(R\cos t, R\sin t)\cdot(\cos t)\,dt \\
&\quad +R\int_{\pi/2}^{3\pi/2} g(R\cos t, R\sin t)\cdot(\cos t)\,dt.
\end{aligned}$$

Für das erste Integral benutzt man die Substitution:

$$t = \arccos\frac{x}{R}, \quad , \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad \sin t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}},$$

und für die jeweils folgenden:

$$t = 2\pi - \arccos\frac{x}{R}, \quad , \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad \sin t = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}},$$

$$t = \arcsin\frac{y}{R}, \quad , \frac{dt}{dy} = \frac{1}{\sqrt{R^2 - y^2}}, \quad \cos t = \sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2}},$$

$$t = \pi - \arcsin\frac{y}{R}, \quad , \frac{dt}{dy} = -\frac{1}{\sqrt{R^2 - y^2}}, \quad \cos t = -\sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2}}.$$

Damit folgt unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (f\,dx + g\,dy) &= -\int_R^R f\left(x, \sqrt{R^2 - x^2}\right)\,dx + \int_R^R f\left(x, -\sqrt{R^2 - x^2}\right)\,dx \\
&\quad + \int_R^R g\left(\sqrt{1 - y^2}, y\right)\,dy - \int_R^R g\left(-\sqrt{1 - y^2}, y\right)\,dy \\
&= -\int_R^R [f(x,y)]_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{y=\sqrt{R^2-x^2}}\,dx + \int_R^R [f(x,y)]_{x=-\sqrt{R^2-y^2}}^{x=\sqrt{R^2-y^2}}\,dy \\
&= -\int_R^R \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dy\right)\,dx \\
&\quad + \int_R^R \left(\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dx\right)\,dy \\
&= \int_{B_R(0)} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\,d(x,y).
\end{aligned}$$

(b)

$$\int_\gamma (f\,dx + g\,dy) = \int_a^b \left(f(\gamma(t))\cdot x'(t) + g(\gamma(t))\cdot y'(t)\right)\,dt = \int_{\partial\Omega} (g,-f)\cdot\nu\,ds(x,y)$$
$$= \int_\Omega \operatorname{div}(g,-f)\,d(x,y) = \int_\Omega \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\right)\,d(x,y).$$

6. (a) Man bestimme den Abbildungsgrad $d(z\mapsto \bar z, B_R(0), 0)$.

(b) Beweisen Sie den Fundamentalsatz der Algebra, indem Sie auf geeignetem $B_R(0)$ den Abbildungsgrad von $z\mapsto z^k$ bestimmen.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} d(z\mapsto \bar z, B_R(0), 0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\left(\frac{1}{\bar z}\,dx + \frac{-i}{\bar z}\,dy\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\overline{R\exp(it)}}(-R\sin t) + \frac{-i}{\overline{R\exp(it)}}(R\cos t)\right)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{i\sin t}{\exp(-it)} - \frac{\cos t}{\exp(-it)}\right)\,dt = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\exp(-it)}{\exp(-it)} = -1. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} &d(z\mapsto z^k, B_R(0), 0) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\left(\frac{kz^{k-1}}{z^k}\,dx + \frac{kz^{k-1}\cdot i}{z^k}\,dy\right) \\ &= \frac{k}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{R\exp(it)}(-R\sin t) + \frac{i}{R\exp(it)}(R\cos t)\right)\,dt \\ &= \frac{k}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\exp(it)}{\exp(it)} = k. \end{aligned}$$

Sei nun

$$\begin{aligned} P(z) &= z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \\ &= z^n(1 + a_{n-1}z^{-1} + \ldots + a_1 z^{1-n} + a_0 z^{-n}). \end{aligned}$$

Man bestimme R so groß, dass für $|z| = R$ gilt:

$$|a_{n-1}z^{-1} + \ldots + a_1 z^{1-n} + a_0 z^{-n}| \le \frac{1}{2}.$$

Mit $P_0(z) = z^n$ ist dann für $|z| = R$:

$$|P_0(z) - P(z)| = |z^n| \cdot |a_{n-1}z^{-1} + \ldots + a_1 z^{1-n} + a_0 z^{-n}| \leq \frac{1}{2}R^n < R^n = |P_0(z)|.$$

Nach dem Satz von Rouché ist also

$$n = d(P_0, B_R(0), 0) = d(P, B_R(0), 0),$$

und P besitzt wenigstens eine Nullstelle. Zu dieser kann dann von P ein Linearfaktor abgespalten werden, und nach n solchen Schritten zerfällt P über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren.

7. Gegeben sei ein Polynom n–ten Grades

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \quad a_j \in \mathbb{C}.$$

Ist es möglich, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gilt:

$$|P(z)| < 1?$$

Lösung: Es bezeichne $B = B_1(0) \subset \mathbb{C}$ die Einheitskreisscheibe und
$P_1(z) = -(a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0)$, $P_0(z) = z^n$.
$P_\tau(z) = \tau P_1(z) + (1-\tau)P_0(z)$.
Annahme: Für $|z| = 1$ wäre $|P(z)| = |P_0(z) - P_1(z)| < 1$
$\Rightarrow \forall |z| = 1 : \forall \tau \in (0,1] : \quad |P_\tau(z)| \geq |P_0(z)| - \tau|P_0(z) - P_1(z)| > 1 - \tau \geq 0.$
Schließlich ist für $\tau = 0$ offensichtlich: $\forall |z| = 1 : \quad |P_0(z)| = |z|^n = 1$. Somit sind P_0 und P_1 auf B zulässig zueinander homotop. Es folgt:
$n = d(P_0, B) = d(P_1, B) \leq n - 1$, ein Widerspruch.

8. (a) **Die Abbildung $u : \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar und habe in 0 ein strenges lokales Maximum bzw. Minimum bzw. Sattel, d. h. $\nabla u(0) = 0$ und Hess $u(0)$ negativ definit bzw. positiv definit bzw. indefinit.**
Betrachte das Gradientenfeld $f(z) = u_x(z) + iu_y(z)$.
Man zeige: ind $(f, 0) = 1$ bzw. 1 bzw. -1.

(b) **Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, für ein geeignetes R gelte: für $|z| \geq R$ ist $u(x,y) = ax + by$, mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$.**
Ferner habe u einen nichtdegenerierten kritischen Punkt wie in a). Man zeige: Dann hat u mindestens einen weiteren kritischen Punkt.

Lösung:

(a) Sei zunächst speziell

$$u = u_0 + ax^2 + by^2$$

mit den Fällen $\quad a < 0, b < 0 \quad | \quad a > 0, b > 0 \quad | \quad a > 0, b < 0.$

$$f(z) = 2ax + i2by,$$

$$f_x = 2a, \qquad f_y = 2bi.$$

Durch eine einfache Homotopie kann man

$$|a| = |b| = 1$$

erreichen.

$$\operatorname{ind}(f,0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon}\left(\frac{f_x}{f}\,dx + \frac{f_y}{f}\,dy\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon}\frac{(2ax-2iby)(2a\,dx+2bi\,dy)}{(2ax+2iby)(2ax-2iby)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon}\frac{4(ax-iby)(a\,dx+ib\,dy)}{4a^2x^2+4b^2y^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{(a\cos t - ib\sin t)(-a\sin t + ib\cos t)}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}(-a^2+b^2)\cos t\sin t\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ab\cos^2 t + ab\sin^2 t\,dt$$

$$= ab = \operatorname{sgn}(ab).$$

Sei nun u allgemein wie beschrieben.
Nach einer Drehung (Multiplikation mit einer komplexem Zahl, kürzt sich in Windungszahl) kann man annehmen, dass

$$f(z) = 2ax + i2by + h(z)$$

mit $\quad h(z) \quad$ stetig differenzierbar und $\quad \frac{h(z)}{|z|} \to 0 \quad (|z| \to 0)$

$$f_0(z) := 2ax + i2by$$

für $\quad |z| = \varepsilon \quad$ ist $\quad |f_0(z)| = 2\,\varepsilon\sqrt{a^2+b^2}$
und $\quad |f(z) - f_0(z)| = |h(z)| = \left|\frac{h(z)}{|z|}\right|\varepsilon$
Wähle ε so klein, so dass für $\quad |z| \le \varepsilon \quad$ gilt $\quad \left|\frac{h(z)}{|z|}\right| < 2\sqrt{a^2+b^2}$
Nach dem Satz von Rouché ist dann

$$\operatorname{ind}(f,0) = \operatorname{ind}(f_0,0) = \operatorname{sgn}(ab) = \begin{cases} 1, & \text{falls Hess } u(0) \text{ definit,} \\ -1 & \text{falls Hess } u(0) \text{ indefinit.} \end{cases}$$

(b) Für $\quad |z| \ge R \quad$ ist $\quad f(z) = a + ib$, hat also Abbildungsgrad $d(f, B_R(0), 0) = 0$.
Wegen $\quad \operatorname{ind}(f, z_0) \neq 0 \quad$ folgt aus der Indexformel die Existenz eines weiteren Punktes $\quad z_1 \quad$ mit $\quad f(z_1) = 0. \quad$ Andernfalls wäre $\quad 0 = d(f, B_R(0), 0) = \operatorname{ind}(f, z_0) \neq 0, \quad$ Widerspruch!

9. An Hand von einfachen Beispielen „prüfe“ man die Notwendigkeit der Bedingungen $\omega(r) = 0$ für $r \leq \delta$ und für $r \geq \varepsilon$.

Lösung: Wir betrachten gleich im Vorgriff auf spätere Verallgemeinerungen $\omega(f(x))$ statt $\omega(|f(x)|)$. Sei

$$\Omega = (-1,1), \quad f(x) = x,$$

$$\omega_a(x) = \begin{cases} 0, & x < a - \frac{1}{2}, \quad x > a + \frac{1}{2}, \\ 2 - 4|x-a|, & a - \frac{1}{2} \leq x \leq a + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\int_\Omega \omega_a(f(x)) J_f(x) dx = \int_{-1}^{1} \omega_a(x) dx$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad a < -\frac{3}{2}, \quad a > \frac{3}{2}, \\ 1, & \text{falls} \quad -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + 2|a| - 2|a|^2, & \text{falls} \quad \frac{1}{2} \leq |a| \leq 1 \\ \frac{9}{2} - 6|a| + 2a^2, & \text{falls} \quad 1 \leq |a| \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Das heißt, dass $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ sicher eine notwendige Bedingung für die korrekte Berechnung des Abbildungsgrades ist, das heißt $\operatorname{supp} \omega_a \subset \overline{f(\Omega)}$.

10. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen.

(a) Sei $x_0 \in \mathbb{R}, x_0 \notin \partial\Omega$. Man bestimme den Abbildungsgrad von $f = \sigma(Id - x_0)$, $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

**(b) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ bijektiv, $f^{-1} \in C^1$, $f \neq 0$ auf $\partial\Omega$.
Man bestimme $d(f, \Omega, 0)$ mit Hilfe der Transformationsformel.**

Lösung:

(a) $J_f(x) = \sigma^n$.
Auf $\partial\Omega$ gilt $|f(x)| = |\sigma||x - x_0| \geq |\sigma| \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega) > 0$.
Sei ω stetig, $\omega(r) = 0$ für $r \leq \delta$ und $r \geq \varepsilon$, wobei $0 < \delta < \varepsilon < |\sigma| \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \omega(|x|)\, dy = 1$.

$$d(f, \Omega) = \int_\Omega \omega(|\sigma||x - x_0|)\, \sigma^n\, dx$$

$$= \sigma^n \int_{\Omega \cap B_{|r| \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)}(x_0)} \omega(|\sigma||x - x_0|)\, dx$$

$$= \begin{cases} 0, & x_0 \notin \Omega \\ \sigma^n \int_{\mathbb{R}^n} \omega(|\sigma||x - x_0|) dx = \frac{\sigma^n}{|\sigma|^n} \int_{\mathbb{R}^n} \omega(|x|)\, dx = (\operatorname{sgn} \sigma)^n & x_0 \in \Omega \end{cases}$$

(b) $J_f(x) \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$, setze

$$\sigma = \operatorname{sgn} J_f(x) \equiv \text{ const} \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

Sei $|f(x)| > \varepsilon$ auf $\partial\Omega$, ω stetig mit
$\omega(r) = 0$ für $r \leq \delta$ und $r \geq \varepsilon$, $0 < \delta < \varepsilon$, $\int_{\mathbb{R}^n} \omega(|x|)\, dx = 1$.

$$d(f, \Omega) = \int_\Omega (|f(x)|) J_f(x)\, dx = \sigma \int_\Omega \omega(|f(x)|) |J_f(x)|\, dx$$

$$= \sigma \int_{f(\Omega)} \omega(|x|)\,dx = \begin{cases} \sigma & \text{falls} \quad 0 \in f(\Omega), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

11. Für hinreichend glattes $f, f|\partial\Omega \neq 0$, und glattes Ω definiere man $d(f, \Omega, 0)$ mit Hilfe eines Oberflächenintegrals und vergleiche mit der ursprünglichen Definition des Abbildungsgrades für Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Lösung: Sei $|f(x)| > \varepsilon > 0$ auf $\partial\Omega$, $0 < \delta < \varepsilon$, ω stetig mit $\omega(r) = 0$ für $r \leq \delta$ und $r \geq \varepsilon$. Bezeichne wie im Beweis von Hilfssatz 2.1

$$\varphi(r) = r^{-n} \left(\int_0^r \rho^{n-1} \omega(\rho)\,d\rho \right)$$

$$A_{ki} = \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_{i-1}}, e_k, \frac{\partial f}{\partial x_{i+1}}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

mit e_k in der i-ten Spalte.
Dann wurde dort gezeigt:

$$\omega(|f(x)|) J_f(x) = \operatorname{div} \left(\varphi(|f(x)|) \cdot \sum_{k=1}^n f_k(x) \cdot A_{ki}(x) \right).$$

Nach dem Gaußschen Satz folgt:

$$d(f, \Omega) = \int_\Omega \omega(|f(x)|) J_f(x)\,dx$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{k=1}^n \varphi(|f(x)|) \cdot f_k(x) \cdot A_{ki}(x) \right)_{i=1,\dots,n} \cdot \nu\,dS.$$

Man beachte nun, dass für das von uns zubetrachtende φ gilt:

$$\varphi(|f(x)|) = |f(x)|^{-n} \int_0^{|f(x)|} \rho^{n-1} \omega(\rho)\,d\rho$$

$$= |f(x)|^{-n} \int_0^\varepsilon \rho^{n-1} \omega(\rho)\,d\rho = \frac{1}{n e_n |f(x)|^n}.$$

Damit erhalten wir folgende Alternativdefinition des Abbildungsgrades mittels des folgenden Oberflächenintegrals:

$$d(f, \Omega) = \frac{1}{n e_n} \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{k=1}^n \frac{f_k(x) A_{ki}(x)}{|f(x)|^n} \right)_{i=1,\dots,n} \nu\,dS$$

$$\left[\begin{array}{l} \nu \cdot dS = d\vec{S} \quad \text{mit} \quad d\vec{S} = \left(..., (-1)^{i-1} dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n, ... \right) \\ \text{Parametrisierung bezüglich } \nu \text{ positiv orientiert.} \end{array} \right]$$

Zurück zu $n = 2$; wir zeigen die Übereinstimmung dieser neuen mit der ursprünglichen Definition:

$$d(f,\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} \frac{1}{|f(x)|^2}((f_1A_{11} + f_2A_{21})\,dx_2 - (f_1A_{12} + f_2A_{22})\,dx_1)$$

$$= \frac{i}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{1}{f(x)\overline{f(x)}}((f_1f_{2,x_2} - f_2f_{1,x_2})\,dx_2 - (-f_1f_{2,x_1} + f_2f_{1,x_1})\,dx_1)$$

$$\left[\begin{array}{l} \overline{f}\cdot f_{x_1} = (f_1 - if_2)\,(f_{1,x_1} + if_{2,x_1}) = f_1f_{1,x_1} + f_2f_{2,x_1} + i\,(f_1f_{2,x_1} - f_2f_{1,x_1}) \\ \overline{f}\cdot f_{x_2} = f_1f_{1,x_2} + f_2f_{2,x_2} + i\,(f_1f_{2,x_2} - f_2f_{1,x_2}) \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{f_{x_1}}{f}\,dx_1 + \frac{f_{x_2}}{f}\,dx_2\right) -$$

$$\underbrace{-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{|f(x)|^2}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{|f|^2}{2}\right)dx_1 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{|f|^2}{2}\right)dx_2\right)\right)}_{=\ \dots\ =\ 0 \text{ mittels Stokes und etwas Rechnerei}}.$$

12. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, $0 \in \Omega$, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ sei stetig. Für alle $x \in \partial\Omega$ gelte:

$$f(x)\cdot x > 0.$$

Dann besitzt f in Ω eine Nullstelle.

Lösung: Wir homotopieren f in die Identität:
$f_\tau(x) := \tau x + (1-\tau)f(x), \quad f_0 = f.$
Für $\quad \tau \in [0,1], \quad x \in \partial\Omega \quad$ gilt:

$$f_\tau(x)\cdot x = \tau\underbrace{|x|^2}_{>0} + (1-\tau)(\underbrace{x\cdot f(x)}_{>0}) > 0 \Rightarrow f_\tau(x) \neq 0.$$

Der Homotopiesatz zeigt: $\quad d(f,\Omega) = d(Id,\Omega)$.
Wegen Aufgabe 10 und $\quad 0 \in \Omega$ folgt $d(Id,\Omega) = 1$ und damit die Behauptung.

13. Sei $f : [a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n] \to \mathbb{R}^n$ stetig.
Es gelte für $i = 1,...,n$, $x_j \in [a_j,b_j] \quad (j \neq i)$:

$$f_i(x_1,...,x_{i-1},a_i,x_{i+1},...,x_n) \geq 0$$

und

$$f_i(x_1,...,x_{i-1},b_i,x_{i+1},...,x_n) \leq 0.$$

Man zeige: f besitzt eine Nullstelle.

Lösung: Zunächst kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_i < b_i$ annehmen.
Wäre nämlich $a_1 = b_1,$ so wäre

$$f_1(a_1,\ .\ )|_{[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_n,b_n]} = 0,$$

und es reicht $f_2(a_1,\ .\ ), ..., f_n(a_1,\ .\ )$ auf $[a_2,b_2]\times ... \times [a_n,b_n]$ zu betrachten.
Sei also $\Omega = (a_1,b_1) \times ... \times (a_n,b_n) \neq \emptyset, \quad x_0 \in \Omega,$ betrachte

$$F_0 = -Id + x_0, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

$$F_\tau = \tau f + (1-\tau)F_0.$$

Für $0 \le \tau < 1, \quad x \in \partial\Omega$ gilt:
für ein i ist $x_i = a_i$ oder $x_i = b_i$;

$$F_{\tau,i}(x) = -(x_i - x_{0,i})(1-\tau) + \tau f_i(x)$$

$$= \begin{cases} \ge (x_{0,i} - a_i)(1-\tau) & > 0, \quad x_i = a_i, \\ \le -(b_i - x_{0,i})(1-\tau) & < 0, \quad x_i = b_i. \end{cases}$$

Das heißt $F_\tau|_{\partial\Omega} \neq 0.$ Wegen des Homotopiesatzes und $x_0 \in \Omega$ (Aufgabe 10 (a)) folgt für $\tau < 1:$

$$0 \neq d(F_0,\Omega) = d(F_\tau,\Omega).$$

Das heißt, dass für jedes $\tau \in [0,1)$ ein $x_\tau \in \Omega$ existiert mit

$$0 = F_\tau(x_\tau) = (1-\tau)(x_0 - x_\tau) + \tau f(x_\tau).$$

Nach Auswahl einer Teilfolge folgt für $\tau \nearrow 1: \quad x_\tau \to x_1 \in \overline{\Omega}, \quad 0 = f(x_1).$

14. Sei Ω offen, beschränkt und konvex. Man zeige, dass der Brouwersche Fixpunktsatz auch auf $\overline{\Omega}$ gilt.

Hinweis: **Arbeiten Sie mit dem in der Veranstaltung vorgestellten Minkowski–Funktional.**

Zusatz: **Was kann man sagen, wenn $K \neq \emptyset$ kompakt und konvex ist, aber nicht mehr notwendigerweise innere Punkte enthält, und $f : K \to K$ stetig ist?**

Lösung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $0 \in \Omega$. Wir betrachten das *Minkowski-Funktional*:

$$p_{\overline{\Omega}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

$$p_{\overline{\Omega}}(x) = \inf\left\{\alpha > 0 : \quad \frac{1}{\alpha}x \in \overline{\Omega}\right\}.$$

Auf Grund der Offenheit und Konvexität von Ω sowie von $0 \in \Omega$ lässt sich elementar zeigen. dass für $\lambda \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$p_{\overline{\Omega}}(\lambda x) = \lambda p_{\overline{\Omega}}(x),$$

$$p_{\overline{\Omega}}(x+y) \leq p_{\overline{\Omega}}(x) + p_{\overline{\Omega}}(y).$$

Damit folgt die Stetigkeit:

$$\text{Sei} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{beliebig}, \quad y_k \to 0,$$

$$p(x) - \underbrace{p(-y_k)}_{\to 0} \leq p_{\overline{\Omega}}(x+y_k) \leq p_{\overline{\Omega}}(x) + \underbrace{p_{\overline{\Omega}}(y_k)}_{\to 0},$$

denn $p(\pm y_k) \to 0$, da Ω $0-$Umgebung.
Schließlich hat man: $x \in \overline{\Omega} \Leftrightarrow p_{\overline{\Omega}}(x) \leq 1$.
Sei R so, dass $\overline{B_R(0)} \supset \overline{\Omega}$,

$$\rho : \overline{B_R(0)} \to \overline{\Omega}, \quad \rho(x) = \min\left\{1, \frac{1}{p_{\overline{\Omega}}(x)}\right\} \cdot x$$

Es gilt: ρ stetig, $\forall x \in \overline{B_R(0)}: \quad \rho(x) \in \overline{\Omega}$, für $x \in \overline{\Omega}: \quad \rho(x) = x$.
Damit können wir nun die angestrebte Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes zeigen:
Sei $f : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ eine stetige Abbildung.
Die Fortsetzung $\tilde{f} : \quad \overline{B_R} \to \overline{\Omega} \hookrightarrow \overline{B_R}, \quad \tilde{f} := f \circ \rho$ ist ebenfalls stetig, also existiert nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz in Kugeln ein $\xi \in \overline{B_R}: \quad \tilde{f}(\xi) = f(\rho(\xi)) = \xi$.
Da $\tilde{f}(\overline{B_R}) = \overline{\Omega}: \quad \xi \in \overline{\Omega}, \quad \rho(\xi) = \xi$, also

$$\exists \xi \in \overline{\Omega}: \quad f(\xi) = \xi.$$

Zum Zusatz: Enthält K keine inneren Punkte, so ist K in einer Hyperebene des $\mathbb{R}^n$ enthalten, und man kann die Dimension des umgebenden Raumes solange reduzieren, bis $K \subset \mathbb{R}^m$, $m < n$ geeignet, innere Punkte enthält.

15. Sei n ungerade, $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$ sei stetig.
Dann gibt es ein $\zeta \in S^{n-1}$ mit $f(\zeta) = \zeta$ oder $f(\zeta) = -\zeta$.

Lösung: Der Fall $n = 1$ ist trivial, ohne Beschränkung der Allgemeinheit $n \geq 3$.
Setze f gemäß dem Satz von Tietze stetig nach $\overline{B_1(0)}$ fort. Sicher gilt, da n ungerade:

$1 = d(id, B_1(0)) \neq v(f, S^{n-1})$ oder
$-1 = d(-id, B_1(0)) \neq v(f, S^{n-1})$.

Dabei bezeichnet $v(f, S^{n-1})$ die *Ordnung* der Abbildung $f : \partial B_1(0) = S^{n-1} \to S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.
Im ersten Fall ist die Homotopie

$$(t, x) \mapsto tx + (1-t)f(x)$$

nicht zulässig, d. h. $\quad \exists t \in (0,1), \quad \exists \xi \in S^{n-1}:$

$$t\xi + (1-t)f(\xi) = 0,$$

$$\text{das heißt} \quad f(\xi) = \frac{t}{t-1}\,\xi.$$

Nun ist gemäß Voraussetzung $\quad 1 = |f(\xi)| = \frac{t}{1-t}|\xi| = \frac{t}{1-t}$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{2}, \quad f(\xi) = -\xi.$$

Im zweiten Fall ist die Homotopie

$$(t,x) \mapsto t(-x) + (1-t)f(x)$$

unzulässig, d. h. $\quad \exists t \in (0,1), \quad \exists \xi \in S^{n-1}:$

$$t(-\xi) + (1-t)f(\xi) = 0,$$

$$\text{das heißt} \quad f(\xi) = \frac{t}{1-t}\xi,$$

zudem ist nach Voraussetzung: $\quad 1 = |f(\xi)| = \frac{t}{1-t}, \quad$ also $t = \frac{1}{2}$ und

$$f(\xi) = \xi.$$

16. Sei $f : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}^n$ stetig, für alle $x \in \overline{B_1(0)}$ gelte $f(x) \neq 0$. Dann existieren Zahlen $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ und Punkte $\zeta_1, \zeta_2 \in S^{n-1}$ mit $f(\zeta_1) = \lambda_1\zeta_1$, $f(\zeta_2) = \lambda_2\zeta_2$.

Lösung: Ähnlich wie Aufgabe 15: $\quad d(f, B_1(0)) = 0, \quad$ das heißt: Beide Homotopien aus Aufgabe 15 sind unzulässig, unabhängig von n gerade/ungerade.
Also existieren $\quad t_1, t_2 \in (0,1), \quad \xi_1, \xi_2 \in S^{n-1}:$

$$f(\xi_1) = \underbrace{\frac{t_1}{1-t_1}}_{\lambda_1}\xi_1, \qquad f(\xi_2) = \underbrace{\frac{t_2}{t_2-1}}_{\lambda_2}\xi_2.$$

17. (Satz von Borsuk-Ulam)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen und symmetrisch mit $0 \in \Omega$. Sei $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, $m < n$, stetig.
Dann existiert $\zeta \in \partial\Omega$ mit $f(\zeta) = f(-\zeta)$.

Beispiel: $n = 3, m = 2, \Omega =$ **Erde** $f(x) = \begin{pmatrix}\textbf{Temp.}\\ \textbf{Druck}\end{pmatrix} \Rightarrow$ **An zwei antipodalen Punkten auf der Erdoberfläche stimmen Druck und Temperatur überein.**

Lösung: Annahme: $\quad \forall x \in \partial\Omega: \quad f(x) \neq f(-x).$
Betrachte $\quad g : \partial\Omega \to \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n, \quad g(x) = f(x) - f(-x),$
sowie die ungerade, stetige Fortsetzung nach $\quad \mathbb{R}^n$:

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Auf $\partial\Omega$ gilt $g(x) \neq 0$ nach Annahme,
das heißt für $\varepsilon > 0$ geeignet: $|g(x)| > \varepsilon$.
Nach dem Satz von Borsuk ist

$$d(g, \Omega) \neq 0,$$

gemäß dem Satz von Rouché gilt für $z \in \mathbb{R}^n$, $|z| \leq \varepsilon$:

$$g_z(x) := g(x) - z,$$

$$d(g_z, \Omega) \neq 0.$$

Also existiert zu jedem solchen z ein x mit $g(x) - z = 0$.
Das heißt für die n-dimensionale ε-Kugel $B_\varepsilon(0) \subset g(\Omega)$ im Widerspruch zu $g(\Omega) \subset \mathbb{R}^m$.

18. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal injektiv, für $|x| \to \infty$ gelte $|f(x)| \to \infty$. Man zeige: $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

Lösung: Nach dem Satz von der Gebietsinvarianz ist $f(\mathbb{R}^n)$ offen.
Annahme: $f(\mathbb{R}^n) \neq \mathbb{R}^n$.
Dann existiert $y \in \partial f(\mathbb{R}^n)$, $y \notin f(\mathbb{R}^n)$.
Finde $y_k \to y$, $y_k \in f(\mathbb{R}^n)$, $x_k \in \mathbb{R}^n$: $f(x_k) = y_k$.
(x_k) beschränkt, andernfalls wäre für eine Teilfolge $|f(x_k)| \to \infty$.
Nach Auswahl einer Teilfolge kann man erreichen: $x_k \to x$,

$$\begin{array}{ll} y_k & = f(x_k) \to f(x). \\ \downarrow & \\ y & \end{array}$$

$\Rightarrow y \in f(\mathbb{R}^n)$. Ein Widerspruch!

19. Sei $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $\varphi(x) \to -\infty$ für $|x| \to +\infty$ und $\nabla\varphi(x) \neq 0$ für $|x| \geq R, R > 0$ geeignet.
Man zeige, dass für alle $r \geq R$ gilt:

$$d(\nabla\varphi, B_r(0)) = (-1)^n.$$

Anleitung: **Man arbeite auf Niveaumengen für φ.**
Für geeignetes Ω und $x \in \overline{\Omega}$ betrachte man das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= \nabla\varphi(u(t, x)), \qquad t \geq 0, \\ u(0, x) &= x, \end{aligned}$$

und zeige, dass für alle $t > 0$ gilt:

$$d(u(t,.) - Id, \Omega) = d(\nabla\varphi, \Omega).$$

Schließlich zeige man, dass für hinreichend große t und $x \in \partial\Omega$ der „Fluss“ $u(t,x)$ relativ klein zu $Id(x) = x$ ist.

Lösung: Sei $M := \min_{x \in \overline{B_R(0)}} \varphi(x)$, wähle R' so, dass

$$B_{R'} \supset \{x : \varphi(x) \geq M\}, \quad K := \min_{x \in \overline{B_{R'}}} \varphi < M$$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) > K - 1\}.$$

Auf Grund der Voraussetzungen ist
Ω offen, beschränkt, umfasst $\overline{B_R(0)}$. Für $x \in \overline{\Omega}$ betrachte das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \nabla\varphi(u(t,x))$$
$$u(0,x) = x.$$

Dann gilt für $t \geq 0$:

$$0 \leq |u_t|^2 = \nabla\varphi(u) \cdot u_t = \frac{\partial}{\partial t}(\varphi(u)),$$

das heißt

$$x \in \Omega \Rightarrow u(t,x) \in \Omega, \tag{1}$$

für $x \in \partial\Omega$ $(|x| \geq R)$: $0 \neq \nabla\varphi(x) = \nabla\varphi(u(0,x)) = u_t(0,x)$,
$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(u)|_{t=0} > 0$, d. h.

$$x \in \partial\Omega \quad \Rightarrow \quad \forall t > 0 : \quad u(t,x) \in \Omega. \tag{2}$$

Damit existieren die Lösungen insbesondere für alle Zeiten!
Folglich sind sowohl

$$d(u(t,\,.\,) - Id, \Omega), \qquad t > 0$$

als auch

$$d(\nabla\varphi, \Omega)$$

wohldefiniert.

Beh.: Für $t > 0$ gilt

$$d(u(t,\,.\,) - Id, \Omega) = d(\nabla\varphi, \Omega) \tag{3}$$

Beweis dazu: Auf Grund des Homotopiesatzes ist für $t > 0$:

$$d(u(t,\,.\,) - Id, \Omega) = d\left(\frac{1}{t}(u(t,\,.\,) - Id), \Omega\right). \tag{4}$$

Betrachte nun die Homotopie ($T < \infty$ beliebig):

$$H : [0,T] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n,$$

$$H(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{t}(u(t,x)-x), & t>0, \\ u_t(0,x), & t=0. \end{cases}$$

Die Stetigkeit ist nur in $t=0$ problematisch. Für $(0,x), (t',x') \in [0,1] \times \overline{\Omega}$ gilt

$$|H(0,x) - H(t',x')| = \left| u_t(0,x) - \frac{1}{t'} \int_0^{t'} u_t(\tau, x')\, d\tau \right|$$

$$\leq \frac{1}{t'} \int_0^{t'} |u_t(0,x) - u_t(\tau,x')|\, d\tau$$

$$= \frac{1}{t'} \int_0^{t'} | \underbrace{\nabla\varphi(u(0,x)) - \nabla\varphi(u(\tau,x'))}_{\substack{\text{gleichmäßig stetig, das heißt} \\ \leq \varepsilon, \quad \text{falls} \\ |x-x'| \leq \delta, \quad t' \leq \delta, \\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{geeignet}}} |\, d\tau \leq \frac{1}{t'} \cdot t' \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

Hier geht die Voraussetzung $\varphi \in C^2$ ein: Insbesondere haben wir gleichmäßige Lipschitzstetigkeit von $\nabla\varphi$ und damit die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsdaten.

Schließlich ist die Homotopie zulässig, denn für $x \in \partial\Omega$ ist $H(t,x) \neq 0$.
Mit Hilfe von (4) folgt nun für $0 \leq t' \leq t$

$$d(u(t,\,.\,) - Id, \Omega) = d(H(t',\,.\,),\Omega) = d(u_t(0,\,.\,),\Omega) = d(\nabla\varphi, \Omega),$$

das heißt (3).

Es bleibt, $d(u(t,\,.\,) - Id, \Omega)$ zu berechnen.
Zeige dazu, dass, für großes t, $u(t,\,.\,)$ relativ zu Id auf $\partial\Omega$ klein wird.
Wähle dazu $\varepsilon > 0$, so dass gilt

$$|\nabla\varphi(x)| \geq \varepsilon, \quad \text{falls} \quad |x| \geq R, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

<u>Beh.:</u> Für $t \geq \frac{M+1-K}{\varepsilon^2}$ gilt:

$$\text{für alle} \quad x \in \overline{\Omega} \quad \text{ist} \quad \varphi(u(t,x)) \geq M, \quad \text{insbesondere} \quad |u(t,x)| \leq R'. \tag{5}$$

<u>Beweis dazu:</u> Zunächst bemerkt man: Wegen (1), das heißt

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(u(t,x)) \geq 0,$$

gilt: Ist $\varphi(u(t_0,x)) \geq M$, so ist $\varphi(u(t,x)) \geq M$ für alle $t \geq t_0$. Es reicht also zu zeigen:
Für jedes $x \in \overline{\Omega}$ gibt es ein $t \leq \frac{M+1-K}{\varepsilon^2}$, so dass gilt

$$\varphi(u(t,x)) \geq M.$$

Annahme: Es gibt ein $x \in \overline{\Omega}$, so dass für alle $t \leq \frac{M+1-K}{\varepsilon^2}$ gilt:

$$\varphi(u(t,x)) < M. \tag{6}$$

Insbesondere gilt dann $|u(t,x)| > R$ und deshalb $|\nabla\varphi(u(t,x))| \geq \varepsilon$, ferner:

$$\varphi(u(t,x)) - \underbrace{\varphi(u(0,x))}_{=\varphi(x)} = \int_0^t \nabla\varphi(u(\tau,x)) \cdot u_\tau(\tau,x)d\tau$$

$$= \int_0^t |\nabla\varphi(u(\tau,x))|^2 d\tau \geq \varepsilon^2 t,$$

$$\varphi(u(t,x)) \geq K - 1 + \varepsilon^2 t.$$

Für $t = \frac{M+1-K}{\varepsilon^2}$ ist $\varphi(u(t,x)) \geq M$ im Widerspruch zu (6). Damit gilt (5).

Für alle $t \geq \frac{M+1-K}{\varepsilon^2}$ gilt nun

$$|u(t,x)| \leq R' < \inf_{x\in\partial\Omega} |x|,$$

also nach dem Satz von Rouché:

$$d(u(t,\,.\,) - Id, \Omega) = d(-Id, \Omega) = (-1)^n,$$

denn $0 \in \Omega$.
Also $(-1)^n = d(\nabla\varphi, \Omega) = d(\nabla\varphi, B_R(0))$, weil $\nabla\varphi \neq 0$ für $x \in \overline{\Omega} \setminus B_R(0)$.

20. Man überlege sich die Produktformel für den Abbildungsgrad mit Hilfe von Hilfssatz 3.7, dabei können die beteiligten Abbildungen und die auftretenden „Null"-Stellen als so regulär wie benötigt angenommen werden.

Lösung: Sei $z \in \mathbb{R}^n$, Ω beschränkt, offen

$$\Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n, \quad f, g \in C^1,$$

es gelte $g \circ f|_{\partial\Omega} \neq z$, insbesondere auch $g|_{f(\partial\Omega)} \neq z$.
$\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega) = \bigcup_{i\in I} G_i \cup G_\infty$ Zerlegung in Zusammenhangskomponenten.
Da $\partial G_i \subset f(\partial\Omega)$ (wegen der Maximalität der G_i) ist $g|_{\partial G_i} \neq z$.
Wir können annehmen (man vgl. das Lemma von Sard), dass für endlich viele $i \in I_0$, jeweils endlich viele z-Stellen in G_i liegen:

$$i \in I_0 : \qquad \begin{array}{l} y_{i,j} \in G_i, \\ g(y_{i,j}) = z, \quad j = 1, ..., N_i, \\ J_g(y_{i,j}) \neq 0. \end{array}$$

Auf allen anderen G_i gilt: $g|G_i \neq z$. Für jedes solches Indexpaar (i,j) suche in Ω $y_{i,j}$- Stellen:

$$i \in I_0, \quad j = 1, ..., N_i : \qquad f(x_{i,j,k}) = y_{i,j} \qquad k = 1, ..., N_{i,j}, \quad J_f(x_{i,j,k}) \neq 0.$$

$\{x_{i,j,k}: \quad i \in I_0, \quad j = 1, ..., N_i, \quad k = 1, ..., N_{i,j}\}$ ist die Menge aller z-Stellen von $g \circ f$ in Ω.
Nach Hilfssatz 3.7 ist

$$d(g \circ f, \Omega, z) = \sum_{i \in I_0} \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{k=1}^{N_{i,j}} \mathrm{sgn} J_{g \circ f}(x_{i,j,k})$$

$$= \sum_{i \in I_0} \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{k=1}^{N_{i,j}} \mathrm{sgn} J_g(f(x_{i,j,k})) \cdot \mathrm{sgn} J_f(x_{i,j,k}))$$

$$= \sum_{i \in I_0} \sum_{j=1}^{N_i} \mathrm{sgn} J_g(y_{i,j}) \left(\sum_{k=1}^{N_{i,j}} \mathrm{sgn} J_f(x_{i,j,k}) \right)$$

$$= \sum_{i \in I_0} \sum_{j=1}^{N_i} \mathrm{sgn} J_g(y_{i,j}) d(f, \Omega, y_{i,j})$$

$$= \sum_{i \in I_0} d(f, \Omega, G_i) \left(\sum_{j=1}^{N_i} \mathrm{sgn} J_g(y_{i,j}) \right)$$

$$= \sum_{i \in I_0} d(f, \Omega, G_i) d(g, G_i, z)$$

$$= \sum_{i \in I} d(f, \Omega, G_i) d(g, G_i, z).$$

21. Sei $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, es gebe ein $\omega > 0$, so dass für alle $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ gilt: $f(t + \omega, x) = f(t, x)$. Ferner sei $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(x) \to -\infty$ für $|x| \to \infty$; es gebe ein $R > 0$, so dass für alle $|x| \geq R$ und $t \geq 0$ gilt:

$$\nabla \varphi(x) \cdot f(t, x) > 0.$$

Man zeige, dass die Differentialgleichung

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

eine ω-periodische Lösung besitzt.

Lösung: Zunächst bemerkt man, dass für $|x| \geq R$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt $\nabla \varphi(x) \neq 0$, $f(t, x) \neq 0$.
Sei $M = \min\limits_{x \in \overline{B_R(0)}} \varphi(x)$,

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad \varphi(x) > M - 1\} \quad \text{offen, beschränkt,}$$

$$\partial \Omega = \{\varphi(x) = M - 1\}.$$

Da $\varphi \in C^2$ und $\nabla\varphi|\partial\Omega \neq 0$ ist, ist $\partial\Omega$ eine C^2-glatte Mannigfaltigkeit mit innerer Einheitsnormale $\frac{1}{|\nabla\varphi|}\nabla\varphi$.
Für $x \in \overline{\Omega}$ betrachten wir zunächst das folgende Anfangswertproblem:

$$u_t(t,x) = f(t,u(t,x)), \quad t \geq 0,$$
$$u(0,x) = x.$$

Für $t \geq 0$ existieren die Lösungen global, es ist sogar für $t > 0: \quad u(t,x) \in \Omega$.
Denn sei für ein $t_0 \quad u(t_0) = x_0 \in \partial\Omega$, dann

$$u_t(t_0) \cdot \nabla\varphi(x_0) = f(t_0, \underbrace{u(t_0)}_{x_0}) \cdot \nabla\varphi(x_0) > 0.$$

Das heißt: Die Tangente an $t \mapsto u(t)$ in t_0 zeigt echt ins Innere von Ω ($\partial\Omega\, C^2$-glatt), also

$$u(t_0+\varepsilon) \in \Omega, \quad u(t_0-\varepsilon) \notin \overline{\Omega}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Wie in Aufgabe 19 zeigt man nun: Da $f \in C^1$, ist für $t > 0$

$$d(u(t,\,.\,) - Id, \Omega) = d(f(0,\,.\,), \Omega);$$

ferner ist für $\tau \in [0,1]$, $x \in \partial\Omega$ wegen

$$\begin{aligned} &|\tau f(0,x) + (1-\tau)\nabla\varphi(x)|^2 \\ &\quad = \tau^2|f(0,x)|^2 + 2\tau(1-\tau)(f(0,x)\cdot\nabla\varphi(x)) + (1-\tau)^2|\nabla\varphi(x)|^2 > 0 \end{aligned}$$

die Abbildung

$$[0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \qquad (\tau,x) \mapsto \tau f(0,x) + (1-\tau)\nabla\varphi(x)$$

eine zulässige Homotopie von $f(0,\,.\,)$ in $\nabla\varphi(\,.\,)$. Zusammen mit Aufgabe 19 folgt:

$$d(u(\omega,\,.\,) - Id, \Omega) = d(f(0,\,.\,), \Omega) = d(\nabla\varphi, \Omega) = (-1)^n.$$

Das heißt, es gibt ein $x_0 \in \Omega$ mit

$$u(\omega, x_0) = x_0.$$

Da $f(\,.\,,x)$ $\omega-$periodisch ist, ist $\mathbb{R} \to \Omega$, $t \mapsto u(t,x_0)$ eine $\omega-$periodische Lösung von $u_t = f(t,u)$.

22. (Satz von Jentzsch)
Sei $\emptyset \neq C^\circ \subset C \subset \mathbb{R}^n$ und C kompakt, für den Integralkern $K \in C^0(C \times C)$ gelte $K(x,y) > 0$ für alle $x,y \in C$.
Man zeige: Es gibt einen positiven Eigenwert $\lambda > 0$ und eine strikt positive Eigenfunktion $f \in C^0(C)$ von

$$\int_C K(x,y)f(y)dy = \lambda f(x).$$

Lösung: Sei $\quad V = C^0(C), \quad A = \{f \in V : \quad f \geq 0 \quad \text{und} \quad \int_C f(x)\,dx = 1\}$.
A ist in V abgeschlossen und konvex.
Definiere

$$F : A \to A, \qquad F(f)(x) = \frac{\int_C K(x,y) f(y)\,dy}{\int_C \int_C \underbrace{K(\xi,\eta)}_{\geq \rho > 0} f(\eta)\,d\eta\,d\xi}.$$

$x \mapsto \int_C K(x,y) f(y)\,dy \quad$ ist stetig, der Nenner > 0, also tatsächlich $\quad F : A \to A$.
Wegen

$$\Big| \int_C \underbrace{K(x,y)}_{\leq M} (f(y) - \tilde{f}(y))\,dy \Big| \leq M \cdot |C| \cdot \|f - \tilde{f}\|_{C^0},$$

$$\int_C \int_C K(\xi,\eta) f(\eta)\,d\eta\,d\xi \geq \rho |C| \int_C f(\eta)\,d\eta = \rho |C|,$$

$$\int_C \int_C K(\xi,\eta) f(\eta)\,d\eta\,d\xi \leq M |C| \int_C f(\eta)\,d\eta = M |C|, \quad |C| \neq 0$$

ist F stetig.
F ist sogar kompakt: $\quad$ verwende Satz von Arzela-Ascoli.
Dazu: $\quad f \in A \Rightarrow \|F(f)\|_{C^0} \leq \frac{M}{\rho |C|}$.
Gleichgradig gleichmässige Stetigkeit : Sei $\quad \varepsilon > 0, \quad$ bestimme $\quad \delta > 0, \quad$ so dass für alle $\quad x, x' \in C, \quad y \in C, \quad |x - x'| \leq \delta \quad$ gilt

$$|K(x,y) - K(x',y)| \leq \varepsilon,$$

$$\Rightarrow |F(f)(x) - F(f)(x')| \leq \frac{1}{\int_C \int_C K(\xi,\eta) f(\eta)\,d\eta\,d\xi} \left| \int_C (K(x,y) - K(x',y)) f(y)\,dy \right|$$
$$\leq \frac{1}{\rho |C|} \cdot \varepsilon \int_C f(y)\,dy = \frac{\varepsilon}{\rho |C|}.$$

Alle Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Schauder sind erfüllt, das heißt $\quad \exists f \in A$:

$$f = F(f) = \frac{\int_C K(x,y) f(y)\,dy}{\underbrace{\int_C \int_C K(\xi,\eta) f(\eta)\,d\eta\,d\xi}_{=:\lambda > 0}}.$$

Da $\quad f \geq 0, f \not\equiv 0, \quad$ folgt aus $\quad K \geq \rho > 0 \quad$ und aus

$$f = \frac{1}{\lambda} \int_C K(x,y) f(y)\,dy$$

auch

$$f > 0 \quad \text{in} \quad C.$$

23. Sei V ein Banachraum.
Man zeige: $M \subset V$ ist präkompakt $\Leftrightarrow$ $\overline{M}$ ist kompakt.

Lösung: „$\Leftarrow$“ trivial.
„$\Rightarrow$“ Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \overline{M}$. Finde für alle k ein $y_k \in M$ mit $\|x_k - y_k\| \leq \frac{1}{k}$.
Finde Teilfolge k_ℓ, $y \in \overline{M}$ mit $y_{k_\ell} \to y$ $(\ell \to \infty)$. Es ist:

$$\|x_{k_\ell} - y\| \leq \|x_{k_\ell} - y_{k_\ell}\| + \|y_{k_\ell} - y\| \leq \frac{1}{k_\ell} + o(1) = o(1) \quad (\ell \to \infty)$$

24. Sei V ein Banachraum, $F : V \to V$ sei eine stetige Abbildung, so dass für jede beschränkte Menge $B \subset V$ das Bild $F(B)$ präkompakt ist. Außerdem existiere eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft:
Ist $x \in V$ für ein $\tau \in [0,1]$ Lösung der Gleichung $x - \tau F(x) = 0$, so ist $\|x\| \leq K$.
Dann gilt: F hat in V einen Fixpunkt.
(Methode der a-priori-Schranken.)
Hinweis: **Mit Hilfe von F konstruiere man eine kompakte Abbildung $F : \overline{B_{K+1}(0)} \to \overline{B_{K+1}(0)}$.**

Lösung: Betrachte $\tilde{F} : \overline{B_{K+1}(0)} \to \overline{B_{K+1}(0)}$,

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x) & \text{falls } \|F(x)\| \leq K+1, \\ \frac{(K+1)}{\|F(x)\|}F(x) & \text{falls } \|F(x)\| \geq K+1. \end{cases}$$

$\tilde{F}$ ist offensichtlich stetig, und $\tilde{F}(\overline{B_{K+1}(0)})$ ist präkompakt, also ist $\tilde{F}$ kompakt.
Auf Grund des Schauderschen Fixpunktsatzes existiert
$\xi \in \overline{B_{K+1}(0)}$ mit $\tilde{F}(\xi) = \xi$.
1. Fall : $\|F(\xi)\| \geq K+1$, dann ist

$$\xi = \tilde{F}(\xi) = \frac{(K+1)}{\|F(\xi)\|}F(\xi) = \tau F(\xi) \quad \text{mit}$$

$$\tau = \frac{K+1}{\|F(\xi)\|} \in (0,1]$$

Nach Voraussetzung ist $K \geq \|\xi\| = \|\tilde{F}(\xi)\| = K+1$, Widerspruch! Dieser Fall tritt nicht ein. Bleibt also
2. Fall : $\|F(\xi)\| \leq K+1$,
dann ist $\xi = \tilde{F}(\xi) = F(\xi)$ wie behauptet.

25. Sei V ein Banachraum, $M \subset V$. Dann sind äquivalent:

(a) M **ist präkompakt.**

(b) Zu jedem $\delta > 0$ **existiert eine Zahl** $n \in \mathbb{N}$ **und** n **Punkte** $x_{1,...,}x_n \in M$ **mit** $M \subset \bigcup_{j=1}^n B_\delta(x_j)$.

Hinweis: **Man verwende die Äquivalenz von Folgen- und Überdeckungskompaktheit.**

Lösung: „(a) ⇒ (b)“: Nach Aufgabe 23 ist $\overline{M}$ kompakt. Für jedes δ gilt $\overline{M} \subset \underset{x\in M}{\cup} B_\delta(x)$. Also existieren $x_1, ..., x_n \in M$ mit

$$M \subset \overline{M} \subset \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} B_\delta(x_i).$$

„(b) ⇒(a)“: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$. Mit Hilfe des Cantorschen Diagonalverfahrens konstruieren wir eine Cauchy-Teilfolge.
Da M mit endlich vielen $\frac{1}{2}-$Kugeln überdeckt werden kann, liegen unendlich viele Folgenglieder in einer Kugel mit Radius $\frac{1}{2}$.
Das heißt es gibt eine Teilfolge
$x_{k_{1,j}}$, so dass für i, j gilt $\|x_{k_{1,j}} - x_{k_{1,i}}\| \leq 1$.
Sei nun $\ell \in \mathbb{N}$ beliebig und eine Teilfolge $(x_{k_{\ell,j}})_{j\in\mathbb{N}}$ bereits konstruiert.
Überdecke M mit endlich vielen $\frac{1}{2^{\ell+2}}$ Kugeln, unendlich viele Glieder von $x_{k_{\ell,j}}$ liegen in einer Kugel mit Radius $\frac{1}{2^{\ell+2}}$, d. h. es gibt Teilfolge $(x_{k_{\ell+1,j}})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_{k_{\ell,j}})_{j\in\mathbb{N}}$, so dass für alle i, j gilt

$$\|x_{k_{\ell+1,i}} - x_{k_{\ell+1,j}}\| \leq \frac{1}{2^{\ell+1}}$$
$$\vdots$$

Die Diagonalfolge $x_{k_j} := x_{k_{j,j}}$ ist offensichtlich eine Cauchy-Folge.

26. Sei V **ein Banachraum,** $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ **eine Folge, die keine (in** V**) konvergente Teilfolge besitzt. Dann gibt es ein** $\delta > 0$ **und eine Teilfolge** $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$, **so dass für alle** $i \neq j$ **gilt:**

$$\|x_{k_i} - x_{k_j}\| \geq \delta.$$

Lösung: $M = \{x_k : \quad k \in \mathbb{N}\}$ ist also nicht präkompakt.
Also existiert ein $\delta > 0$ gemäß Aufgabe 25, so dass M nicht von endlich vielen der Kugeln $B_\delta(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$, überdeckt werden kann. Deshalb bricht folgendes Verfahren nicht ab:
Setze $x_{k_1} = x_1$, bestimme $x_{k_2} \notin B_\delta(x_{k_1})$, bestimme $x_{k_3} \notin B_\delta(x_{k_1}) \cup B_\delta(x_{k_2}), ...$
Diese Folge leistet das Gewünschte.

27. Sei V ein Banachraum, $\Omega \subset V$ offen; die Abbildung $F : \Omega \to V$ heißt in $x_0 \in \Omega$ (Fréchet-) differenzierbar, falls gilt:
Es gibt eine beschränkte lineare Abbildung $A : V \to V$, ein $\varepsilon > 0$ und eine Abbildung $R : B_\varepsilon(x_0) \to V$ mit $\lim_{x\to x_0} \frac{\|R(x)\|}{\|x-x_0\|} = 0$, so dass F in $B_\varepsilon(x_0)$ die Darstellung besitzt:

$$F(x) = F(x_0) + A(x - x_0) + R(x).$$

In diesem Fall heißt $A =: DF(x_0)$ das (Fréchet-) Differential von F im Punkte x_0.

Man zeige: Ist $F : \Omega \to V$ kompakt und in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, so ist $DF(x_0)$ eine kompakte lineare Abbildung, bildet also beschränkte Mengen auf präkompakte ab.

Lösung: Bezeichne $A := DF(x_0)$, zu zeigen: $A(\overline{B_1(0)})$ ist präkompakt, d. h. für jede Folge $x_k \in V$, $\|x_k\| \le 1$ besitzt $(Ax_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.
Widerspruchsannahme: Es gibt eine Folge $x_k \in V$, $\|x_k\| \le 1$, so dass $(Ax_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge besitzt.
Gemäß Aufgabe 26 kann man nach Auswahl einer Teilfolge annehmen:

$$\exists\delta : \quad \forall k \ne j : \quad \|Ax_k - Ax_j\| \ge \delta. \tag{$*$}$$

Bestimme nun $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $x \in V$ mit $\|x - x_0\| \le \varepsilon$ gilt:

$$\|R(x)\| \le \frac{\delta}{4}\|x - x_0\|.$$

Wähle aus (x_k) eine Teilfolge (x_{k_ℓ}) aus, so dass $F(x_0+\varepsilon x_{k_\ell})$ konvergiert.
Insbesondere existieren zwei Indizes k_i, k_j mit

$$\|F(x_0 + \varepsilon x_{k_i}) - F(x_0 + \varepsilon x_{k_j})\| \le \frac{1}{4}\delta\varepsilon.$$

Aus der auf $\overline{B_\varepsilon(x_0)}$ gültigen Darstellung

$$F(x) = F(x_0) + A(x - x_0) + R(x),$$

$$F(x_0 + \varepsilon x_{k_i}) - F(x_0 + \varepsilon x_{k_j}) - R(x_0 + \varepsilon x_{k_i}) + R(x_0 + \varepsilon x_{k_j}) = \varepsilon A(x_{k_i} - x_{k_j})$$

folgt vermöge $(*)$:

$$\varepsilon\delta \le \|\varepsilon A(x_{k_i} - x_{k_j})\| \le \|F(x_0+\varepsilon x_{k_i}) - F(x_0+\varepsilon x_{k_j})\| + \|R(x_0+\varepsilon x_{k_i})\| + \|R(x_0+\varepsilon x_{k_j})\|$$

$$\le \frac{1}{4}\delta\varepsilon + \frac{1}{4}\delta\|\varepsilon x_{k_i}\| + \frac{1}{4}\delta\|\varepsilon x_{k_j}\| \le \frac{3}{4}\delta\varepsilon$$

und somit ein Widerspruch.

28. Sei $V = c^0 =$ Menge aller reellen Nullfolgen $= \{x = (x_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} : x_\ell \in \mathbb{R}, \lim_{\ell\to\infty} x_\ell = 0\}$, zusammen mit $\|x\| := \|x\|_{c^0} = \max_{\ell\in\mathbb{N}} |x_\ell|$ wird V ein Banachraum (ohne Beweis). Sei $F : V \to V, F(x) = (x_\ell^2)_{\ell\in\mathbb{N}}$. Man zeige:
F ist an jeder Stelle $x \in V$ Fréchet–differenzierbar, und $DF(x)$ ist eine kompakte lineare Abbildung. Dagegen ist $F|\overline{B_1(0)}$ nicht kompakt.
D. h., die Umkehrung von Aufgabe 27 gilt nicht.

Lösung:

$$\begin{aligned} F(x+h) &= (x_\ell^2 + 2x_\ell h_\ell + h_\ell^2)_{\ell\in\mathbb{N}} \\ &= F(x) + (2x_\ell h_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} + F(h), \end{aligned}$$

dabei ist $\|F(h)\| = \max\limits_{\ell\in\mathbb{N}} |h_\ell^2| = \|h\|^2$, insbesondere ist $F(h) = o(\|h\|)$ für $\|h\| \to 0$.
Für festes $x \in c^0$ ist die lineare Abbildung $c^0 \to c^0$, $h \mapsto (2x_\ell h_\ell)$ wegen

$$\max_{\ell\in\mathbb{N}} |2x_\ell h_\ell| \leq 2(\max_{\ell\in\mathbb{N}} |x_\ell|)(\max_{\ell\in\mathbb{N}} |h_\ell|) \leq 2\|x\| \cdot \|h\|$$

beschränkt. Also ist $F : c^0 \to c^0$ differenzierbar mit

$$DF(x)(h) = (2x_\ell h_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}.$$

Die Abbildung $DF(x)$ ($x \in c^0$ beliebig, aber fest) ist sogar als lineare Abbildung kompakt:
Sei $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subset c^0$, $\|h^{(k)}\|_{c^0} \leq 1$. Mit Hilfe des Cantorschen Diagonalverfahrens findet man beschränkte Folge $h \in [-1,1]^{\mathbb{N}}$, so dass nach Auswahl einer Teilfolge gilt: Für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt $h_\ell^{(k)} \to h_\ell$ $(k \to \infty)$.
Zeige $DF(x)(h^{(k)}) \to \left(\overset{\text{formal}}{DF(x)(h) =}\right) 2(x_\ell h_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \in c^0$,
das heißt

$$\max_{\ell\in\mathbb{N}} \|h_\ell^{(k)} x_\ell - h_\ell x_\ell| \to 0 \quad (k \to \infty). \qquad (*)$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, bestimme zunächst ℓ_0, so dass für alle $\ell \geq \ell_0$ gilt: $|x_\ell| \leq \frac{\varepsilon}{4}$.
Für $\ell \geq \ell_0$ und alle k ist: $2\left|h_\ell^{(k)} x_\ell - h_\ell x_\ell\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\left(\left|h_\ell^{(k)}\right| + |h_\ell|\right) \leq \varepsilon$.
Bestimme nun k_0 so, dass für $k \geq k_0$ und $\ell \leq \ell_0$ gilt:

$$\left|h_\ell^{(k)} - h_\ell\right| \leq \varepsilon \frac{1}{\|x\|}$$

$$\Rightarrow \left|h_\ell^{(k)} x_\ell - h_\ell x_\ell\right| \leq \frac{\varepsilon}{\|x\|} |x_\ell| \leq \varepsilon,$$

insgesamt folgt $(*)$
Jedoch ist für $e^{(i)} = (\delta_{i\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$: $F(e^{(i)}) = e^{(i)}$, für $i \neq j$: $\left\|F(e^{(i)}) - F(e^{(j)})\right\| = 1$, d. h. $(F(e^{(i)}))_{i\in\mathbb{N}}$ enthält keine Cauchy-Teilfolge.

29. **Sei $\Omega \subset V$ offen, $F : \Omega \to V$ sei kompakt und in $x_0 \in \Omega$ Fréchet-differenzierbar. Das Differential $Id - DF(x_0)$ sei injektiv. Ferner habe $Id - F$ in x_0 eine Nullstelle: $x_0 - F(x_0) = 0$. Man zeige: Die Nullstelle x_0 ist isoliert, und es gilt:**

$$\mathrm{ind}(Id - F, x_0) = \mathrm{ind}(Id - DF(x_0), 0).$$

Hinweis: **Aufgabe 27.**

Lösung: Mit $A := DF(x_0)$ gilt nahe x_0 die Darstellung

$$\begin{aligned}(Id - F)(x) &= (Id - F)(x_0) + (Id - A)(x - x_0) - R(x)\\ &= (Id - A)(x - x_0) - R(x),\end{aligned}$$

wobei $R(x) = o(\|x - x_0\|)$.
Gemäß Aufgabe 27 ist A ein kompakter linearer Operator.
Betrachte $Id - A$ auf $\partial B_1(0)$, das heißt für $\|x\| = 1$.
Auf Grund der Injektivitätsannahme ist hier $Id{-}A \neq 0$, gemäß Hilfssatz 9.7 existiert $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\|x\| = 1$ gilt $\|(Id - A)x\| \geq \varepsilon$.
Wähle nun $\delta > 0$ so, dass auf $\overline{B_\delta(x_0)}$ gilt

$$\|R(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|x - x_0\|,$$

andererseits ist

$$\|(Id - A)(x - x_0)\| \geq \varepsilon\|x - x_0\|,$$

das heißt $\|(Id - F)(x)\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\|x - x_0\|$, x_0 ist isolierte Nullstelle.
Zur Indexberechnung : $\mathrm{ind}(Id - F, x_0) \overset{\text{def}}{=} d(Id - F, B_\delta(x_0))$,
Verwende Homotopiesatz:

$$\begin{aligned}H(\tau, x) &= F(x_0) + A(x - x_0) + \tau R(x)\\ &= (1 - \tau)(F(x_0) + A(x - x_0)) + \tau F(x),\end{aligned}$$

ist in $[0, 1] \times \overline{B_\delta(x_0)}$ kompakt; zulässig, denn für $(\tau, x) \in [0, 1] \times \partial B_\delta(x_0)$ gilt:

$$\begin{aligned}\|(Id - H(\tau,\,.\,))x\| &= \|x - F(x_0) - A(x - x_0) - \tau R(x)\|\\ &\underset{x_0 = F(x_0)}{=} \|(Id - A)(x - x_0) + \tau R(x)\| \geq \varepsilon\|x - x_0\| - \tau\|R(x)\|\\ &\geq \varepsilon\delta - \frac{\varepsilon\delta}{2} = \frac{1}{2}\varepsilon\delta > 0.\end{aligned}$$

Also ist insgesamt

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}(Id - F, x_0) &\underset{\text{def}}{=} d(Id - F, B_\delta(x_0))\\ &= d(Id - \underbrace{F(x_0)}_{x_0} - A(\,.\, - x_0), B_\delta(x_0))\\ &= d((Id - A)(\,.\, - x_0), B_\delta(x_0))\\ &= d(Id - A, B_\delta(0)) = \mathrm{ind}(Id - A, 0).\end{aligned}$$

Im letzten Schritt benutzt man die Translationsinvarianz, die sich direkt vom $\mathbb{R}^m$ überträgt.

30. Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Aufgabe 29 gelte: V ist ein Hilbertraum, d. h. es gibt ein Skalarprodukt, so dass für alle $x \in V$ gilt: $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.

Das Differential von F in x_0 sei selbstadjungiert – für alle $x, y \in V$ ist $\langle DF(x_0)x, y\rangle = \langle x, DF(x_0)y\rangle$ – und besitze in $(1,\infty)$ $N \in \mathbb{N}_0$ Eigenwerte $\lambda_1, \ldots \lambda_N$; jeder Eigenwert wird entsprechend seiner Vielfachheit aufgeführt.
(Die endliche Anzahl in $(1,\infty)$ folgt bereits aus der Kompaktheit von $DF(x_0)$).

Man zeige: $\operatorname{ind}(Id - F, x_0) = (-1)^N$**.**

Lösung: Bezeichne $A = DF(x_0)$, zu bestimmen ist $\operatorname{ind}(Id - A, 0)$. Auf Grund der Injektivitätsvoraussetzung an $Id - A$ ist 1 nicht Eigenwert von A.
Sei $\varphi_1, ..., \varphi_N$ ein zu $\lambda_1, ..., \lambda_N$ gehöriges Orthonormal-System von Eigenvektoren, setze

$$Bx = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \langle x, \varphi_j\rangle \varphi_j,$$

B ist endlichdimensional, insbesondere kompakt.
Betrachte auf $[0,1] \times \overline{B_1(0)}$ die Homotopie $H(\tau, x) = \tau Bx + (1-\tau)Ax$, offensichtlich kompakt.
Zulässigkeit: Angenommen, für ein $\tau \in [0,1]$, $\|x\| = 1$ ist $0 = (Id - H(\tau, .))\,(x) = x - \tau Bx - (1-\tau)Ax$, also

$$x = \tau \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \langle x, \varphi_j\rangle \varphi_j + (1-\tau)Ax.$$

Skalare Multiplikation mit φ_i, $i = 1, ..., N$ ergibt

$$\langle x, \varphi_i\rangle = \tau\lambda_i\langle x, \varphi_i\rangle + (1-\tau)\langle Ax, \varphi_i\rangle = \tau\lambda_i\langle x, \varphi_i\rangle + (1-\tau)\langle x, A\varphi_i\rangle = \lambda_i\langle x, \varphi_i\rangle.$$

Da $\lambda_i > 1:$ $\langle x, \varphi_i\rangle = 0$, $Bx = 0$, $x = (1-\tau)Ax$.
Ist $\tau \in (0,1)$, so ist $Ax = \underbrace{(1-\tau)^{-1}}_{>1} x$, wegen $x \perp \operatorname{Span}(\varphi_1, ..., \varphi_N)$ folgt $x = 0$.
Ist $\tau = 0$, folgt $(Id - A)x = 0$, wegen der Injektivitätsbedingung an $Id - A$ auch $x = 0$.
Ist $\tau = 1$, ist offenbar $x = 0$.
Stets ergibt sich ein Widerspruch, die Homotopie ist zulässig, es bleibt $\operatorname{ind}(Id - B, 0)$ zu bestimmen.
Betrachte $V' = \operatorname{Span}(\varphi_{1,...,}\varphi_N)$ sowie die Koordinatenabbildung

$$\psi : \mathbb{R}^N \to V', \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \end{pmatrix} \mapsto \sum_{j=1}^{N} \xi_j \varphi_j.$$

$Id - B$ lautet in Koordinaten

$$\left(\psi^{-1} \circ (Id - B) \circ \psi\right)(\xi) = (\xi_j - \lambda_j\xi_j)_{j=1,...,N} = \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & & \mathcal{O} \\ & \ddots & \\ \mathcal{O} & & 1-\lambda_N \end{pmatrix} \xi.$$

Der Index dieser Abbildung in 0 ist $(-1)^N$.

31. Sei $\Omega \subset V$ offen, beschränkt, $0 \in \Omega$. Sei $F : \overline{\Omega} \to V$ kompakt und $d(Id - F, \Omega) \neq 1$. Man zeige: Dann hat F einen positiven Eigenwert, d. h. es gibt $x \in \Omega, x \neq 0, \lambda > 0$, so dass $F(x) = \lambda x$.

Lösung: Da wegen $0 \in \Omega :$ $d(Id, \Omega) = 1$, ist die Homotopie $H(\tau, x) = \tau F(x)$ unzulässig, das heißt, es gibt $\tau \in [0, 1]$, $x \in \partial\Omega$ (insbesondere $x \neq 0$), so dass

$$x - \tau F(x) = 0.$$

Dann ist $\tau \neq 0$ und $F(x) = \underbrace{\tfrac{1}{\tau}}_{>0} \cdot \underbrace{x}_{\neq 0}$.

32. Sei $\Omega \subset V$ offen, beschränkt, $F : \overline{\Omega} \to V$ sei kompakt, $0 \notin (Id - F)(\partial\Omega)$, es gelte $d(Id - F, \Omega) \neq 0$. Die Abbildung $G : V \to V$ genüge der Lipschitz-Bedingung $\|G(x) - G(y)\| \leq K\|x - y\|$ für alle $x, y \in V$ mit einer geeigneten Konstanten $K > 0$. Man zeige: Es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für jedes $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ die Gleichung

$$x = F(x) + \varepsilon G(x)$$

eine Lösung $x \in \Omega$ besitzt.
Anleitung: **Man zeige für hinreichend kleine $|\varepsilon|$, dass**

- **$Id - \varepsilon G$ ein Homöomorphismus von V ist (Banachscher Fixpunktsatz),**
- **für $x \in V$ die Abbildung $[0, 1] \ni \tau \to (Id - \varepsilon\tau G)^{-1}(x)$ stetig ist,**
- **dass $[0, 1] \times \overline{\Omega} \to V, H(\tau, x) = (Id - \varepsilon\tau G)^{-1}F(x)$ eine zulässige Homotopie ist.**

Lösung:
<u>1. Schritt:</u> Für $|\varepsilon|K < 1$ ist $Id - \varepsilon G$ ein Homöomorphismus von V.
<u>Beweis dazu:</u>

- Injektivität

$$\begin{aligned} \|(Id - \varepsilon G)(x) - (Id - \varepsilon G)(x')\| &\geq \|x - x'\| - |\varepsilon|\|G(x) - G(x')\| \\ \geq \|x - x'\| - |\varepsilon|K\|x - x'\| &= (1 - |\varepsilon|K)\|x - x'\|. \end{aligned} \qquad (*)$$

- Surjektivität
  Sei $y \in V$ gegeben, suche Lösung x der Gleichung

$$x - \varepsilon G(x) = y, \quad \text{das heißt} \quad x = y + \varepsilon G(x).$$

Betrachte dazu $T : V \to V, \quad T(x) = y + \varepsilon G(x).$

$$\|T(x) - T(x')\| \leq |\varepsilon| \|G(x) - G(x')\| \leq \underbrace{|\varepsilon| \cdot K}_{<1} \cdot \|x - x'\|,$$

das heißt, T ist eine strikte Kontraktion, und der Banachsche Fixpunktsatz liefert die Existenz eines Fixpunktes $x \in V$:

$$x = T(x) = y + \varepsilon G(x).$$

- Stetigkeit der Umkehrabbildung
  Seien $y, y' \in V, \quad x, x' \in V$ mit $(Id - \varepsilon G)(x) = y, \quad (Id - \varepsilon G)(x') = y'.$
  Wie in $(*)$: $\|y - y'\| \geq (1 - |\varepsilon| K) \|x - x'\|,$
  das heißt $(Id - \varepsilon G)^{-1}$ ist sogar Lipschitzstetig mit Konstante $(1 - |\varepsilon| K)^{-1}.$

<u>2. Schritt:</u> Sei x fest, ε fest mit $|\varepsilon| K < 1$, dann ist $[0, 1] \ni \tau \mapsto (Id - \varepsilon \tau G)^{-1}(x)$ stetig.

<u>Beweis dazu:</u> Seien $\tau_k, \tau \in [0, 1], \quad \lim\limits_{k \to \infty} \tau_k = \tau.$

$$(Id - \varepsilon \tau_k G)^{-1}(x) - (Id - \varepsilon \tau G)^{-1}(x)$$

$$= (Id - \varepsilon \tau_k G)^{-1}(x) - (Id - \varepsilon \tau_k G)^{-1} \left((Id - \varepsilon \tau_k G)(Id - \varepsilon \tau G)^{-1}(x) \right).$$

Die Abbildungen $(Id - \varepsilon \tau_k G)^{-1}$ sind unabhängig von k Lipschitz-stetig mit Konstante $\frac{1}{1 - |\varepsilon| K}$.

$$\Rightarrow \quad \|(Id - \varepsilon \tau_k G)^{-1}(x) - (Id - \varepsilon \tau G)^{-1}(x)\|$$

$$\leq \frac{1}{1 - |\varepsilon| K} \|x - (Id - \varepsilon \underbrace{\tau_k}_{\tau + (\tau_k - \tau)} G)(Id - \varepsilon \tau G)^{-1}(x)\|$$

$$= \frac{1}{1 - |\varepsilon| K} \|x - (Id - \varepsilon \tau G)(Id - \varepsilon \tau G)^{-1}(x) + \varepsilon(\tau_k - \tau) G(Id - \varepsilon \tau G)^{-1}(x)\|$$

$$= \frac{|\varepsilon| \cdot |\tau_k - \tau|}{1 - |\varepsilon| K} \|G(Id - \varepsilon \tau G)^{-1}(x)\| \to 0 \quad (k \to \infty).$$

<u>Folgerung:</u> Für $|\varepsilon| K < 1$ ist dann auch

$$[0, 1] \times V \to V, \quad (\tau, x) \mapsto (Id - \varepsilon \tau G)^{-1}(x)$$

stetig.
<u>Beweis dazu:</u> Seien $\tau_k, \tau \in [0, 1], \quad x_k, x \in V, \quad \tau_k \to \tau, \quad x_k \to x \quad (k \to \infty).$
Dann ist

$$\begin{aligned}
&\|(Id - \varepsilon \tau_k G)^{-1}(x_k) - (Id - \varepsilon \tau G)^{-1}(x)\| \\
&\leq \|(Id - \varepsilon \tau_k G)^{-1}(x_k) - (Id - \varepsilon \tau_k G)^{-1}(x)\| \\
&\quad + \|(Id - \varepsilon \tau_k G)^{-1}(x) - (Id - \varepsilon \tau G)^{-1}(x)\| \\
&\leq \frac{1}{1 - |\varepsilon| K} \underbrace{\|x_k - x\|}_{\to 0} + \| \underbrace{(Id - \varepsilon \tau_k G)^{-1}(x) - (Id - \varepsilon \tau G)^{-1}(x)}_{\to 0 \text{ s.o.}} \| \to 0 \quad (k \to \infty).
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung beruht auf der in k gleichmäßigen Lipschitzstetigkeit von $(Id - \varepsilon\tau_k G)^{-1}$.

3. Schritt: Kompaktheit der Homotopie

$$[0,1] \times \overline{\Omega} \to V, \quad H(\tau, x) = (Id - \varepsilon\tau G)^{-1} F(x)$$

für beliebiges, aber festes ε mit $|\varepsilon| K < 1$.
Beweis dazu: Sei $(\tau_k) \subset [0,1]$, $(x_k) \subset \overline{\Omega}$.
Nach Auswahl einer Indexteilfolge erreicht man $\tau_k \to \tau_0 \in [0,1]$
nach nochmaliger Auswahl einer Indexteilfolge erreicht man $F(x_k) \to y_0 \in V$.
Zusammen mit der oben diskutierten Stetigkeit folgt

$$H(\tau_k, x_k) \to (Id - \varepsilon\tau_0 G)^{-1} y_0$$

Die Stetigkeit von H in (τ, x) ist offensichtlich.

4. Schritt: Für hinreichend kleines $\varepsilon_0 > 0$, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$,
erfüllt die Homotopie H die Zulässigkeitsbedingung

$$(\tau, x) \in [0,1] \times \partial\Omega \Rightarrow x - H(\tau, x) \neq 0.$$

Beweis dazu: Bestimme $\hat{\varepsilon} > 0$, so dass für $x \in \partial\Omega$ gilt $\|x - F(x)\| > \hat{\varepsilon}$.
Ferner gilt für $x \in \partial\Omega$ mit einem beliebig gewählten $x_0 \in \partial\Omega$:

$$\|g(x)\| \le \|g(x) - g(x_0)\| + \|g(x_0)\| \le K\|x - x_0\| + \|g(x_0)\|$$

$$\le K \cdot \operatorname{diam} \partial\Omega + \|g(x_0)\| =: M.$$

Setze

$$\varepsilon_0 := \min\left\{\frac{\hat{\varepsilon}}{M}, \frac{1}{2K}\right\}.$$

Unter der Bedingung

$$|\varepsilon| \le \varepsilon_0$$

gilt dann: Die Homotopie ist zulässig.
Annahme: Es gibt $\tau \in [0,1]$, $x \in \partial\Omega$ mit

$$x - (Id - \varepsilon\tau G)^{-1} F(x) = 0.$$

Dann hätte man

$$F(x) = (Id - \varepsilon\tau G)(x) = x - \varepsilon\tau G(x)$$

$$\Rightarrow x - F(x) = \varepsilon\tau G(x)$$

$$\Rightarrow \hat{\varepsilon} < \|x - F(x)\| = \|\varepsilon\tau G(x)\|$$

$$\le \varepsilon_0 \cdot \|G(x)\| \le \frac{\hat{\varepsilon}}{M} M = \hat{\varepsilon}.$$

Widerspruch!

Schluss: Auf Grund des Homotopiesatzes ist nun

$$0 \neq d(Id - F, \Omega) = d(Id - H(0, \ , \ ), \Omega)$$

$$= d(Id - H(1, \ , \ ), \Omega) = d(Id - (Id - \varepsilon G)^{-1} \circ F, \Omega);$$

das heißt, es gibt ein $x \in \Omega$ mit

$$x = (Id - \varepsilon G)^{-1}(F(x))$$

$$\Rightarrow x - \varepsilon G(x) = F(x)$$

$$\Rightarrow x = F(x) + \varepsilon G(x).$$