Aufgaben und Lösungsskizzen zum Kurs „Abbildungsgrad und Fixpunktsätze“

Nummern von Definitionen und Sätzen beziehen sich auf das Vorlesungmanuskript, welches man auf derselben Internetseite wie diese Lösungshinweise herunterladen kann.

1. (a) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Man zeige: Es gibt eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A$, die dicht in A liegt.

(b) Man nennt einen metrischen Raum X separabel, falls er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Zeigen Sie in Verallgemeinerung von (a): Jeder Teilraum A eines separablen metrischen Raumes X ist wieder separabel.

Lösung:

(a) $A \cap \overline{B_R}$ ist kompakt. Für jedes n ist $\bigcup_{x\in A\cap\overline{B_R}} B_{\frac{1}{n}}(x)$ offene Überdeckung, aus der man endliche Teilüberdeckung auswählen kann. Indem man $R \to \infty$ gehen lässt, findet man eine Folge

$$(x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}} \subset A \quad \text{mit} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}(x_{n,k}) \supset A.$$

$(x_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ leistet das Gewünschte.

(b) Sei $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine dichte Teilmenge im separablen metrischen Raum (X,d), $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{\frac{1}{2n}}(b_k) = X.$$

Betrachte nur die k_ℓ mit $B_{\frac{1}{2n}}(b_{k_\ell}) \cap A \neq \emptyset$, $\bigcup_{\ell=1}^{\infty} B_{\frac{1}{2n}}(b_{k_\ell}) \supset A.$ Wähle zu jedem ℓ ein $a_{n,\ell} \in A \cap B_{\frac{1}{2n}}(b_{k_\ell})$, wegen

$$d(y, a_{n,\ell}) \leq d(y, b_{k_\ell}) + d\,\underbrace{(b_{k_\ell}, a_{n,\ell})}_{<\frac{1}{2n}}$$

ist $B_{\frac{1}{2n}}(b_{k_\ell}) \subset B_{\frac{1}{n}}(a_{n,\ell})$, also

$$A \subset \bigcup_{\ell=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}(a_{n,\ell})$$

Die Folge $(a_{n,\ell})_{(n,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ leistet das Gewünschte.

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Konstruieren Sie eine stetige bzw. eine beliebig oft differenzierbare Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $0 \le \varphi(x) \le 1$ sowie

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \textbf{falls } x \in \Omega; \\ 0, & \textbf{falls dist}(x, \Omega) \ge 1. \end{cases}$$

Lösung: Eine stetige Lösung erhält man durch $\varphi(x) = \max\{1 - \operatorname{dist}(x, \Omega), 0\}$.

Zur C_0^∞-Variante: Sei $\tilde{\Omega} := \left\{x : \operatorname{dist}(x, \Omega) < \frac{1}{3}\right\}$, $\tilde{\varphi}(x) = \max\{1 - 3\operatorname{dist}(x, \Omega), 0\}$. Diese Funktion wird dem Glättungsprozedere aus dem Beweis des Weierstraßschen Approximationssatzes A.4 unterworfen, wobei der Glättungsradius des Glättungskernes $< \frac{1}{3}$ gewählt wird.

3. Sei $n \ge 2$. Man zeige: $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1(0)}$ ist zusammenhängend.

Lösung: $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1(0)}$ zu verbinden in $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1(0)}$.
Da $n \ge 2$, o. B. d. A. x_0, x_1 linear unabhängig, d. h.

$$\forall \tau \in [0, 1] : \qquad x_\tau = \tau x_0 + (1 - \tau) x_1 \ne 0,$$

das heißt $|x_\tau| > \varepsilon$.
Verbinde geradlinig zunächst $x_0, \frac{1}{\varepsilon} x_0$,
dann $\frac{1}{\varepsilon} x_0$ und $\frac{1}{\varepsilon} x_1$ über $\frac{1}{\varepsilon} x_\tau$, dann $\frac{1}{\varepsilon} x_1$ und x_1.

4. Sei $n \ge 2$, es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijektiv und stetig. Außerdem gelte $\lim_{|x| \to \infty} |f(x)| = \infty$. Man zeige: $f(S^{n-1})$ zerlegt $\mathbb{R}^n$ in genau zwei disjunkte Gebiete, deren gemeinsamer Rand $f(S^{n-1})$ ist.

Lösung: Wir zeigen zunächst, dass auch f^{-1} stetig ist. Sei dazu $\lim_{k\to\infty} y_k = y_0$, es bezeichne $x_k := f^{-1}(y_k), x_0 := f^{-1}(y_0)$. Die Voraussetzung $\lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = \infty$ sichert, dass die Folge (x_k) beschränkt ist. Wir nehmen an, dass sie nicht gegen x_0 konvergiert, so dass dann eine Teilfolge (x_{k_ℓ}) existiert, die auf Grund des Satzes von Bolzano-Weierstraß gegen ein $\tilde{x}_0 \ne x_0$ konvergiert. Da f stetig ist, folgt

$$f(\tilde{x}_0) = \lim_{\ell \to \infty} f(x_{k_\ell}) = \lim_{\ell \to \infty} y_{k_\ell} = y_0 = f(x_0),$$

im Widerspruch zur Bijektivität von f.

Setze $\Omega_i = f(B_1(0))$, $\Omega_a = f\left(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1(0)}\right)$.
Ω_i, Ω_a sind Urbilder offener Mengen unter f^{-1}, also offen. (Weg-) Zusammenhang ist offensichtlich.

$(*)$ Wegen der Bijektivität ist auch $\Omega_i \cup f(S^{n-1}) \cup \Omega_a = \mathbb{R}^n$ offensichtlich.
Für jedes $x \in f(S^{n-1})$, $\varepsilon > 0$ gilt

$$f^{-1}(x) \in S^{n-1}, \qquad f^{-1}\left(B_\varepsilon(x)\right) \cap B_1(0) \neq \emptyset,$$

$$f^{-1}\left(B_\varepsilon(x)\right) \cap \left(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1(0)}\right) \neq \emptyset.$$

$$\Rightarrow B_\varepsilon(x) \cap \Omega_i \neq \emptyset, \qquad B_\varepsilon(x) \cap \Omega_a \neq \emptyset.$$

Das heißt $f(S^{n-1}) \subset \partial\Omega_i$, $f(S^{n-1}) \subset \partial\Omega_a$, die umgekehrte Inklusion ist wegen der disjunkten Zerlegung $(*)$ offensichtlich. Schließlich ist Ω_i beschränkt und Ω_a unbeschränkt.

5. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, dessen glatter Rand $\partial\Omega$ durch die glatte reguläre einfach geschlossene Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)$ gegeben werde. Dabei sei der Durchlaufsinn von γ so gewählt, dass durch

$$\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \left(y'(t), -x'(t)\right)$$

ein *äußeres* Einheitsnormalenfeld an $\partial\Omega$ in $z = \gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$ gegeben werde. Weiter seien f, g in einer Umgebung von $\overline{\Omega}$ definiert und stetig differenzierbar. Man definiert allgemein das Kurvenintegral

$$\int_\gamma (f\,dx + g\,dy) := \int_a^b \left(f(\gamma(t)) \cdot x'(t) + g(\gamma(t)) \cdot y'(t)\right)\,dt.$$

Der Satz von Stokes lautet dann:

$$\int_\gamma (f\,dx + g\,dy) = \int_\Omega \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\right)\,d(x,y).$$

(a) Leiten Sie den Satz von Stokes für den Spezialfall $\Omega = B_R(0)$ direkt aus dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung her.

(b) Leiten Sie den allgemeinen Satz von Stokes aus dem Satz von Gauß her.

Lösung:

(a) Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \cos(t) + i\sin(t)$;

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (f\,dx + g\,dy) &= \int_0^{2\pi} \left(f(\gamma(t)) \cdot (-R\sin(t)) + g(\gamma(t)) \cdot R\cos(t)\right)\,dt \\
&= R\int_0^{\pi} f(R\cos t, R\sin t) \cdot (-\sin t)\,dt \\
&\quad + R\int_\pi^{2\pi} f(R\cos t, R\sin t) \cdot (-\sin t)\,dt \\
&\quad + R\int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(R\cos t, R\sin t) \cdot (\cos t)\,dt \\
&\quad + R\int_{\pi/2}^{3\pi/2} g(R\cos t, R\sin t) \cdot (\cos t)\,dt.
\end{aligned}$$

Für das erste Integral benutzt man die Substitution:

$$t = \arccos\frac{x}{R}, \quad , \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad \sin t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}},$$

und für die jeweils folgenden:

$$t = 2\pi - \arccos\frac{x}{R}, \quad , \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad \sin t = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}},$$

$$t = \arcsin\frac{y}{R}, \quad , \frac{dt}{dy} = \frac{1}{\sqrt{R^2 - y^2}}, \quad \cos t = \sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2}},$$

$$t = \pi - \arcsin\frac{y}{R}, \quad , \frac{dt}{dy} = -\frac{1}{\sqrt{R^2 - y^2}}, \quad \cos t = -\sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2}}.$$

Damit folgt unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (f\,dx + g\,dy) &= -\int_R^R f\left(x, \sqrt{R^2 - x^2}\right)\,dx + \int_R^R f\left(x, -\sqrt{R^2 - x^2}\right)\,dx \\
&\quad + \int_R^R g\left(\sqrt{1 - y^2}, y\right)\,dy - \int_R^R g\left(-\sqrt{1 - y^2}, y\right)\,dy \\
&= -\int_R^R [f(x,y)]_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{y=\sqrt{R^2-x^2}}\,dx + \int_R^R [f(x,y)]_{x=-\sqrt{R^2-y^2}}^{x=\sqrt{R^2-y^2}}\,dy \\
&= -\int_R^R \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dy\right)\,dx \\
&\quad + \int_R^R \left(\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dx\right)\,dy \\
&= \int_{B_R(0)} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\,d(x,y).
\end{aligned}$$

(b)

$$\int_\gamma (f\,dx + g\,dy) = \int_a^b \left(f(\gamma(t))\cdot x'(t) + g(\gamma(t))\cdot y'(t)\right)\,dt = \int_{\partial\Omega} (g,-f)\cdot\nu\,ds(x,y)$$

$$= \int_\Omega \operatorname{div}(g,-f)\,d(x,y) = \int_\Omega \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\right)\,d(x,y).$$

6. (a) Man bestimme den Abbildungsgrad $d(z \mapsto \bar{z}, B_R(0), 0)$.

(b) Beweisen Sie den Fundamentalsatz der Algebra, indem Sie auf geeignetem $B_R(0)$ den Abbildungsgrad von $z \mapsto z^k$ bestimmen.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} d(z \mapsto \bar{z}, B_R(0), 0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\left(\frac{1}{\bar{z}}\,dx + \frac{-i}{\bar{z}}\,dy\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\overline{R\exp(it)}}(-R\sin t) + \frac{-i}{\overline{R\exp(it)}}(R\cos t)\right)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{i\sin t}{\exp(-it)} - \frac{\cos t}{\exp(-it)}\right)\,dt = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\exp(-it)}{\exp(-it)} = -1. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} & d(z \mapsto z^k, B_R(0), 0) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\left(\frac{kz^{k-1}}{z^k}\,dx + \frac{kz^{k-1}\cdot i}{z^k}\,dy\right) \\ &= \frac{k}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{R\exp(it)}(-R\sin t) + \frac{i}{R\exp(it)}(R\cos t)\right)\,dt \\ &= \frac{k}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\exp(it)}{\exp(it)} = k. \end{aligned}$$

Sei nun

$$\begin{aligned} P(z) &= z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \\ &= z^n(1 + a_{n-1}z^{-1} + \ldots + a_1 z^{1-n} + a_0 z^{-n}). \end{aligned}$$

Man bestimme R so groß, dass für $|z| = R$ gilt:

$$|a_{n-1}z^{-1} + \ldots + a_1 z^{1-n} + a_0 z^{-n}| \leq \frac{1}{2}.$$

Mit $P_0(z) = z^n$ ist dann für $|z| = R$:

$$|P_0(z) - P(z)| = |z^n| \cdot |a_{n-1}z^{-1} + \ldots + a_1 z^{1-n} + a_0 z^{-n}| \leq \frac{1}{2}R^n < R^n = |P_0(z)|.$$

Nach dem Satz von Rouché ist also

$$n = d(P_0, B_R(0), 0) = d(P, B_R(0), 0),$$

und P besitzt wenigstens eine Nullstelle. Zu dieser kann dann von P ein Linearfaktor abgespalten werden, und nach n solchen Schritten zerfällt P über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren.

7. Gegeben sei ein Polynom n–ten Grades

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0, \quad a_j \in \mathbb{C}.$$

Ist es möglich, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gilt:

$$|P(z)| < 1?$$

Lösung: Es bezeichne $B = B_1(0) \subset \mathbb{C}$ die Einheitskreisscheibe und
$P_1(z) = -(a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0)$, $P_0(z) = z^n$.
$P_\tau(z) = \tau P_1(z) + (1-\tau)P_0(z)$.
Annahme: Für $|z| = 1$ wäre $|P(z)| = |P_0(z) - P_1(z)| < 1$
$\Rightarrow \forall |z| = 1 : \forall \tau \in (0,1] : \quad |P_\tau(z)| \geq |P_0(z)| - \tau|P_0(z) - P_1(z)| > 1 - \tau \geq 0.$
Schließlich ist für $\tau = 0$ offensichtlich: $\forall |z| = 1 : \quad |P_0(z)| = |z|^n = 1$. Somit sind P_0 und P_1 auf B zulässig zueinander homotop. Es folgt:
$n = d(P_0, B) = d(P_1, B) \leq n - 1$, ein Widerspruch.

8. (a) Die Abbildung $u : \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar und habe in 0 ein strenges lokales Maximum bzw. Minimum bzw. Sattel, d. h. $\nabla u(0) = 0$ und Hess $u(0)$ negativ definit bzw. positiv definit bzw. indefinit.
Betrachte das Gradientenfeld $f(z) = u_x(z) + iu_y(z)$.
Man zeige: ind $(f, 0) = 1$ bzw. 1 bzw. -1.

(b) Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, für ein geeignetes R gelte: für $|z| \geq R$ ist $u(x, y) = ax + by$, mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$.
Ferner habe u einen nichtdegenerierten kritischen Punkt wie in a). Man zeige: Dann hat u mindestens einen weiteren kritischen Punkt.

Lösung:

(a) Sei zunächst speziell

$$u = u_0 + ax^2 + by^2$$

mit den Fällen $\quad a < 0, b < 0 \quad | \quad a > 0, b > 0 \quad | \quad a > 0, b < 0.$

$$f(z) = 2ax + i2by,$$

$$f_x = 2a, \qquad f_y = 2bi.$$

Durch eine einfache Homotopie kann man

$$|a| = |b| = 1$$

erreichen.

$$\operatorname{ind}(f,0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon}\left(\frac{f_x}{f}\,dx + \frac{f_y}{f}\,dy\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon}\frac{(2ax-2iby)(2a\,dx+2bi\,dy)}{(2ax+2iby)(2ax-2iby)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon}\frac{4(ax-iby)(a\,dx+ib\,dy)}{4a^2x^2+4b^2y^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{(a\cos t - ib\sin t)(-a\sin t + ib\cos t)}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}(-a^2+b^2)\cos t\sin t\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ab\cos^2 t + ab\sin^2 t\,dt$$

$$= ab = \operatorname{sgn}(ab).$$

Sei nun u allgemein wie beschrieben.
Nach einer Drehung (Multiplikation mit einer komplexem Zahl, kürzt sich in Windungszahl) kann man annehmen, dass

$$f(z) = 2ax + i2by + h(z)$$

mit $\quad h(z) \quad$ stetig differenzierbar und $\quad \frac{h(z)}{|z|} \to 0 \quad (|z| \to 0)$

$$f_0(z) := 2ax + i2by$$

für $\quad |z| = \varepsilon \quad$ ist $\quad |f_0(z)| = 2\,\varepsilon\sqrt{a^2+b^2}$
und $\quad |f(z) - f_0(z)| = |h(z)| = \left|\frac{h(z)}{|z|}\right|\varepsilon$
Wähle ε so klein, so dass für $\quad |z| \le \varepsilon \quad$ gilt $\quad \left|\frac{h(z)}{|z|}\right| < 2\sqrt{a^2+b^2}$
Nach dem Satz von Rouché ist dann

$$\operatorname{ind}(f,0) = \operatorname{ind}(f_0,0) = \operatorname{sgn}(ab) = \begin{cases} 1, & \text{falls Hess } u(0) \text{ definit,} \\ -1 & \text{falls Hess } u(0) \text{ indefinit.}\end{cases}$$

(b) Für $\quad |z| \ge R \quad$ ist $\quad f(z) = a + ib$, hat also Abbildungsgrad $d(f, B_R(0), 0) = 0$. Wegen $\quad \operatorname{ind}(f, z_0) \neq 0 \quad$ folgt aus der Indexformel die Existenz eines weiteren Punktes $\quad z_1 \quad$ mit $\quad f(z_1) = 0. \quad$ Andernfalls wäre $\quad 0 = d(f, B_R(0), 0) = \operatorname{ind}(f, z_0) \neq 0, \quad$ Widerspruch!

9. An Hand von einfachen Beispielen „prüfe“ man die Notwendigkeit der Bedingungen $\omega(r) = 0$ für $r \leq \delta$ und für $r \geq \varepsilon$.

Lösung: Wir betrachten gleich im Vorgriff auf spätere Verallgemeinerungen $\omega(f(x))$ statt $\omega(|f(x)|)$. Sei

$$\Omega = (-1,1), \quad f(x) = x,$$

$$\omega_a(x) = \begin{cases} 0, & x < a - \frac{1}{2}, \quad x > a + \frac{1}{2}, \\ 2 - 4|x-a|, & a - \frac{1}{2} \leq x \leq a + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\int_\Omega \omega_a(f(x)) J_f(x) dx = \int_{-1}^{1} \omega_a(x) dx$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad a < -\frac{3}{2}, \quad a > \frac{3}{2}, \\ 1, & \text{falls} \quad -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + 2|a| - 2|a|^2, & \text{falls} \quad \frac{1}{2} \leq |a| \leq 1 \\ \frac{9}{2} - 6|a| + 2a^2, & \text{falls} \quad 1 \leq |a| \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Das heißt, dass $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ sicher eine notwendige Bedingung für die korrekte Berechnung des Abbildungsgrades ist, das heißt $\operatorname{supp} \omega_a \subset \overline{f(\Omega)}$.

10. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen.

(a) Sei $x_0 \in \mathbb{R}, x_0 \notin \partial\Omega$. Man bestimme den Abbildungsgrad von $f = \sigma(Id - x_0), \quad \sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ bijektiv, $f^{-1} \in C^1$, $f \neq 0$ auf $\partial\Omega$.
Man bestimme $d(f,\Omega,0)$ mit Hilfe der Transformationsformel.

Lösung:

(a) $J_f(x) = \sigma^n$.
Auf $\partial\Omega$ gilt $|f(x)| = |\sigma||x - x_0| \geq |\sigma| \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega) > 0$.
Sei ω stetig, $\omega(r) = 0$ für $r \leq \delta$ und $r \geq \varepsilon$, wobei $0 < \delta < \varepsilon < |\sigma| \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \omega(|x|)\, dy = 1$.

$$d(f,\Omega) = \int_\Omega \omega(|\sigma||x - x_0|)\, \sigma^n\, dx$$

$$= \sigma^n \int_{\Omega \cap B_{|r| \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)}(x_0)} \omega(|\sigma||x - x_0|)\, dx$$

$$= \begin{cases} 0, & x_0 \notin \Omega \\ \sigma^n \int_{\mathbb{R}^n} \omega(|\sigma||x - x_0|) dx = \frac{\sigma^n}{|\sigma|^n} \int_{\mathbb{R}^n} \omega(|x|)\, dx = (\operatorname{sgn} \sigma)^n & x_0 \in \Omega \end{cases}$$

(b) $J_f(x) \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$, setze

$$\sigma = \operatorname{sgn} J_f(x) \equiv \text{ const} \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

Sei $|f(x)| > \varepsilon$ auf $\partial\Omega$, ω stetig mit
$\omega(r) = 0$ für $r \leq \delta$ und $r \geq \varepsilon$, $0 < \delta < \varepsilon$, $\int_{\mathbb{R}^n} \omega(|x|)\, dx = 1$.

$$d(f,\Omega) = \int_\Omega (|f(x)|) J_f(x)\, dx = \sigma \int_\Omega \omega(|f(x)|) |J_f(x)|\, dx$$

$$= \sigma \int_{f(\Omega)} \omega(|x|)\, dx = \begin{cases} \sigma & \text{falls} \quad 0 \in f(\Omega), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

11. Für hinreichend glattes $f, f|\partial\Omega \neq 0$, und glattes Ω definiere man $d(f, \Omega, 0)$ mit Hilfe eines Oberflächenintegrals und vergleiche mit der ursprünglichen Definition des Abbildungsgrades für Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Lösung: Sei $|f(x)| > \varepsilon > 0$ auf $\partial\Omega$, $0 < \delta < \varepsilon$, ω stetig mit $\omega(r) = 0$ für $r \leq \delta$ und $r \geq \varepsilon$. Bezeichne wie im Beweis von Hilfssatz 2.1

$$\varphi(r) = r^{-n} \left(\int_0^r \rho^{n-1} \omega(\rho)\, d\rho \right)$$

$$A_{ki} = \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_{i-1}}, e_k, \frac{\partial f}{\partial x_{i+1}}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

mit e_k in der i-ten Spalte.
Dann wurde dort gezeigt:

$$\omega(|f(x)|) J_f(x) = \text{div} \left(\varphi(|f(x)|) \cdot \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \cdot A_{ki}(x) \right).$$

Nach dem Gaußschen Satz folgt:

$$d(f, \Omega) = \int_\Omega \omega(|f(x)|) J_f(x)\, dx$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{k=1}^{n} \varphi(|f(x)|) \cdot f_k(x) \cdot A_{ki}(x) \right)_{i=1,...,n} \cdot \nu\, dS.$$

Man beachte nun, dass für das von uns zubetrachtende φ gilt:

$$\varphi(|f(x)|) = |f(x)|^{-n} \int_0^{|f(x)|} \rho^{n-1} \omega(\rho)\, d\rho$$

$$= |f(x)|^{-n} \int_0^{\varepsilon} \rho^{n-1} \omega(\rho)\, d\rho = \frac{1}{n e_n |f(x)|^n}.$$

Damit erhalten wir folgende Alternativdefinition des Abbildungsgrades mittels des folgenden Oberflächenintegrals:

$$d(f, \Omega) = \frac{1}{n e_n} \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(x) A_{ki}(x)}{|f(x)|^n} \right)_{i=1,...,n} \nu\, dS$$

[$\nu \cdot dS = d\vec{S}$ mit $d\vec{S} = \left(..., (-1)^{i-1} dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n, ... \right)$
Parametrisierung bezüglich ν positiv orientiert.]

Zurück zu $n = 2$; wir zeigen die Übereinstimmung dieser neuen mit der ursprünglichen Definition:

$$d(f,\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{|f(x)|^2}((f_1A_{11}+f_2A_{21})\,dx_2 - (f_1A_{12}+f_2A_{22})\,dx_1)$$

$$= \frac{i}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{f(x)\overline{f(x)}}((f_1f_{2,x_2} - f_2f_{1,x_2})\,dx_2 - (-f_1f_{2,x_1}+f_2f_{1,x_1})\,dx_1)$$

$$\left[\begin{array}{l} \overline{f}\cdot f_{x_1} = (f_1 - if_2)\,(f_{1,x_1}+if_{2,x_1}) = f_1f_{1,x_1}+f_2f_{2,x_1}+i\,(f_1f_{2,x_1}-f_2f_{1,x_1}) \\ \overline{f}\cdot f_{x_2} = f_1f_{1,x_2}+f_2f_{2,x_2}+i\,(f_1f_{2,x_2}-f_2f_{1,x_2}) \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{f_{x_1}}{f}\,dx_1 + \frac{f_{x_2}}{f}\,dx_2\right) -$$

$$\underbrace{-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{|f(x)|^2}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{|f|^2}{2}\right)dx_1 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{|f|^2}{2}\right)dx_2\right)\right)}_{=\,...\,=\,0 \text{ mittels Stokes und etwas Rechnerei}}.$$

12. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, $0 \in \Omega$, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ **sei stetig. Für alle** $x \in \partial\Omega$ **gelte:**

$$f(x)\cdot x > 0.$$

Dann besitzt f in Ω eine Nullstelle.

Lösung: Wir homotopieren f in die Identität:
$f_\tau(x) := \tau x + (1-\tau)f(x), \quad f_0 = f.$
Für $\quad \tau \in [0,1], \quad x \in \partial\Omega \quad$ gilt:

$$f_\tau(x)\cdot x = \tau\underbrace{|x|^2}_{>0} + (1-\tau)(\underbrace{x\cdot f(x)}_{>0}) > 0 \Rightarrow f_\tau(x) \neq 0.$$

Der Homotopiesatz zeigt: $\quad d(f,\Omega) = d(Id,\Omega)$.
Wegen Aufgabe 10 und $\quad 0 \in \Omega$ folgt $d(Id,\Omega) = 1$ und damit die Behauptung.

13. Sei $f : [a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n] \to \mathbb{R}^n$ **stetig.**
Es gelte für $i = 1,...,n$**,** $x_j \in [a_j,b_j] \quad (j \neq i)$**:**

$$f_i(x_1,...,x_{i-1},a_i,x_{i+1},...,x_n) \geq 0$$

und

$$f_i(x_1,...,x_{i-1},b_i,x_{i+1},...,x_n) \leq 0.$$

Man zeige: f besitzt eine Nullstelle.

Lösung: Zunächst kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_i < b_i$ annehmen.
Wäre nämlich $a_1 = b_1,$ so wäre

$$f_1(a_1, \, .\,)|_{[a_2,b_2]\times \ldots \times [a_n,b_n]} = 0,$$

und es reicht $f_2(a_1, \, .\,), \ldots, f_n(a_1, \, .\,)$ auf $[a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ zu betrachten.
Sei also $\Omega = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n) \neq \emptyset,$ $x_0 \in \Omega,$ betrachte

$$F_0 = -Id + x_0, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

$$F_\tau = \tau f + (1-\tau)F_0.$$

Für $0 \leq \tau < 1,$ $x \in \partial\Omega$ gilt:
für ein i ist $x_i = a_i$ oder $x_i = b_i;$

$$F_{\tau,i}(x) = -(x_i - x_{0,i})(1-\tau) + \tau f_i(x)$$

$$= \begin{cases} \geq (x_{0,i} - a_i)(1-\tau) & > 0, \quad x_i = a_i, \\ \leq -(b_i - x_{0,i})(1-\tau) & < 0, \quad x_i = b_i. \end{cases}$$

Das heißt $F_\tau|_{\partial\Omega} \neq 0.$ Wegen des Homotopiesatzes und $x_0 \in \Omega$ (Aufgabe 10 (a)) folgt für $\tau < 1:$

$$0 \neq d(F_0, \Omega) = d(F_\tau, \Omega).$$

Das heißt, dass für jedes $\tau \in [0, 1)$ ein $x_\tau \in \Omega$ existiert mit

$$0 = F_\tau(x_\tau) = (1-\tau)(x_0 - x_\tau) + \tau f(x_\tau).$$

Nach Auswahl einer Teilfolge folgt für $\tau \nearrow 1:$ $x_\tau \to x_1 \in \overline{\Omega},$ $0 = f(x_1).$

14. Sei Ω offen, beschränkt und konvex. Man zeige, dass der Brouwersche Fixpunktsatz auch auf $\overline{\Omega}$ gilt.

Hinweis: **Arbeiten Sie mit dem in der Veranstaltung vorgestellten Minkowski–Funktional.**

Zusatz: **Was kann man sagen, wenn $K \neq \emptyset$ kompakt und konvex ist, aber nicht mehr notwendigerweise innere Punkte enthält, und $f : K \to K$ stetig ist?**

Lösung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $0 \in \Omega$. Wir betrachten das *Minkowski-Funktional*:

$$p_{\overline{\Omega}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

$$p_{\overline{\Omega}}(x) = \inf \left\{ \alpha > 0 : \quad \frac{1}{\alpha} x \in \overline{\Omega} \right\}.$$

Auf Grund der Offenheit und Konvexität von Ω sowie von $0 \in \Omega$ lässt sich elementar zeigen. dass für $\lambda \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$p_{\overline{\Omega}}(\lambda x) = \lambda p_{\overline{\Omega}}(x),$$

$$p_{\overline{\Omega}}(x+y) \leq p_{\overline{\Omega}}(x) + p_{\overline{\Omega}}(y).$$

Damit folgt die Stetigkeit:

$$\text{Sei} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{beliebig}, \quad y_k \to 0,$$

$$p(x) - \underbrace{p(-y_k)}_{\to 0} \leq p_{\overline{\Omega}}(x + y_k) \leq p_{\overline{\Omega}}(x) + \underbrace{p_{\overline{\Omega}}(y_k)}_{\to 0},$$

denn $p(\pm y_k) \to 0, \quad$ da $\quad \Omega \quad 0-$Umgebung.
Schließlich hat man: $\quad x \in \overline{\Omega} \Leftrightarrow p_{\overline{\Omega}}(x) \leq 1.$
Sei $\quad R \quad$ so, dass $\quad \overline{B_R(0)} \supset \overline{\Omega},$

$$\rho : \overline{B_R(0)} \to \overline{\Omega}, \quad \rho(x) = \min\left\{1, \frac{1}{p_{\overline{\Omega}}(x)}\right\} \cdot x$$

Es gilt: $\quad \rho$ stetig, $\quad \forall x \in \overline{B_R(0)} : \quad \rho(x) \in \overline{\Omega}$, für $\quad x \in \overline{\Omega} : \quad \rho(x) = x.$
Damit können wir nun die angestrebte Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes zeigen:
Sei $\quad f : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega} \quad$ eine stetige Abbildung.
Die Fortsetzung $\tilde{f} : \quad \overline{B_R} \to \overline{\Omega} \hookrightarrow \overline{B_R}, \quad \tilde{f} := f \circ \rho \quad$ ist ebenfalls stetig, also existiert nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz in Kugeln ein $\quad \xi \in \overline{B_R} : \quad \tilde{f}(\xi) = f(\rho(\xi)) = \xi.$
Da $\quad \tilde{f}(\overline{B_R}) = \overline{\Omega} : \quad \xi \in \overline{\Omega}, \quad \rho(\xi) = \xi, \quad$ also

$$\exists \xi \in \overline{\Omega} : \quad f(\xi) = \xi.$$

Zum Zusatz: Enthält K keine inneren Punkte, so ist K in einer Hyperebene des $\mathbb{R}^n$ enthalten, und man kann die Dimension des umgebenden Raumes solange reduzieren, bis $K \subset \mathbb{R}^m$, $m < n$ geeignet, innere Punkte enthält.

15. Sei n ungerade, $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$ sei stetig.
Dann gibt es ein $\zeta \in S^{n-1}$ mit $f(\zeta) = \zeta$ oder $f(\zeta) = -\zeta$.

Lösung: Der Fall $n = 1$ ist trivial, $\quad$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\quad n \geq 3.$
Setze $\quad f \quad$ gemäß dem Satz von Tietze stetig nach $\quad \overline{B_1(0)} \quad$ fort. Sicher gilt, da n ungerade:
$\quad 1 = d(id, B_1(0)) \neq v(f, S^{n-1}) \quad$ oder
$-1 = d(-id, B_1(0)) \neq v(f, S^{n-1}).$
Dabei bezeichnet $\quad v(f, S^{n-1}) \quad$ die *Ordnung* der Abbildung $f : \partial B_1(0) = S^{n-1} \to S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.
Im ersten Fall ist die Homotopie

$$(t, x) \mapsto tx + (1-t)f(x)$$

nicht zulässig, d. h. $\exists t \in (0,1), \quad \exists \xi \in S^{n-1}$:

$$t\xi + (1-t)f(\xi) = 0,$$

$$\text{das heißt} \quad f(\xi) = \frac{t}{t-1}\,\xi.$$

Nun ist gemäß Voraussetzung $\quad 1 = |f(\xi)| = \frac{t}{1-t}|\xi| = \frac{t}{1-t}$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{2}, \quad f(\xi) = -\xi.$$

Im zweiten Fall ist die Homotopie

$$(t,x) \mapsto t(-x) + (1-t)f(x)$$

unzulässig, d. h. $\exists t \in (0,1), \quad \exists \xi \in S^{n-1}$:

$$t(-\xi) + (1-t)f(\xi) = 0,$$

$$\text{das heißt} \quad f(\xi) = \frac{t}{1-t}\xi,$$

zudem ist nach Voraussetzung: $\quad 1 = |f(\xi)| = \frac{t}{1-t}, \quad$ also $t = \frac{1}{2}$ und

$$f(\xi) = \xi.$$

16. Sei $f : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}^n$ stetig, für alle $x \in \overline{B_1(0)}$ gelte $f(x) \neq 0$. Dann existieren Zahlen $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ und Punkte $\zeta_1, \zeta_2 \in S^{n-1}$ mit $f(\zeta_1) = \lambda_1\zeta_1$, $f(\zeta_2) = \lambda_2\zeta_2$.

Lösung: Ähnlich wie Aufgabe 15: $\quad d(f, B_1(0)) = 0, \quad$ das heißt: Beide Homotopien aus Aufgabe 15 sind unzulässig, unabhängig von n gerade/ungerade.
Also existieren $\quad t_1, t_2 \in (0,1), \quad \xi_1, \xi_2 \in S^{n-1}$:

$$f(\xi_1) = \underbrace{\frac{t_1}{1-t_1}}_{\lambda_1}\xi_1, \qquad f(\xi_2) = \underbrace{\frac{t_2}{t_2-1}}_{\lambda_2}\xi_2.$$

17. (Satz von Borsuk-Ulam)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen und symmetrisch mit $0 \in \Omega$. Sei $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, $m < n$, stetig.
Dann existiert $\zeta \in \partial\Omega$ mit $f(\zeta) = f(-\zeta)$.

Beispiel: $n = 3, m = 2, \Omega =$ **Erde** $f(x) = \begin{pmatrix}\textbf{Temp.}\\ \textbf{Druck}\end{pmatrix} \Rightarrow$ **An zwei antipodalen Punkten auf der Erdoberfläche stimmen Druck und Temperatur überein.**

Lösung: Annahme: $\quad \forall x \in \partial\Omega : \quad f(x) \neq f(-x)$.
Betrachte $\quad g : \partial\Omega \to \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n, \quad g(x) = f(x) - f(-x)$,
sowie die ungerade, stetige Fortsetzung nach $\quad \mathbb{R}^n$:

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Auf $\partial\Omega$ gilt $g(x) \neq 0$ nach Annahme,
das heißt für $\varepsilon > 0$ geeignet: $|g(x)| > \varepsilon$.
Nach dem Satz von Borsuk ist

$$d(g, \Omega) \neq 0,$$

gemäß dem Satz von Rouché gilt für $z \in \mathbb{R}^n$, $|z| \leq \varepsilon$:

$$g_z(x) := g(x) - z,$$

$$d(g_z, \Omega) \neq 0.$$

Also existiert zu jedem solchen z ein x mit $g(x) - z = 0$.
Das heißt für die n-dimensionale ε-Kugel $B_\varepsilon(0) \subset g(\Omega)$ im Widerspruch zu $g(\Omega) \subset \mathbb{R}^m$.

18. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal injektiv, für $|x| \to \infty$ gelte $|f(x)| \to \infty$. Man zeige: $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

Lösung: Nach dem Satz von der Gebietsinvarianz ist $f(\mathbb{R}^n)$ offen.
Annahme: $f(\mathbb{R}^n) \neq \mathbb{R}^n$.
Dann existiert $y \in \partial f(\mathbb{R}^n)$, $y \notin f(\mathbb{R}^n)$.
Finde $y_k \to y$, $y_k \in f(\mathbb{R}^n)$, $x_k \in \mathbb{R}^n$: $f(x_k) = y_k$.
(x_k) beschränkt, andernfalls wäre für eine Teilfolge $|f(x_k)| \to \infty$.
Nach Auswahl einer Teilfolge kann man erreichen: $x_k \to x$,

$$\begin{array}{ll} y_k & = f(x_k) \to f(x). \\ \downarrow & \\ y & \end{array}$$

$\Rightarrow y \in f(\mathbb{R}^n)$. Ein Widerspruch!

19. Sei $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $\varphi(x) \to -\infty$ für $|x| \to +\infty$ und $\nabla\varphi(x) \neq 0$ für $|x| \geq R, R > 0$ geeignet.
Man zeige, dass für alle $r \geq R$ gilt:

$$d(\nabla\varphi, B_r(0)) = (-1)^n.$$

Anleitung: **Man arbeite auf Niveaumengen für φ.**
Für geeignetes Ω und $x \in \overline{\Omega}$ betrachte man das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= \nabla\varphi(u(t, x)), \qquad t \geq 0, \\ u(0, x) &= x, \end{aligned}$$

und zeige, dass für alle $t > 0$ gilt:

$$d(u(t,.) - Id, \Omega) = d(\nabla\varphi, \Omega).$$

Schließlich zeige man, dass für hinreichend große t und $x \in \partial\Omega$ der „Fluss“ $u(t,x)$ relativ klein zu $Id(x) = x$ ist.

Lösung: Sei $M := \min\limits_{x \in \overline{B_R(0)}} \varphi(x)$, wähle R' so, dass

$$B_{R'} \supset \{x : \varphi(x) \geq M\}, \quad K := \min_{x \in \overline{B_{R'}}} \varphi < M$$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) > K - 1\}.$$

Auf Grund der Voraussetzungen ist
Ω offen, beschränkt, umfasst $\overline{B_R(0)}$. Für $x \in \overline{\Omega}$ betrachte das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \nabla\varphi(u(t,x))$$
$$u(0,x) = x.$$

Dann gilt für $t \geq 0$:

$$0 \leq |u_t|^2 = \nabla\varphi(u) \cdot u_t = \frac{\partial}{\partial t}(\varphi(u)),$$

das heißt

$$x \in \Omega \Rightarrow u(t,x) \in \Omega, \tag{1}$$

für $x \in \partial\Omega \quad (|x| \geq R): \quad 0 \neq \nabla\varphi(x) = \nabla\varphi(u(0,x)) = u_t(0,x)$,
$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(u)|_{t=0} > 0$, d. h.

$$x \in \partial\Omega \quad \Rightarrow \quad \forall t > 0: \quad u(t,x) \in \Omega. \tag{2}$$

Damit existieren die Lösungen insbesondere für alle Zeiten!
Folglich sind sowohl

$$d(u(t,\,.\,) - Id, \Omega), \qquad t > 0$$

als auch

$$d(\nabla\varphi, \Omega)$$

wohldefiniert.

<u>Beh.:</u> Für $t > 0$ gilt

$$d(u(t,\,.\,) - Id, \Omega) = d(\nabla\varphi, \Omega) \tag{3}$$

<u>Beweis dazu:</u> Auf Grund des Homotopiesatzes ist für $t > 0$:

$$d(u(t,\,.\,) - Id, \Omega) = d\left(\frac{1}{t}(u(t,\,.\,) - Id), \Omega\right). \tag{4}$$

Betrachte nun die Homotopie $(T < \infty$ beliebig):

$$H : [0,T] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n,$$

$$H(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{t}(u(t,x)-x), & t>0, \\ u_t(0,x), & t=0. \end{cases}$$

Die Stetigkeit ist nur in $t=0$ problematisch. Für $(0,x)$, $(t',x') \in [0,1] \times \overline{\Omega}$ gilt

$$|H(0,x) - H(t',x')| = \left| u_t(0,x) - \frac{1}{t'} \int_0^{t'} u_t(\tau,x')\,d\tau \right|$$

$$\leq \frac{1}{t'} \int_0^{t'} |u_t(0,x) - u_t(\tau,x')|\,d\tau$$

$$= \frac{1}{t'} \int_0^{t'} | \underbrace{\nabla\varphi(u(0,x)) - \nabla\varphi(u(\tau,x'))}_{\substack{\text{gleichmäßig stetig, das heißt} \\ \leq\varepsilon, \quad \text{falls} \\ |x-x'| \leq \delta, \quad t' \leq \delta, \\ \delta=\delta(\varepsilon)>0 \quad \text{geeignet}}} |\,d\tau \leq \frac{1}{t'} \cdot t' \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

Hier geht die Voraussetzung $\varphi \in C^2$ ein: Insbesondere haben wir gleichmäßige Lipschitz-stetigkeit von $\nabla\varphi$ und damit die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsdaten.

Schließlich ist die Homotopie zulässig, denn für $x \in \partial\Omega$ ist $H(t,x) \neq 0$.
Mit Hilfe von (4) folgt nun für $0 \leq t' \leq t$

$$d(u(t,\,.\,) - Id, \Omega) = d(H(t',\,.\,), \Omega) = d(u_t(0,\,.\,), \Omega) = d(\nabla\varphi, \Omega),$$

das heißt (3).

Es bleibt, $d(u(t,\,.\,) - Id, \Omega)$ zu berechnen.
Zeige dazu, dass, für großes t, $u(t,\,.\,)$ relativ zu Id auf $\partial\Omega$ klein wird.
Wähle dazu $\varepsilon > 0$, so dass gilt

$$|\nabla\varphi(x)| \geq \varepsilon, \quad \text{falls} \quad |x| \geq R, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

<u>Beh.:</u> Für $t \geq \frac{M+1-K}{\varepsilon^2}$ gilt:

$$\text{für alle} \quad x \in \overline{\Omega} \quad \text{ist} \quad \varphi(u(t,x)) \geq M, \quad \text{insbesondere} \quad |u(t,x)| \leq R'. \tag{5}$$

<u>Beweis dazu:</u> Zunächst bemerkt man: Wegen (1), das heißt

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(u(t,x)) \geq 0,$$

gilt: Ist $\varphi(u(t_0,x)) \geq M$, so ist $\varphi(u(t,x)) \geq M$ für alle $t \geq t_0$. Es reicht also zu zeigen:
Für jedes $x \in \overline{\Omega}$ gibt es ein $t \leq \frac{M+1-K}{\varepsilon^2}$, so dass gilt

$$\varphi(u(t,x)) \geq M.$$

Annahme: Es gibt ein $x \in \overline{\Omega}$, so dass für alle $t \leq \frac{M+1-K}{\varepsilon^2}$ gilt:

$$\varphi(u(t,x)) < M. \tag{6}$$

Insbesondere gilt dann $|u(t,x)| > R$ und deshalb $|\nabla\varphi(u(t,x))| \geq \varepsilon$, ferner:

$$\varphi(u(t,x)) - \underbrace{\varphi(u(0,x))}_{=\varphi(x)} = \int_0^t \nabla\varphi(u(\tau,x)) \cdot u_\tau(\tau,x)d\tau$$

$$= \int_0^t |\nabla\varphi(u(\tau,x))|^2 d\tau \geq \varepsilon^2 t,$$

$$\varphi(u(t,x)) \geq K - 1 + \varepsilon^2 t.$$

Für $t = \frac{M+1-K}{\varepsilon^2}$ ist $\varphi(u(t,x)) \geq M$ im Widerspruch zu (6). Damit gilt (5).

Für alle $t \geq \frac{M+1-K}{\varepsilon^2}$ gilt nun

$$|u(t,x)| \leq R' < \inf_{x\in\partial\Omega} |x|,$$

also nach dem Satz von Rouché:

$$d(u(t,\,.\,) - Id, \Omega) = d(-Id, \Omega) = (-1)^n,$$

denn $0 \in \Omega$.
Also $(-1)^n = d(\nabla\varphi, \Omega) = d(\nabla\varphi, B_R(0))$, weil $\nabla\varphi \neq 0$ für $x \in \overline{\Omega} \setminus B_R(0)$.

20. Man überlege sich die Produktformel für den Abbildungsgrad mit Hilfe von Hilfssatz 3.7, dabei können die beteiligten Abbildungen und die auftretenden „Null“-Stellen als so regulär wie benötigt angenommen werden.

Lösung: Sei $z \in \mathbb{R}^n$, Ω beschränkt, offen

$$\Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n, \quad f, g \in C^1,$$

es gelte $g \circ f|_{\partial\Omega} \neq z$, insbesondere auch $g|_{f(\partial\Omega)} \neq z$.
$\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega) = \bigcup\limits_{i\in I} G_i \cup G_\infty$ Zerlegung in Zusammenhangskomponenten.
Da $\partial G_i \subset f(\partial\Omega)$ (wegen der Maximalität der G_i) ist $g|_{\partial G_i} \neq z$.
Wir können annehmen (man vgl. das Lemma von Sard), dass für endlich viele $i \in I_0$, jeweils endlich viele z-Stellen in G_i liegen:

$$i \in I_0: \qquad \begin{array}{l} y_{i,j} \in G_i, \\ g(y_{i,j}) = z, \quad j = 1, ..., N_i, \\ J_g(y_{i,j}) \neq 0. \end{array}$$

Auf allen anderen G_i gilt: $g|G_i \neq z$. Für jedes solches Indexpaar (i,j) suche in Ω $y_{i,j}$- Stellen:

$$i \in I_0, \quad j = 1, ..., N_i: \qquad f(x_{i,j,k}) = y_{i,j} \qquad k = 1, ..., N_{i,j}, \quad J_f(x_{i,j,k}) \neq 0.$$

$\{x_{i,j,k}: \quad i \in I_0, \quad j = 1, ..., N_i, \quad k = 1, ..., N_{i,j}\}$ ist die Menge aller z-Stellen von $g \circ f$ in Ω.
Nach Hilfssatz 3.7 ist

$$d(g \circ f, \Omega, z) = \sum_{i \in I_0} \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{k=1}^{N_{i,j}} \text{sgn} J_{g \circ f}(x_{i,j,k})$$

$$= \sum_{i \in I_0} \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{k=1}^{N_{i,j}} \text{sgn} J_g(f(x_{i,j,k})) \cdot \text{sgn} J_f(x_{i,j,k}))$$

$$= \sum_{i \in I_0} \sum_{j=1}^{N_i} \text{sgn} J_g(y_{i,j}) \left(\sum_{k=1}^{N_{i,j}} \text{sgn} J_f(x_{i,j,k}) \right)$$

$$= \sum_{i \in I_0} \sum_{j=1}^{N_i} \text{sgn} J_g(y_{i,j}) d(f, \Omega, y_{i,j})$$

$$= \sum_{i \in I_0} d(f, \Omega, G_i) \left(\sum_{j=1}^{N_i} \text{sgn} J_g(y_{i,j}) \right)$$

$$= \sum_{i \in I_0} d(f, \Omega, G_i) d(g, G_i, z)$$

$$= \sum_{i \in I} d(f, \Omega, G_i) d(g, G_i, z).$$

21. Sei $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, es gebe ein $\omega > 0$, so dass für alle $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ gilt: $f(t + \omega, x) = f(t, x)$. Ferner sei $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(x) \to -\infty$ für $|x| \to \infty$; es gebe ein $R > 0$, so dass für alle $|x| \geq R$ und $t \geq 0$ gilt:

$$\nabla \varphi(x) \cdot f(t, x) > 0.$$

Man zeige, dass die Differentialgleichung

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

eine ω-periodische Lösung besitzt.

Lösung: Zunächst bemerkt man, dass für $|x| \geq R$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt $\nabla \varphi(x) \neq 0$, $f(t, x) \neq 0$.
Sei $M = \min_{x \in \overline{B_R(0)}} \varphi(x)$,

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad \varphi(x) > M - 1\} \quad \text{offen, beschränkt,}$$

$$\partial \Omega = \{\varphi(x) = M - 1\}.$$

Da $\varphi \in C^2$ und $\nabla\varphi|\partial\Omega \neq 0$ ist, ist $\partial\Omega$ eine C^2-glatte Mannigfaltigkeit mit innerer Einheitsnormale $\frac{1}{|\nabla\varphi|}\nabla\varphi$.
Für $x \in \overline{\Omega}$ betrachten wir zunächst das folgende Anfangswertproblem:

$$u_t(t,x) = f(t,u(t,x)), \quad t \geq 0,$$

$$u(0,x) = x.$$

Für $t \geq 0$ existieren die Lösungen global, es ist sogar für $t > 0 :$ $u(t,x) \in \Omega$.
Denn sei für ein t_0 $u(t_0) = x_0 \in \partial\Omega$, dann

$$u_t(t_0) \cdot \nabla\varphi(x_0) = f(t_0, \underbrace{u(t_0)}_{x_0}) \cdot \nabla\varphi(x_0) > 0.$$

Das heißt: Die Tangente an $t \mapsto u(t)$ in t_0 zeigt echt ins Innere von Ω ($\partial\Omega$ C^2-glatt), also

$$u(t_0+\varepsilon) \in \Omega, \quad u(t_0-\varepsilon) \notin \overline{\Omega}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Wie in Aufgabe 19 zeigt man nun: Da $f \in C^1$, ist für $t > 0$

$$d(u(t,\,.\,) - Id, \Omega) = d(f(0,\,.\,),\Omega);$$

ferner ist für $\tau \in [0,1]$, $x \in \partial\Omega$ wegen

$$\begin{aligned} &|\tau f(0,x) + (1-\tau)\nabla\varphi(x)|^2 \\ &= \tau^2|f(0,x)|^2 + 2\tau(1-\tau)(f(0,x)\cdot\nabla\varphi(x)) + (1-\tau)^2|\nabla\varphi(x)|^2 > 0 \end{aligned}$$

die Abbildung

$$[0,1]\times\overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \qquad (\tau,x) \mapsto \tau f(0,x) + (1-\tau)\nabla\varphi(x)$$

eine zulässige Homotopie von $f(0,\,.\,)$ in $\nabla\varphi(\,.\,)$. Zusammen mit Aufgabe 19 folgt:

$$d(u(\omega,\,.\,) - Id, \Omega) = d(f(0,\,.\,),\Omega) = d(\nabla\varphi,\Omega) = (-1)^n.$$

Das heißt, es gibt ein $x_0 \in \Omega$ mit

$$u(\omega, x_0) = x_0.$$

Da $f(\,.\,,x)$ $\omega-$periodisch ist, ist $\mathbb{R} \to \Omega$, $t \mapsto u(t,x_0)$ eine $\omega-$periodische Lösung von $u_t = f(t,u)$.

22. (Satz von Jentzsch)
Sei $\emptyset \neq C^\circ \subset C \subset \mathbb{R}^n$ und C kompakt, für den Integralkern $K \in C^0(C\times C)$ gelte $K(x,y) > 0$ für alle $x,y \in C$.
Man zeige: Es gibt einen positiven Eigenwert $\lambda > 0$ und eine strikt positive Eigenfunktion $f \in C^0(C)$ von

$$\int_C K(x,y)f(y)dy = \lambda f(x).$$

Lösung: Sei $V = C^0(C)$, $A = \left\{ f \in V : \quad f \geq 0 \quad \text{und} \quad \int_C f(x)\,dx = 1 \right\}$.
A ist in V abgeschlossen und konvex.
Definiere
$$F : A \to A, \qquad F(f)(x) = \frac{\int_C K(x,y) f(y)\,dy}{\int_C \int_C \underbrace{K(\xi,\eta)}_{\geq \rho > 0} f(\eta)\,d\eta\,d\xi}.$$

$x \mapsto \int_C K(x,y) f(y)\,dy$ ist stetig, der Nenner > 0, also tatsächlich $F : A \to A$.
Wegen
$$\Big| \int_C \underbrace{K(x,y)}_{\leq M} (f(y) - \tilde{f}(y))\,dy \Big| \leq M \cdot |C| \cdot \|f - \tilde{f}\|_{C^0},$$
$$\int_C \int_C K(\xi,\eta) f(\eta)\,d\eta\,d\xi \geq \rho |C| \int_C f(\eta)\,d\eta = \rho |C|,$$
$$\int_C \int_C K(\xi,\eta) f(\eta)\,d\eta\,d\xi \leq M |C| \int_C f(\eta)\,d\eta = M |C|, \quad |C| \neq 0$$
ist F stetig.
F ist sogar kompakt: verwende Satz von Arzela-Ascoli.
Dazu: $f \in A \Rightarrow \|F(f)\|_{C^0} \leq \frac{M}{\rho |C|}$.
Gleichgradig gleichmässige Stetigkeit : Sei $\varepsilon > 0$, bestimme $\delta > 0$, so dass für alle $x, x' \in C$, $y \in C$, $|x - x'| \leq \delta$ gilt
$$|K(x,y) - K(x',y)| \leq \varepsilon,$$
$$\Rightarrow |F(f)(x) - F(f)(x')| \leq \frac{1}{\int_C \int_C K(\xi,\eta) f(\eta)\,d\eta\,d\xi} \left| \int_C (K(x,y) - K(x',y)) f(y)\,dy \right|$$
$$\leq \frac{1}{\rho |C|} \cdot \varepsilon \int_C f(y)\,dy = \frac{\varepsilon}{\rho |C|}.$$
Alle Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Schauder sind erfüllt, das heißt $\exists f \in A$:
$$f = F(f) = \frac{\int_C K(x,y) f(y)\,dy}{\underbrace{\int_C \int_C K(\xi,\eta) f(\eta)\,d\eta\,d\xi}_{=:\lambda > 0}}.$$

Da $f \geq 0, f \not\equiv 0$, folgt aus $K \geq \rho > 0$ und aus
$$f = \frac{1}{\lambda} \int_C K(x,y) f(y)\,dy$$
auch
$$f > 0 \quad \text{in} \quad C.$$

23. Sei V ein Banachraum.
Man zeige: $M \subset V$ ist präkompakt $\Leftrightarrow$ $\overline{M}$ ist kompakt.

Lösung: „$\Leftarrow$" trivial.
„$\Rightarrow$" Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \overline{M}$. Finde für alle k ein $y_k \in M$ mit $\|x_k - y_k\| \leq \frac{1}{k}$.
Finde Teilfolge k_ℓ, $y \in \overline{M}$ mit $y_{k_\ell} \to y$ $(\ell \to \infty)$. Es ist:

$$\|x_{k_\ell} - y\| \leq \|x_{k_\ell} - y_{k_\ell}\| + \|y_{k_\ell} - y\| \leq \frac{1}{k_\ell} + o(1) = o(1) \quad (\ell \to \infty)$$

24. Sei V ein Banachraum, $F : V \to V$ sei eine stetige Abbildung, so dass für jede beschränkte Menge $B \subset V$ das Bild $F(B)$ präkompakt ist. Außerdem existiere eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft:
Ist $x \in V$ für ein $\tau \in [0,1]$ Lösung der Gleichung $x - \tau F(x) = 0$, so ist $\|x\| \leq K$.
Dann gilt: F hat in V einen Fixpunkt.
(Methode der a-priori-Schranken.)
Hinweis: **Mit Hilfe von F konstruiere man eine kompakte Abbildung** $F : \overline{B_{K+1}(0)} \to \overline{B_{K+1}(0)}$.

Lösung: Betrachte $\tilde{F} : \overline{B_{K+1}(0)} \to \overline{B_{K+1}(0)}$,

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x) & \text{falls } \|F(x)\| \leq K+1, \\ \frac{(K+1)}{\|F(x)\|}F(x) & \text{falls } \|F(x)\| \geq K+1. \end{cases}$$

$\tilde{F}$ ist offensichtlich stetig, und $\tilde{F}(\overline{B_{K+1}(0)})$ ist präkompakt, also ist $\tilde{F}$ kompakt.
Auf Grund des Schauderschen Fixpunktsatzes existiert
$\xi \in \overline{B_{K+1}(0)}$ mit $\tilde{F}(\xi) = \xi$.
1. Fall : $\|F(\xi)\| \geq K+1$, dann ist

$$\xi = \tilde{F}(\xi) = \frac{(K+1)}{\|F(\xi)\|}F(\xi) = \tau F(\xi) \quad \text{mit}$$

$$\tau = \frac{K+1}{\|F(\xi)\|} \in (0,1]$$

Nach Voraussetzung ist $K \geq \|\xi\| = \|\tilde{F}(\xi)\| = K+1$, Widerspruch! Dieser Fall tritt nicht ein. Bleibt also
2. Fall : $\|F(\xi)\| \leq K+1$,
dann ist $\xi = \tilde{F}(\xi) = F(\xi)$ wie behauptet.

25. Sei V ein Banachraum, $M \subset V$. Dann sind äquivalent:

(a) M **ist präkompakt.**

(b) Zu jedem $\delta > 0$ **existiert eine Zahl** $n \in \mathbb{N}$ **und** n **Punkte** $x_{1,\ldots,}x_n \in M$ **mit** $M \subset \bigcup_{j=1}^n B_\delta(x_j)$.

Hinweis: **Man verwende die Äquivalenz von Folgen- und Überdeckungskompaktheit.**

Lösung: „(a) ⇒ (b)“: Nach Aufgabe 23 ist $\overline{M}$ kompakt. Für jedes δ gilt $\overline{M} \subset \underset{x\in M}{\cup} B_\delta(x)$. Also existieren $x_1, \ldots, x_n \in M$ mit

$$M \subset \overline{M} \subset \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} B_\delta(x_i).$$

„(b) ⇒(a)“: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$. Mit Hilfe des Cantorschen Diagonalverfahrens konstruieren wir eine Cauchy-Teilfolge.
Da M mit endlich vielen $\frac{1}{2}-$Kugeln überdeckt werden kann, liegen unendlich viele Folgenglieder in einer Kugel mit Radius $\frac{1}{2}$.
Das heißt es gibt eine Teilfolge
$x_{k_{1,j}}$, so dass für i, j gilt $\|x_{k_{1,j}} - x_{k_{1,i}}\| \leq 1.$
Sei nun $\ell \in \mathbb{N}$ beliebig und eine Teilfolge $(x_{k_{\ell,j}})_{j\in\mathbb{N}}$ bereits konstruiert.
Überdecke M mit endlich vielen $\frac{1}{2^{\ell+2}}$ Kugeln, unendlich viele Glieder von $x_{k_{\ell,j}}$ liegen in einer Kugel mit Radius $\frac{1}{2^{\ell+2}}$, d. h. es gibt Teilfolge $(x_{k_{\ell+1,j}})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_{k_{\ell,j}})_{j\in\mathbb{N}}$, so dass für alle i, j gilt

$$\|x_{k_{\ell+1,i}} - x_{k_{\ell+1,j}}\| \leq \frac{1}{2^{\ell+1}}$$
$$\vdots$$

Die Diagonalfolge $x_{k_j} := x_{k_{j,j}}$ ist offensichtlich eine Cauchy-Folge.

26. Sei V **ein Banachraum,** $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ **eine Folge, die keine (in** V**) konvergente Teilfolge besitzt. Dann gibt es ein** $\delta > 0$ **und eine Teilfolge** $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$**, so dass für alle** $i \neq j$ **gilt:**

$$\|x_{k_i} - x_{k_j}\| \geq \delta.$$

Lösung: $M = \{x_k : \quad k \in \mathbb{N}\}$ ist also nicht präkompakt.
Also existiert ein $\delta > 0$ gemäß Aufgabe 25, so dass M nicht von endlich vielen der Kugeln $B_\delta(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$, überdeckt werden kann. Deshalb bricht folgendes Verfahren nicht ab:
Setze $x_{k_1} = x_1$, bestimme $x_{k_2} \notin B_\delta(x_{k_1})$, bestimme $x_{k_3} \notin B_\delta(x_{k_1}) \cup B_\delta(x_{k_2}), \ldots$
Diese Folge leistet das Gewünschte.

27. Sei V ein Banachraum, $\Omega \subset V$ offen; die Abbildung $F : \Omega \to V$ heißt in $x_0 \in \Omega$ (Fréchet-) differenzierbar, falls gilt:
Es gibt eine beschränkte lineare Abbildung $A : V \to V$, ein $\varepsilon > 0$ und eine Abbildung $R : B_\varepsilon(x_0) \to V$ mit $\lim_{x\to x_0} \frac{\|R(x)\|}{\|x-x_0\|} = 0$, so dass F in $B_\varepsilon(x_0)$ die Darstellung besitzt:

$$F(x) = F(x_0) + A(x - x_0) + R(x).$$

In diesem Fall heißt $A =: DF(x_0)$ das (Fréchet-) Differential von F im Punkte x_0.

Man zeige: Ist $F : \Omega \to V$ kompakt und in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, so ist $DF(x_0)$ eine kompakte lineare Abbildung, bildet also beschränkte Mengen auf präkompakte ab.

Lösung: Bezeichne $A := DF(x_0)$, zu zeigen: $A(\overline{B_1(0)})$ ist präkompakt, d. h. für jede Folge $x_k \in V$, $\|x_k\| \le 1$ besitzt $(Ax_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.
Widerspruchsannahme: Es gibt eine Folge $x_k \in V$, $\|x_k\| \le 1$, so dass $(Ax_k)_{k\epsilon\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge besitzt.
Gemäß Aufgabe 26 kann man nach Auswahl einer Teilfolge annehmen:

$$\exists \delta : \quad \forall k \ne j : \quad \|Ax_k - Ax_j\| \ge \delta. \qquad (*)$$

Bestimme nun $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $x \in V$ mit $\|x - x_0\| \le \varepsilon$ gilt:

$$\|R(x)\| \le \frac{\delta}{4}\|x - x_0\|.$$

Wähle aus (x_k) eine Teilfolge (x_{k_ℓ}) aus, so dass $F(x_0 + \varepsilon x_{k_\ell})$ konvergiert. Insbesondere existieren zwei Indizes k_i, k_j mit

$$\|F(x_0 + \varepsilon x_{k_i}) - F(x_0 + \varepsilon x_{k_j})\| \le \frac{1}{4}\delta\varepsilon.$$

Aus der auf $\overline{B_\varepsilon(x_0)}$ gültigen Darstellung

$$F(x) = F(x_0) + A(x - x_0) + R(x),$$

$$F(x_0 + \varepsilon x_{k_i}) - F(x_0 + \varepsilon x_{k_j}) - R(x_0 + \varepsilon x_{k_i}) + R(x_0 + \varepsilon x_{k_j}) = \varepsilon A(x_{k_i} - x_{k_j})$$

folgt vermöge $(*)$:

$$\varepsilon\delta \le \|\varepsilon A(x_{k_i} - x_{k_j})\| \le \|F(x_0 + \varepsilon x_{k_i}) - F(x_0 + \varepsilon x_{k_j})\| + \|R(x_0 + \varepsilon x_{k_i})\| + \|R(x_0 + \varepsilon x_{k_j})\|$$

$$\le \frac{1}{4}\delta\varepsilon + \frac{1}{4}\delta\|\varepsilon x_{k_i}\| + \frac{1}{4}\delta\|\varepsilon x_{k_j}\| \le \frac{3}{4}\delta\varepsilon$$

und somit ein Widerspruch.

28. **Sei** $V = c^0 =$ **Menge aller reellen Nullfolgen** $= \{x = (x_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} : x_\ell \in \mathbb{R}, \lim_{\ell\to\infty} x_\ell = 0\}$, **zusammen mit** $\|x\| := \|x\|_{c^0} = \max_{\ell\in\mathbb{N}} |x_\ell|$ **wird** V **ein Banachraum (ohne Beweis). Sei** $F : V \to V, F(x) = (x_\ell^2)_{\ell\in\mathbb{N}}$. **Man zeige:**
F **ist an jeder Stelle** $x \in V$ **Fréchet–differenzierbar, und** $DF(x)$ **ist eine kompakte lineare Abbildung. Dagegen ist** $F|\overline{B_1(0)}$ **nicht kompakt.**
D. h., die Umkehrung von Aufgabe 27 gilt nicht.

Lösung:

$$\begin{aligned} F(x+h) &= (x_\ell^2 + 2x_\ell h_\ell + h_\ell^2)_{\ell\in\mathbb{N}} \\ &= F(x) + (2x_\ell h_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} + F(h), \end{aligned}$$

dabei ist $\|F(h)\| = \max\limits_{\ell\in\mathbb{N}} |h_\ell^2| = \|h\|^2$, insbesondere ist $F(h) = o(\|h\|)$ für $\|h\| \to 0$.
Für festes $x \in c^0$ ist die lineare Abbildung $c^0 \to c^0$, $h \mapsto (2x_\ell h_\ell)$ wegen

$$\max_{\ell\in\mathbb{N}} |2x_\ell h_\ell| \leq 2(\max_{\ell\in\mathbb{N}} |x_\ell|)(\max_{\ell\in\mathbb{N}} |h_\ell|) \leq 2\|x\| \cdot \|h\|$$

beschränkt. Also ist $F : c^0 \to c^0$ differenzierbar mit

$$DF(x)(h) = (2x_\ell h_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}.$$

Die Abbildung $DF(x)$ ($x \in c^0$ beliebig, aber fest) ist sogar als lineare Abbildung kompakt:
Sei $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subset c^0$, $\|h^{(k)}\|_{c^0} \leq 1$. Mit Hilfe des Cantorschen Diagonalverfahrens findet man beschränkte Folge $h \in [-1,1]^{\mathbb{N}}$, so dass nach Auswahl einer Teilfolge gilt: Für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt $h_\ell^{(k)} \to h_\ell$ $(k \to \infty)$.
Zeige $DF(x)(h^{(k)}) \to \left(\overset{\text{formal}}{DF(x)(h)=}\right) 2(x_\ell h_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \in c^0$,
das heißt

$$\max_{\ell\in\mathbb{N}} \|h_\ell^{(k)} x_\ell - h_\ell x_\ell| \to 0 \quad (k \to \infty). \tag{$*$}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, bestimme zunächst ℓ_0, so dass für alle $\ell \geq \ell_0$ gilt: $|x_\ell| \leq \frac{\varepsilon}{4}$.
Für $\ell \geq \ell_0$ und alle k ist: $2\left|h_\ell^{(k)} x_\ell - h_\ell x_\ell\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\left(\left|h_\ell^{(k)}\right| + |h_\ell|\right) \leq \varepsilon$.
Bestimme nun k_0 so, dass für $k \geq k_0$ und $\ell \leq \ell_0$ gilt:

$$\left|h_\ell^{(k)} - h_\ell\right| \leq \varepsilon \frac{1}{\|x\|}$$

$$\Rightarrow \left|h_\ell^{(k)} x_\ell - h_\ell x_\ell\right| \leq \frac{\varepsilon}{\|x\|} |x_\ell| \leq \varepsilon,$$

insgesamt folgt $(*)$
Jedoch ist für $e^{(i)} = (\delta_{i\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$: $F(e^{(i)}) = e^{(i)}$, für $i \neq j$: $\left\|F(e^{(i)}) - F(e^{(j)})\right\| = 1$, d. h. $(F(e^{(i)}))_{i\in\mathbb{N}}$ enthält keine Cauchy-Teilfolge.

29. **Sei $\Omega \subset V$ offen, $F : \Omega \to V$ sei kompakt und in $x_0 \in \Omega$ Fréchet-differenzierbar. Das Differential $Id - DF(x_0)$ sei injektiv. Ferner habe $Id - F$ in x_0 eine Nullstelle: $x_0 - F(x_0) = 0$. Man zeige: Die Nullstelle x_0 ist isoliert, und es gilt:**

$$\operatorname{ind}(Id - F, x_0) = \operatorname{ind}(Id - DF(x_0), 0).$$

Hinweis: **Aufgabe 27.**

Lösung: Mit $A := DF(x_0)$ gilt nahe x_0 die Darstellung

$$\begin{aligned}(Id - F)(x) &= (Id - F)(x_0) + (Id - A)(x - x_0) - R(x)\\ &= (Id - A)(x - x_0) - R(x),\end{aligned}$$

wobei $R(x) = o(\|x - x_0\|)$.
Gemäß Aufgabe 27 ist A ein kompakter linearer Operator.
Betrachte $Id - A$ auf $\partial B_1(0)$, das heißt für $\|x\| = 1$.
Auf Grund der Injektivitätsannahme ist hier $Id - A \neq 0$, gemäß Hilfssatz 9.7 existiert $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\|x\| = 1$ gilt $\|(Id - A)x\| \geq \varepsilon$.
Wähle nun $\delta > 0$ so, dass auf $\overline{B_\delta(x_0)}$ gilt

$$\|R(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|x - x_0\|,$$

andererseits ist

$$\|(Id - A)(x - x_0)\| \geq \varepsilon\|x - x_0\|,$$

das heißt $\|(Id - F)(x)\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\|x - x_0\|$, x_0 ist isolierte Nullstelle.
Zur Indexberechnung : $\operatorname{ind}(Id - F, x_0) \overset{\text{def}}{=} d(Id - F, B_\delta(x_0))$,
Verwende Homotopiesatz:

$$\begin{aligned}H(\tau, x) &= F(x_0) + A(x - x_0) + \tau R(x)\\ &= (1 - \tau)(F(x_0) + A(x - x_0)) + \tau F(x),\end{aligned}$$

ist in $[0,1] \times \overline{B_\delta(x_0)}$ kompakt; zulässig, denn für $(\tau, x) \in [0,1] \times \partial B_\delta(x_0)$ gilt:

$$\begin{aligned}\|(Id - H(\tau, \,.\,))x\| &= \|x - F(x_0) - A(x - x_0) - \tau R(x)\|\\ &\underset{x_0 = F(x_0)}{=} \|(Id - A)(x - x_0) + \tau R(x)\| \geq \varepsilon\|x - x_0\| - \tau\|R(x)\|\\ &\geq \varepsilon\delta - \frac{\varepsilon\delta}{2} = \frac{1}{2}\varepsilon\delta > 0.\end{aligned}$$

Also ist insgesamt

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}(Id - F, x_0) &\underset{\text{def}}{=} d(Id - F, B_\delta(x_0))\\ &= d(Id - \underbrace{F(x_0)}_{x_0} - A(\,.\, - x_0), B_\delta(x_0))\\ &= d((Id - A)(\,.\, - x_0), B_\delta(x_0))\\ &= d(Id - A, B_\delta(0)) = \operatorname{ind}(Id - A, 0).\end{aligned}$$

Im letzten Schritt benutzt man die Translationsinvarianz, die sich direkt vom $\mathbb{R}^m$ überträgt.

30. Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Aufgabe 29 gelte: V ist ein Hilbertraum, d. h. es gibt ein Skalarprodukt, so dass für alle $x \in V$ gilt: $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.

Das Differential von F in x_0 sei selbstadjungiert – für alle $x, y \in V$ ist $\langle DF(x_0)x, y\rangle = \langle x, DF(x_0)y\rangle$ – und besitze in $(1, \infty)$ $N \in \mathbb{N}_0$ Eigenwerte $\lambda_1, \dots \lambda_N$; jeder Eigenwert wird entsprechend seiner Vielfachheit aufgeführt.
(Die endliche Anzahl in $(1, \infty)$ folgt bereits aus der Kompaktheit von $DF(x_0)$).

Man zeige: $\operatorname{ind}(Id - F, x_0) = (-1)^N$.

Lösung: Bezeichne $A = DF(x_0)$, zu bestimmen ist $\operatorname{ind}(Id - A, 0)$. Auf Grund der Injektivitätsvoraussetzung an $Id - A$ ist 1 nicht Eigenwert von A.
Sei $\varphi_1, ..., \varphi_N$ ein zu $\lambda_1, ..., \lambda_N$ gehöriges Orthonormal-System von Eigenvektoren, setze

$$Bx = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \langle x, \varphi_j\rangle \varphi_j,$$

B ist endlichdimensional, insbesondere kompakt.
Betrachte auf $[0,1] \times \overline{B_1(0)}$ die Homotopie $H(\tau, x) = \tau Bx + (1-\tau)Ax$, offensichtlich kompakt.
Zulässigkeit: Angenommen, für ein $\tau \in [0,1]$, $\|x\| = 1$ ist $0 = (Id - H(\tau, .))(x) = x - \tau Bx - (1-\tau)Ax$, also

$$x = \tau \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \langle x, \varphi_j\rangle \varphi_j + (1-\tau)Ax.$$

Skalare Multiplikation mit φ_i, $i = 1, ..., N$ ergibt

$$\langle x, \varphi_i\rangle = \tau\lambda_i\langle x, \varphi_i\rangle + (1-\tau)\langle Ax, \varphi_i\rangle = \tau\lambda_i\langle x, \varphi_i\rangle + (1-\tau)\langle x, A\varphi_i\rangle = \lambda_i\langle x, \varphi_i\rangle.$$

Da $\lambda_i > 1:$ $\langle x, \varphi_i\rangle = 0$, $Bx = 0$, $x = (1-\tau)Ax$.
Ist $\tau \in (0,1)$, so ist $Ax = \underbrace{(1-\tau)^{-1}}_{>1} x$, wegen $x \perp \operatorname{Span}(\varphi_1, ..., \varphi_N)$ folgt $x = 0$.
Ist $\tau = 0$, folgt $(Id - A)x = 0$, wegen der Injektivitätsbedingung an $Id - A$ auch $x = 0$.
Ist $\tau = 1$, ist offenbar $x = 0$.
Stets ergibt sich ein Widerspruch, die Homotopie ist zulässig, es bleibt $\operatorname{ind}(Id - B, 0)$ zu bestimmen.
Betrachte $V' = \operatorname{Span}(\varphi_{1,...,}\varphi_N)$ sowie die Koordinatenabbildung

$$\psi : \mathbb{R}^N \to V', \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \end{pmatrix} \mapsto \sum_{j=1}^{N} \xi_j \varphi_j.$$

$Id - B$ lautet in Koordinaten

$$\left(\psi^{-1} \circ (Id - B) \circ \psi\right)(\xi) = (\xi_j - \lambda_j \xi_j)_{j=1,...,N} = \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & & \mathcal{O} \\ & \ddots & \\ \mathcal{O} & & 1-\lambda_N \end{pmatrix} \xi.$$

Der Index dieser Abbildung in 0 ist $(-1)^N$.

31. **Sei $\Omega \subset V$ offen, beschränkt, $0 \in \Omega$. Sei $F : \overline{\Omega} \to V$ kompakt und $d(Id - F, \Omega) \neq 1$. Man zeige: Dann hat F einen positiven Eigenwert, d. h. es gibt $x \in \Omega, x \neq 0, \lambda > 0$, so dass $F(x) = \lambda x$.**

Lösung: Da wegen $0 \in \Omega :$ $d(Id, \Omega) = 1,$ ist die Homotopie $H(\tau, x) = \tau F(x)$ unzulässig, das heißt, es gibt $\tau \in [0, 1],$ $x \in \partial\Omega$ (insbesondere $x \neq 0$), so dass

$$x - \tau F(x) = 0.$$

Dann ist $\tau \neq 0$ und $F(x) = \underbrace{\tfrac{1}{\tau}}_{>0} \cdot \underbrace{x}_{\neq 0}.$

32. **Sei $\Omega \subset V$ offen, beschränkt, $F : \overline{\Omega} \to V$ sei kompakt, $0 \notin (Id - F)(\partial\Omega)$, es gelte $d(Id - F, \Omega) \neq 0$. Die Abbildung $G : V \to V$ genüge der Lipschitz-Bedingung $\|G(x) - G(y)\| \leq K\|x - y\|$ für alle $x, y \in V$ mit einer geeigneten Konstanten $K > 0$. Man zeige: Es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für jedes $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ die Gleichung**

$$x = F(x) + \varepsilon G(x)$$

eine Lösung $x \in \Omega$ besitzt.
Anleitung: **Man zeige für hinreichend kleine $|\varepsilon|$, dass**

- $Id - \varepsilon G$ **ein Homöomorphismus von V ist (Banachscher Fixpunktsatz),**
- **für $x \in V$ die Abbildung $[0, 1] \ni \tau \to (Id - \varepsilon\tau G)^{-1}(x)$ stetig ist,**
- **dass $[0, 1] \times \overline{\Omega} \to V, H(\tau, x) = (Id - \varepsilon\tau G)^{-1}F(x)$ eine zulässige Homotopie ist.**

Lösung:
1. Schritt: Für $|\varepsilon|K < 1$ ist $Id - \varepsilon G$ ein Homöomorphismus von V.
Beweis dazu:

- Injektivität

$$\begin{aligned} \|(Id - \varepsilon G)(x) - (Id - \varepsilon G)(x')\| &\geq \|x - x'\| - |\varepsilon|\|G(x) - G(x')\| \\ \geq \|x - x'\| - |\varepsilon|K\|x - x'\| &= (1 - |\varepsilon|K)\|x - x'\|. \end{aligned} \qquad (*)$$

- Surjektivität
  Sei $y \in V$ gegeben, suche Lösung x der Gleichung

$$x - \varepsilon G(x) = y, \quad \text{das heißt} \quad x = y + \varepsilon G(x).$$

Betrachte dazu $T : V \to V, \quad T(x) = y + \varepsilon G(x).$

$$\|T(x) - T(x')\| \leq |\varepsilon| \|G(x) - G(x')\| \leq \underbrace{|\varepsilon| \cdot K}_{<1} \cdot \|x - x'\|,$$

das heißt, T ist eine strikte Kontraktion, und der Banachsche Fixpunktsatz liefert die Existenz eines Fixpunktes $x \in V$:

$$x = T(x) = y + \varepsilon G(x).$$

- Stetigkeit der Umkehrabbildung
  Seien $y, y' \in V, \quad x, x' \in V$ mit $(Id - \varepsilon G)(x) = y, \quad (Id - \varepsilon G)(x') = y'$.
  Wie in $(*)$: $\|y - y'\| \geq (1 - |\varepsilon| K) \|x - x'\|$,
  das heißt $(Id - \varepsilon G)^{-1}$ ist sogar Lipschitzstetig mit Konstante $(1 - |\varepsilon| K)^{-1}$.

<u>2. Schritt:</u> Sei x fest, ε fest mit $|\varepsilon| K < 1$, dann ist $[0,1] \ni \tau \mapsto (Id - \varepsilon\tau G)^{-1}(x)$ stetig.

<u>Beweis dazu:</u> Seien $\tau_k, \tau \in [0,1], \quad \lim_{k\to\infty} \tau_k = \tau$.

$$(Id - \varepsilon\tau_k G)^{-1}(x) - (Id - \varepsilon\tau G)^{-1}(x)$$

$$= (Id - \varepsilon\tau_k G)^{-1}(x) - (Id - \varepsilon\tau_k G)^{-1} \left((Id - \varepsilon\tau_k G)(Id - \varepsilon\tau G)^{-1}(x)\right).$$

Die Abbildungen $(Id - \varepsilon\tau_k G)^{-1}$ sind unabhängig von k Lipschitz-stetig mit Konstante $\frac{1}{1-|\varepsilon|K}$.

$$\Rightarrow \quad \|(Id - \varepsilon\tau_k G)^{-1}(x) - (Id - \varepsilon\tau G)^{-1}(x)\|$$

$$\leq \frac{1}{1 - |\varepsilon| K} \|x - (Id - \varepsilon \underbrace{\tau_k}_{\tau + (\tau_k - \tau)} G)(Id - \varepsilon\tau G)^{-1}(x)\|$$

$$= \frac{1}{1 - |\varepsilon| K} \|x - (Id - \varepsilon\tau G)(Id - \varepsilon\tau G)^{-1}(x) + \varepsilon(\tau_k - \tau) G(Id - \varepsilon\tau G)^{-1}(x)\|$$

$$= \frac{|\varepsilon| \cdot |\tau_k - \tau|}{1 - |\varepsilon| K} \|G(Id - \varepsilon\tau G)^{-1}(x)\| \to 0 \quad (k \to \infty).$$

<u>Folgerung:</u> Für $|\varepsilon| K < 1$ ist dann auch

$$[0,1] \times V \to V, \quad (\tau, x) \mapsto (Id - \varepsilon\tau G)^{-1}(x)$$

stetig.
<u>Beweis dazu:</u> Seien $\tau_k, \tau \in [0,1], \quad x_k, x \in V, \quad \tau_k \to \tau, \quad x_k \to x \quad (k \to \infty)$.
Dann ist

$$\begin{aligned}
&\|(Id - \varepsilon\tau_k G)^{-1}(x_k) - (Id - \varepsilon\tau G)^{-1}(x)\| \\
&\quad \leq \|(Id - \varepsilon\tau_k G)^{-1}(x_k) - (Id - \varepsilon\tau_k G)^{-1}(x)\| \\
&\qquad + \|(Id - \varepsilon\tau_k G)^{-1}(x) - (Id - \varepsilon\tau G)^{-1}(x)\| \\
&\quad \leq \frac{1}{1 - |\varepsilon| K} \underbrace{\|x_k - x\|}_{\to 0} + \| \underbrace{(Id - \varepsilon\tau_k G)^{-1}(x) - (Id - \varepsilon\tau G)^{-1}(x)}_{\to 0 \text{ s.o.}} \| \to 0 \quad (k \to \infty).
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung beruht auf der in k gleichmäßigen Lipschitzstetigkeit von $(Id - \varepsilon\tau_k G)^{-1}$.

<u>3. Schritt:</u> Kompaktheit der Homotopie

$$[0,1] \times \overline{\Omega} \to V, \quad H(\tau, x) = (Id - \varepsilon\tau G)^{-1} F(x)$$

für beliebiges, aber festes ε mit $|\varepsilon| K < 1$.
<u>Beweis dazu:</u> Sei $(\tau_k) \subset [0,1]$, $(x_k) \subset \overline{\Omega}$.
Nach Auswahl einer Indexteilfolge erreicht man $\tau_k \to \tau_0 \in [0,1]$
nach nochmaliger Auswahl einer Indexteilfolge erreicht man $F(x_k) \to y_0 \in V$.
Zusammen mit der oben diskutierten Stetigkeit folgt

$$H(\tau_k, x_k) \to (Id - \varepsilon\tau_0 G)^{-1} y_0$$

Die Stetigkeit von H in (τ, x) ist offensichtlich.

<u>4. Schritt:</u> Für hinreichend kleines $\varepsilon_0 > 0$, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$,
erfüllt die Homotopie H die Zulässigkeitsbedingung

$$(\tau, x) \in [0,1] \times \partial\Omega \Rightarrow x - H(\tau, x) \neq 0.$$

<u>Beweis dazu:</u> Bestimme $\hat{\varepsilon} > 0$, so dass für $x \in \partial\Omega$ gilt $\|x - F(x)\| > \hat{\varepsilon}$.
Ferner gilt für $x \in \partial\Omega$ mit einem beliebig gewählten $x_0 \in \partial\Omega$:

$$\|g(x)\| \le \|g(x) - g(x_0)\| + \|g(x_0)\| \le K\|x - x_0\| + \|g(x_0)\|$$

$$\le K \cdot \operatorname{diam} \partial\Omega + \|g(x_0)\| =: M.$$

Setze

$$\varepsilon_0 := \min\left\{\frac{\hat{\varepsilon}}{M}, \frac{1}{2K}\right\}.$$

Unter der Bedingung

$$|\varepsilon| \le \varepsilon_0$$

gilt dann: Die Homotopie ist zulässig.
Annahme: Es gibt $\tau \in [0,1]$, $x \in \partial\Omega$ mit

$$x - (Id - \varepsilon\tau G)^{-1} F(x) = 0.$$

Dann hätte man

$$F(x) = (Id - \varepsilon\tau G)(x) = x - \varepsilon\tau G(x)$$

$$\Rightarrow x - F(x) = \varepsilon\tau G(x)$$

$$\Rightarrow \hat{\varepsilon} < \|x - F(x)\| = \|\varepsilon\tau G(x)\|$$

$$\le \varepsilon_0 \cdot \|G(x)\| \le \frac{\hat{\varepsilon}}{M} M = \hat{\varepsilon}.$$

Widerspruch!

Schluss: Auf Grund des Homotopiesatzes ist nun

$$0 \neq d(Id - F, \Omega) = d(Id - H(0, \ , \ ), \Omega)$$

$$= d(Id - H(1, \ , \ ), \Omega) = d(Id - (Id - \varepsilon G)^{-1} \circ F, \Omega);$$

das heißt, es gibt ein $x \in \Omega$ mit

$$x = (Id - \varepsilon G)^{-1}(F(x))$$

$$\Rightarrow x - \varepsilon G(x) = F(x)$$

$$\Rightarrow x = F(x) + \varepsilon G(x).$$