Analysis I – WS 2004-2005

Prof. H.-Ch. Grunau, E. Sassone

0 Schulkenntnisse

Hier geht es nicht um Vorlesungsstoff, und Ihre Lösungen zu den beiden folgenden Aufgaben werden auch nicht bewertet. Wir wollen nur herausfinden, was Sie schon von der Schule her wissen.

0.1 $\star$ Aufgabe

Man berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen:

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sin(x)\cos^2(x)$

2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g(x) = 4e^{-3x}$,

3) $h : \mathbb{R} \setminus \{4\} \to \mathbb{R} \quad h(x) = \frac{x^2-3}{(x-4)^2}$

4) $j : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \quad j(x) = \log(|\sin(x)|)$.

0.2 $\star$ Aufgabe

Man berechne die folgenden Integrale:

1) $\int_0^{\pi/2} \sin^4(x)\cos(x)\,dx$,

2) $\int_0^2 4x^3 - x^2 + 3\,dx$,

3) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx$,

4) $\int_a^b \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\,dt$.

0.3 $\star$ Aufgabe

Welche der folgenden Funktionen sind stetig, welche differenzierbar, bzw. in welchen Punkten:

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = |x|$

2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \end{cases}$

3) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad h(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

4) $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad j(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \cos(x) - 1 & 0 < x \leq \pi \\ \pi & x > \pi \end{cases}$

1 13.10.04

1.1 $\star$ Aufgabe (5 Punkte)

Man ergänze die folgende Wahrheitstafel:

p	q	r	$(\neg p) \Rightarrow (\neg q)$	$q \Rightarrow p$	$(\neg q) \vee (\neg p)$	$(q \wedge p) \vee (p \wedge r)$	$p \wedge (q \vee r)$
w	w	w					
w	w	f					
w	f	w					
w	f	f					
f	w	w					
f	w	f					
f	f	w					
f	f	f					

.

1.2 Aufgabe

Gegeben sei die Aussageform $Z(x, y)$. Man bilde die Negation von

1) $\forall x, \forall y : Z(x, y)$, 2) $\forall x, \exists y : Z(x, y)$, 3) $\exists x, \forall y : Z(x, y)$, 4) $\exists x, \exists y : Z(x, y)$.

1.3 $\star$ Aufgabe (2 Punkte)

Man bilde die Negation der folgenden Aussageformen:

$A(x)$	$\neg A(x)$
$2x = 6$	
$x = 3 \vee x = 4$	
$x \leq 3$	
$2 \leq x \leq 10$	
$x \in M \cap N$	
$x \in M \setminus N$	

1.4 Aufgabe

Man setze die Zeichen ($\forall$, $\exists$) so ein, dass eine wahre und möglichst allgemeine Aussage entsteht:

1) $\_\_\_ x \in \mathbb{R}, \_\_\_ y \in \mathbb{R} : x^2 = y,$

2) $\_\_\_ M \in \mathbb{R}, \_\_\_ x \in \mathbb{R} : \operatorname{sgn}(x) < M,$

3) $\_\_\_ x \in \mathbb{R}, \_\_\_ M > 0 : |x| < M,$

4) $\_\_\_ x > 0, \_\_\_ y > 0 : xy > 0.$

1.5 $\star$ Aufgabe (3 Punkte)

Mit Hilfe von Wahrheitstafeln zeige man die de Morganschen Regeln:

1) $\neg(p \wedge q) \iff (\neg p \vee \neg q),$

2) $\neg(p \vee q) \iff (\neg p \wedge \neg q).$

1.6 Aufgabe

Gegeben seien die Mengen S, T_1, T_2. Man beweise, dass

1) $S \cap (T_1 \cup T_2) = (S \cap T_1) \cup (S \cap T_2),$

2) $S \cup (T_1 \cap T_2) = (S \cup T_1) \cap (S \cup T_2).$

1.7 Aufgabe

Seien A und B Teilmengen von S. Sei A^C der Komplement von A in S ($A^C = \{x \in S, x \notin A\}$). Man beweise, dass

1) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C,$

2) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$

1.8 Aufgabe

Gegeben seien die Mengen X, Y, Z. Man beweise, dass

1) $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z),$

2) $(X \cap Y) \times Z = (X \times Z) \cap (Y \times Z).$

1.9 Aufgabe

Man konstruiere nichttriviale Beispiele für folgende mögliche Eigenschaften von Abbildungen:

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f ist nicht injektiv, aber surjektiv.

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f ist nicht surjektiv, aber injektiv.

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f ist weder injektiv, noch surjektiv.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 20.10.04 in der Vorlesung ab.]

Analysis I – WS 2004-2005

Prof. H.-Ch. Grunau, E. Sassone

2 20.10.2004

2.1 ⋆ Aufgabe

Gegeben seien drei Abbildungen $f : M_3 \to M_4, \quad g : M_2 \to M_3, \quad h : M_1 \to M_2$.

1) Sei $f \circ g$ surjektiv. Man beweise, dass dann f surjektiv ist.
2) Sei $f \circ g$ injektiv. Man beweise, dass dann g injektiv ist.
3) Man konstruiere ein Beispiel mit $f \circ g$ injektiv, wobei aber f nicht injektiv ist.
4) Man konstruiere ein Beispiel mit $f \circ g$ surjektiv, wobei aber g nicht surjektiv ist.
5) Man beweise, dass $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

2.2 Aufgabe

Gegeben seien zwei Mengen M, N und eine Abbildung $f : M \to N$. Weiter seien I, J beliebige Indexmengen und $A_i \subset M$, $(i \in I)$ sowie $B_j \subset N$, $(j \in J)$. Man zeige, dass

1) $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$;
2) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$;
3) $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$;
4) $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

2.3 ⋆ Aufgabe

Es seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ sei eine Abbildung. Man beweise:

1) Ist f injektiv, so gibt es eine Abbildung $g : Y \to X$ derart, daß $g \circ f : X \to X$ gleich der Identität auf X ist.
2) Ist f surjektiv, so gibt es eine Abbildung $h : Y \to X$ derart, daß $f \circ h : Y \to Y$ gleich der Identität auf Y ist.

Gilt jeweils auch die Umkehrung?

2.4 ⋆ Aufgabe

Man untersuche jede der folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität (Schulwissen darf verwendet werden):

1) $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, mit $f(x) = \cos(x^2)$;
2) $f : [-2\pi, 2\pi] \to [-2, 2]$, mit $f(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$;
3) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, mit $f(x) = x^2$;
4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $f(x) = x^3 + 12$;
5) $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, mit $f(x) = \frac{1}{x}$.

2.5 Aufgabe

Man untersuche, ob die folgenden Abbildungen surjektiv, injektiv bzw. bijektiv sind:

1) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $f(m, n) = (-1)^m n$,

2) $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g(m, n) = 2^m 5^n$,

3) $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $h(m, n) = \frac{m}{n}$.

2.6 Aufgabe

Welche der folgenden Strukturen sind Körper:

1) $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +, \cdot)$,

2) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$,

3) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$,

4) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$,

5) $(\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}, +, \cdot)$, $\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$ $\begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$;

6) $(\mathbb{Q} \cap [-10, 10], +, \cdot)$?

Man begründe die Antworten. Schulwissen darf verwendet werden.

2.7 Aufgabe

Seien M ein total angeordneter Körper und $a, b, c, d \in M$. Man beweise, dass stets gilt:

1) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$;

2) $a < b \Rightarrow -b < -a$;

3) $a < b$ und $c > 0 \Rightarrow ac < bc$;

4) $a < b$ und $c < d \Rightarrow a + c < b + d$;

5) $0 < a < b$ und $0 < c < d \Rightarrow ac < bd$.

2.8 $\star$ Aufgabe

Man beweise die folgenden Ungleichungen (Schulwissen darf verwendet werden):

1) Für beliebige $x, y, \omega \in \mathbb{R}, \omega > 0$ gilt

$$xy \leq \omega x^2 + \frac{1}{4\omega} y^2.$$

2) Für beliebiges $x \in \mathbb{R}, x > 0$ gilt

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 27.10.04 vor der Vorlesung ab.]

Analysis I – WS 2004-2005

Prof. H.-Ch. Grunau, E. Sassone

3 27.10.2004

3.1 $\star$ Aufgabe

Sei M ein total angeordneter Körper und $\emptyset \neq A \subset M$ eine nach oben beschränkte Menge. Man zeige, dass das Supremum von A im Falle der Existenz eindeutig bestimmt ist. Was kann man über das Maximum von A aussagen?

3.2 Aufgabe

Man zeige mit vollständiger Induktion, dass für ganze nichtnegative Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ der Ausdruck

$$11^{n+2} + 12^{2n+1}$$

durch 133 teilbar ist.

Definition

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$, definieren wir den *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha-\nu)}{n!} \left(= \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)}{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1} \right).$$

Falls $\alpha \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \geq n$, dann ist speziell

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!}.$$

3.3 $\star$ Aufgabe

Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Man zeige, dass

$$\binom{\alpha}{n} + \binom{\alpha}{n+1} = \binom{\alpha+1}{n+1}.$$

3.4 $\star$ Aufgabe

Man beweise mit vollständiger Induktion, dass für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ und für jede natürliche Zahl n die Gleichung

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

der sogenannte binomische Satz, gilt.

3.5 Aufgabe

Gegeben sei die Menge $B = \{n \in \mathbb{N} : e^{-n^2} < 0\}$. Man zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $n \in B$, dann folgt auch, dass $n+1 \in B$. (Sie dürfen Schulwissen über die Exponentialfunktion verwenden.)

3.6 $\star$ Aufgabe

Gegeben sei die Menge $B = \{n \in \mathbb{N} : n(n^2+1) < (n^2+n+2)(n-1)\}$. Man zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $n \in B$, dann folgt auch, dass $n+1 \in B$.

Definition

Die *Fibonacci–Folge* wird mit Hilfe der folgenden Rekursionsvorschrift definiert:

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ für } n > 2$$

So sind die ersten Zahlen:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,...

3.7 $\star$ Aufgabe

Man zeige mit vollständiger Induktion die folgenden Eigenschaften der Fibonaccifolge:

1) $\forall n \geq 1 : f_{4n}$ ist durch 3 teilbar.

2) $\forall n \geq 1 : f_{3n}$ ist durch 2 teilbar.

3.8 Aufgabe

Man zeige mit vollständiger Induktion:

1) $\forall n \geq 1 : \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2) $\forall n \geq 1 : \quad 5^{2n} - 1$ ist durch 6 teilbar.

3) $\forall n \geq 1 :$ Die Anzahl aller möglichen Teilmengen (einschließlich $\emptyset$ und N_n) von $N_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ ist 2^n.

4) $\forall n \geq 2 : \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \ldots \forall x_n \in \mathbb{R} : \quad |x_1 + x_2 + ... + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$.

3.9 $\star$ Aufgabe

Man beweise, dass die Gleichmächtigkeit von Mengen eine Äquivalenzrelation ist.

3.10 Aufgabe

Gegeben sei $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Dessen $p-$adische Zahldarstellung sei

$$n = a_k a_{k-1} .... a_1 a_0.$$

Man gebe dessen p^2-adische Zahldarstellung an.

3.11 Aufgabe

Man bestimme die $n \in \mathbb{N}$, für die $n^3 < n!$ gilt.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 03.11.04 in der Vorlesung ab.]

Analysis I – WS 2004-2005

Prof. H.-Ch. Grunau, E. Sassone

4 03.11.2004

4.1 Spiel (Unendliches Hotel)

Betrachten Sie ein unendliches Hotel mit abzählbar unendlich vielen Zimmern. Ein neuer Gast kommt und fragt, ob Platz auch für ihn ist. Der Direktor des Hotels, ein Mathematiker, sagt: „Alle Zimmer sind besetzt; aber kein Problem, ich finde ein Zimmer auch für Sie.“ Wie hat der Direktor das Problem gelöst?
Nach einem Tag kommen abzählbar unendlich viele neue Gäste, aber alle Zimmer sind noch besetzt. Trotzdem hat der Direktor kein Problem, um Zimmer für alle alten und neuen Gäste zu finden. Wie hat er das gemacht?

4.2 Aufgabe

Gegeben seien eine streng monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, eine monoton wachsende Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine streng monoton fallende Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Man studiere die Eigenschaften von

1) $f \circ g$,

2) $h \circ f$,

3) $\star$ $f \circ h$,

4) $\star$ $g \circ h \circ f \circ g$.

4.3 Aufgabe

Sei f auf dem Intervall $[a, b]$ monoton wachsend und sei g auf $[a, b]$ monoton fallend. Man finde zusätzliche Bedingungen an f und g, so dass das Produkt $f \cdot g$ auf $[a, b]$ monoton fallend und der Quotient f/g auf $[a, b]$ monoton wachsend ist.
Bemerkung: Sie dürfen nur mit der Definition und mit elementaren Ungleichungen arbeiten, aber nicht etwa mit Methoden der Differentialrechnung! Beachten Sie, dass an f und g keinerlei Voraussetzungen wie Differenzierbarkeit o.ä. gestellt werden.

4.4 $\star$ Aufgabe

Seien f und g Funktionen, die auf dem Intervall $[a, b]$ einer Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstanten L_f und L_g genügen. Man zeige, dass die Summe $f + g$ und das Produkt $f \cdot g$ auf $[a, b]$ auch einer Lipschitz-Bedingung genügen.

4.5 Aufgabe

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf $[a, b]$ einer Lipschitz-Bedingung genügt und nur ganzzahlige Werte annimmt. Man zeige, dass die Funktion f konstant ist.

4.6 $\star$ Aufgabe

Seien w und z komplexe Zahlen. Man zeige, dass

1) $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$,
2) $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$,
3) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$,
4) $\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$,
5) $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\overline{w}}{\overline{z}}$ für $z \neq 0$.

4.7 Aufgabe

Man beweise, dass die Äquivalenz von Normen eine Äquivalenzrelation ist.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 10.11.04 in der Vorlesung ab.]

Analysis I – WS 2004-2005

Prof. H.-Ch. Grunau, E. Sassone

5 10.11.2004

5.1 Aufgabe

Gegeben sei ein normierter reeller Vektoraum $(V, \| \,.\, \|)$. Man zeige, dass stets gilt:

1) $\emptyset$, V sind abgeschlossen;

2) sind $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset V$ abgeschlossen, so ist auch $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ abgeschlossen;

3) ist J irgendeine Indexmenge und $(\mathcal{A}_j)_{j\in J}$ ein System abgeschlossener Teilmengen von V, so ist auch $\cap_{j\in J}\mathcal{A}_j$ abgeschlossen.

5.2 Aufgabe

Man betrachte den $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm. Man finde:

1) ein Beispiel für einen nicht offenen unendlichen Durchschnitt von offenen Mengen;

2) ein Beispiel für eine nicht abgeschlossene unendliche Vereinigung von abgeschlossenen Mengen.

5.3 $\star$ Aufgabe

Man beweise, dass die Normen $\| \,.\, \|_1$, $\| \,.\, \|_2$, $\| \,.\, \|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ denselben Offenheitsbegriff liefern.
Hinweis: Hilfsatz 6.4.

5.4 Aufgabe

Gegeben sei ein normierter reeller Vektorraum $(V, \| \,.\, \|)$. Man beweise, dass eine Teilmenge $A \subset V$ beschränkt ist genau dann, wenn ein $R > 0$ und ein $a \in V$ existieren, so dass $A \subset B_R(a)$.

5.5 Aufgabe

Man finde im euklidischen $\mathbb{R}^2$ zwei nichtleere disjunkte Mengen A_1 und A_2, deren Abstand Null ist.

5.6 $\star$ Aufgabe

Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Man gebe im euklidischen $\mathbb{R}^n$ den Abstand $\operatorname{dist}(x, K_r(a))$ eines beliebigen Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ zur abgeschlossenen Kugel $K_r(a)$ explizit an. (Begründung!)

5.7 Aufgabe

Man bestimme den offenen Kern, den Rand und den Abschluss von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ bezüglich der euklidischen Norm, d.h. bzgl. des üblichen Betrags.

5.8 $\star$ Aufgabe

Gegeben seien ein normierter reeller Vektorraum $(V, \|\,.\,\|)$ und eine beliebige Menge $M \subset V$. Man beweise, dass für eine Teilmenge $N \subset V$ genau dann $N = M^\circ$ gilt, wenn:

1) $N \subset M$,

2) N ist offen,

3) ist $\tilde{N} \subset V$ offen, $\tilde{N} \subset M$, so folgt stets, dass $\tilde{N} \subset N$.

5.9 $\star$ Aufgabe

Gegeben seien ein normierter Raum V und eine beliebige Teilmenge $M \subset V$. Man zeige, dass

1) ∂M abgeschlossen ist;

2) $M^\circ = M \setminus \partial M$.

5.10 Aufgabe

Gegeben seien zwei beliebige nichtleere beschränkte abgeschlossene Intervalle $[a, b]$, $[c, d] \subset \mathbb{R}$. Man bestimme den Rand des kartesischen Produktes $[a, b] \times [c, d]$ im euklidischen $\mathbb{R}^2$.

5.11 $\star$ Aufgabe

Man beweise die folgende Aussage:
Eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ im normiertem Raum $(V, \|\,.\,\|)$ ist konvergent gegen $a \in V$ genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt:

$$\|a - a_k\| \leq \varepsilon.$$

5.12 $\star$ Aufgabe

Sei $(V, \|\,.\,\|)$ ein normierter Vektorraum. Die Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset V$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ seien gegen $a \in V$ bzw. $b \in V$ konvergent. Man zeige, dass dann $(a_k + b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $a + b$ konvergiert.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 17.11.04 in der Vorlesung ab.]

Analysis I – WS 2004-2005

Prof. H.-Ch. Grunau, E. Sassone

6 17.11.2004

6.1 ⋆ Aufgabe

Gegeben seien eine endliche Indexmenge $J \subset \mathbb{N}$, ein normierter Vektorraum $(V, \|\,.\,\|)$ und eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in V, die gegen ein $a \in V$ konvergiert. Sei $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge in V, wobei für $k \notin J$ gelte: $a_k = b_k$. Man beweise, dass auch die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in V gegen a konvergiert.

6.2 ⋆ Aufgabe

Sei $(V, \|\,.\,\|)$ ein normierter reeller Vektorraum, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in V. Dann ist (a_k) beschränkt im folgenden Sinne: $\exists M > 0 : \forall k : a_k \in B_M(0)$ bzw. $\|a_k\| < M$.
Sei $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in V. Man zeige, dass $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ebenfalls beschränkt ist.

6.3 Aufgabe

Man betrachte eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, die gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiere. Es gebe $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $M_1 < a_k < M_2$.
Man konstruiere ein Beispiel mit $a \notin (M_1, M_2)$.

6.4 Aufgabe

Sei $(V, \|\,.\,\|)$ ein normierter reeller Vektorraum, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine gegen ein $a \in V$ konvergente Folge. Sei $M \geq 0$ derart, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\|a_k\| \leq M$. Man zeige, dass dann auch $\|a\| \leq M$ gilt.

6.5 ⋆ Aufgabe

Man entscheide, welche der Folgen konvergent sind, und bestimme ggfs. ihren Grenzwert:

1) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}, \quad a_k = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k \text{ gerade}, \\ -\frac{2}{k}, & k \text{ ungerade}, \end{cases}$ in $\mathbb{R}$;

2) $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}, \quad b_k = \left(\frac{k+1}{k^2}, 7\right),$ in $\mathbb{R}^2$;

3) $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}, \quad c_k = \begin{cases} 3, & \text{falls } \exists j \in \mathbb{N} : k = 2^j, \\ e^{-k}, & \text{andernfalls}, \end{cases}$ in $\mathbb{R}$;

4) $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}, \quad d_k = \left(\frac{k-1}{-k^2}, e^{-k}, \sin k\pi\right),$ in $\mathbb{R}^3$;

5) $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}, \quad e_k = k - \frac{3}{k},$ in $\mathbb{R}$.

6.6 ⋆ Aufgabe

Sei $(V, \|\,.\,\|)$ ein normierter reeller Vektorraum, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine gegen ein $a \in V$ konvergente Folge. Sei $A_k := \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} a_j$ die Folge der arithmetischen Mittel. Man zeige, dass auch $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

[Die mit ⋆ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 24.11.04 in der Vorlesung ab.]

Analysis I – WS 2004-2005

Prof. H.-Ch. Grunau, E. Sassone

7 24.11.2004

7.1 ⋆ Aufgabe

Man untersuche das Konvergenzverhalten und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert der Folgen:

1) $a_k = \frac{1}{k+8}\left(\sum_{\nu=2}^{k} \nu\right) - \frac{k}{2}$;

2) $b_k = \prod_{\nu=2}^{k} \left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right)$;

3) $c_k = (-1)^k \frac{k+2}{2k^2-1}$.

7.2 ⋆ Aufgabe

Gegeben sei ein normierter Vektorraum $(V, \|\,.\,\|)$. Man zeige, dass ein Punkt $a \in V$ Häufungswert einer Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in V genau dann ist, wenn jede Umgebung $\mathcal{U}$ von a unendlich viele Glieder von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ enthält.

7.3 ⋆ Aufgabe

Gegeben sei eine reelle gegen a konvergente Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Es sei

$$\alpha_m = \inf_{k\geq m} a_k, \qquad \beta_m = \sup_{k\geq m} a_k.$$

Man zeige, dass die Folgen $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $(\beta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend bzw. fallend gegen a streben.

7.4 Aufgabe

In Verallgemeinerung von Aufgabe 7.3 zeige man, dass für eine beliebige reelle Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\liminf_{k\in\mathbb{N}} a_k = \lim_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k, \qquad \limsup_{k\in\mathbb{N}} a_k = \lim_{k\in\mathbb{N}} \beta_k.$$

7.5 Aufgabe

Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen. Man zeige, dass:

1) $\limsup_{k\to\infty} a_k$ der größte Häufungswert der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist;

2) $\limsup_{k\to\infty}(a_k + b_k) \leq \limsup_{k\to\infty} a_k + \limsup_{k\to\infty} b_k$.

7.6 Aufgabe

Man zeige, dass jede reelle Folge eine monotone Teilfolge besitzt.

7.7 ⋆ Aufgabe

Gegeben seien ein normierter Vektorraum $(V, \|\,.\,\|)$ und die Folge $(a_h)_{h\in\mathbb{N}}$, deren Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Konvergiert auch $(a_h)_{h\in\mathbb{N}}$ selbst? (Beweis oder Gegenbeispiel).

Definition

Man bezeichne den Ausdruck

$$A(x_1, ..., x_k) = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_k}{k}$$

als das *arithmetische Mittel* der k reellen Zahlen $x_1, ..., x_k$ und, wenn die Zahlen nicht negativ sind,

$$G(x_1, ..., x_k) = \sqrt[k]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_k}$$

als ihr *geometrisches Mittel.*

7.8 Aufgabe

Gegeben seien k nichtnegative Zahlen $x_1, ..., x_k$.

1) Man zeige, dass $A(\lambda x_1, ..., \lambda x_k) = \lambda A(x_1, ..., x_k)$ und $G(\lambda x_1, ..., \lambda x_k) = \lambda G(x_1, ..., x_k)$.

2) Man zeige, dass

$$G(x_1, ..., x_k) \leq A(x_1, ..., x_k) \tag{1}$$

   Hinweis: Wegen (1) kann man annehmen, dass das arithmetische Mittel von $x_1, ..., x_k$ gleich 1 ist, d.h. $A(x_1, ..., x_k) = 1$.
   Man beweise durch Induktion, dass das geometrische Mittel dieser $x_1, ..., x_k$ kleiner oder gleich 1 ist, wobei die Gleichheit nur dann auftritt, wenn alle x_i gleich sind.

7.9 Aufgabe

Gegeben sei die reelle Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$. Man zeige, dass die Folge gegen einen Wert e, $2 < e < 3$ konvergiert.
Hinweis: Aus Ungleichung (1) folgt

$$\left(1 + \frac{x}{k}\right)^k < \left(1 + \frac{x}{k+1}\right)^{k+1} \qquad \text{für } x \geq -k,\ x \neq 0.$$

Fügt man nämlich links noch den Faktor 1 hinzu, so stehen links und rechts $k + 1$ nichtnegative Faktoren mit derselben Summe $k + 1 + x$.
Insbesondere bilden $a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ und $b_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k$ monoton wachsende Folgen und $c_k = (b_{k+1})^{-1} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$ eine monoton fallende Folge.
Wegen $a_k < c_k$ folgt die Existenz eines Wertes

$$e = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$$

und es ist $a_k < e < c_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 01.12.04 in der Vorlesung ab.]

Analysis I – WS 2004-2005

Prof. H.-Ch. Grunau, E. Sassone

8 01.12.2004

8.1 Aufgabe

Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine reelle Reihe in V. Es existiere eine Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, so dass $\forall k : 0 \leq b_k \leq a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergiert. Man zeige, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ebenfalls divergiert.

8.2 $\star$ Aufgabe

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und es gebe ein $0 \leq q < 1$ sowie ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q.$$

Man zeige, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent ist.
Hinweis: Man nutze das Majorantenkriterium und die geometrische Reihe.

8.3 $\star$ Aufgabe

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ gelte:

$$1 \leq \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Man zeige, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent ist.

8.4 Aufgabe

Man finde ein Beispiel für eine nicht konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, wobei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen ist, so dass $\forall k \in \mathbb{N} : a_k \neq 0$, $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$.

8.5 $\star$ Aufgabe

Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine positive monoton fallende Nullfolge, deren Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert. Man zeige, dass $\lim_{k\to\infty} k a_k = 0$.
Hinweis: Bauen Sie das Argument aus Beispiel 7.15 aus.

8.6 Aufgabe

Gegeben sei eine reelle nichtnegative fallende Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Man zeige, dass $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_{k\in\mathbb{N}} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

8.7 Aufgabe

Man untersuche, für welche Werte des Parametern $\alpha \in (0,2) \cap [4,\infty)$ die folgenden Reihe konvergiert:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} b_k, \qquad b_k = \frac{k^2+\alpha^k}{[3-\cos(k)]^k}.$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\forall x \in \mathbb{R}: \qquad |\cos(x)| \leq 1.$

8.8 $\star$ Aufgabe

Man bestimme $c_0 > 0$ derart, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ck)^k}{k!}$$

für die Werte $0 \leq c < c_0$ des reellen Parameters c konvergiert und für $c > c_0$ divergiert.

8.9 $\star$ Aufgabe

Zeigen Sie, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y); \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y). \end{aligned}$$

Hinweis: 9.11 und 9.19 der Vorlesung.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 08.12.04 in der Vorlesung ab.]

Erste Klausur: Freitag, den 17.12.2004, 15-17 Uhr
in G 05, Hörsaal 4.
Keine Hilfsmittel! Keine Taschenrechner!
Bitte bringen Sie Papier und Schreibmaterial mit.

Analysis I – WS 2004-2005

Prof. H.-Ch. Grunau, E. Sassone

9 08.12.2004

9.1 ⋆ Aufgabe

Man untersuche, in welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Funktionen $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind:

1) $f_1(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

2) $f_2(x) = e^{|x-1|}$;

3) $f_3(x) = \begin{cases} \sin(x) & x < 0, \\ 1 & x = 0, \\ x^2 & x > 0; \end{cases}$

4) $f_4(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

9.2 ⋆ Aufgabe

Untersuchen Sie, in welchen Punkten die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 \exp(x_1), x_1 x_2 x_3)$$

sowie

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{\|(x_1, x_2)\|}, & \text{falls } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x_1, x_2) = (0,0), \end{cases}$$

stetig sind.

9.3 Aufgabe

Man zeige, dass eine monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzen kann.
Hinweis: Zuerst überlege man sich, welche Art von Unstetigkeitsstellen eine monotone Funktion überhaupt besitzen kann. Stets existieren nämlich „links-“ bzw. „rechtsseitige“ Grenzwerte von f.

9.4 ⋆ Aufgabe

Gegeben seien zwei normierte Räume V, W und eine Menge $G \subset V$. Man zeige, dass eine Abbildung $f : G \to W$ stetig in G genau dann ist, wenn Urbilder abgeschlossener Mengen in W stets relativ abgeschlossen in G sind. Dabei heißt eine Menge $A \subset G$ relativ abgeschlossen in G, falls $G \setminus A$ relativ offen in G ist.

9.5 Aufgabe

Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die eine offene Menge M in eine Menge $f(M)$ abbildet, die nicht offen ist.

9.6 Aufgabe

Gegeben sei eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, die eine Lipschitz-Bedingung erfüllt.

1) Man zeige, dass f stetig ist.

2) Ist auch die umgekehrte Implikation gültig?

9.7 ⋆ Aufgabe

Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig. Man zeige, dass die Fixpunktgleichung $f(x) = x$ eine Lösung $x \in [a, b]$ besitzt.

9.8 Aufgabe

Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitzkonstante $L < 1$. Man zeige:

1) Die Fixpunktgleichung
$$f(x) = x$$
hat genau eine Lösung $x \in [a, b]$.

2) Sei $x_0 \in [a, b]$ beliebig gewählt. Man zeige: Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die durch die Vorschift
$$x_{k+1} = f(x_k)$$
gebildet wird, konvergiert gegen x, und es gilt:
$$|x_k - x| \leq \frac{|x_{k+1} - x_k|}{1 - L} \leq \frac{L^k}{1 - L}|x_1 - x_0|.$$

Hinweis: Man zeige zunächst die Beziehungen
$$\forall \xi, \eta \in [a, b] : \quad |\xi - \eta| \leq \frac{1}{1 - L}(|\xi - f(\xi)| + |\eta - f(\eta)|)$$
und
$$|x_{k+1} - x_k| \leq L^k |x_1 - x_0|.$$
Damit kann man zeigen, dass$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Die Eindeutigkeit des Fixpunktes und die Abschätzung in Punkt 2) sind einfache Konsequenzen dieser beiden Abschätzungen.

9.9 ⋆ Aufgabe

Man beweise den folgenden Satz: Sei $-\infty < a < b < \infty$.
Eine in einem Intervall $[a, b]$ stetige und injektive Funktion ist streng monoton.
Hinweis: Man führe die Annahme $a < c < b$, $f(a) \leq f(c)$, $f(c) \geq f(b)$ zum Widerspruch.

Die mit ⋆ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 15.12.04 in der Vorlesung ab.

Analysis I – WS 2004-2005

Prof. H.-Ch. Grunau, E. Sassone

10 12.01.2005

10.1 ⋆ Aufgabe

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{R}^m$ sei stetig. Man zeige: Dann ist $f(G)$ wegweise zusammenhängend, d.h. zu je zwei Punkten $x_0, x_1 \in f(G)$ gibt es einen Weg in $f(G)$ von x_0 nach x_1.

10.2 Aufgabe

Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei stetig, und es gelte $f(0) = f(1)$. Man zeige: Dann existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $x \in [0, 1 - \frac{1}{k}]$ mit $f(x) = f(x + \frac{1}{k})$.

10.3 Aufgabe

Gegeben seien eine irrationale Zahl $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$. Man zeige, dass eine Folge von rationalen Zahlen $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ existiert, die gegen s konvergiert, und dass eine Folge von irrationalen Zahlen $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ existiert, die gegen q konvergiert.

10.4 Aufgabe

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ relativ prim}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Man bestimme, in welchen Punkten f stetig ist.

10.5 ⋆ Aufgabe

Sei $(V, \|\,.\,\|)$ ein Banachraum, $A \subset V$ eine abgeschlossene Teilmenge. Sei $F : A \to A$ Lipschitz-stetig mit einer Konstanten $L < 1$, so dass für alle $x, y \in A$ gilt: $\|F(x) - F(y)\| \le L\|x - y\|$. Man zeige, dass F einen Fixpunkt besitzt, d.h. dass ein $\xi \in A$ existiert mit $F(\xi) = \xi$.
Hinweis. Man wähle $x_0 \in A$ beliebig und definiere rekursiv $x_{k+1} := F(x_k)$. Man zeige, dass

$$\|x_{k+\ell} - x_k\| = \left\| \sum_{j=0}^{\ell-1} x_{k+j+1} - x_{k+j} \right\| \le \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\|.$$

10.6 ⋆ Aufgabe

Sei $a > 0$ beliebig.

a) Man zeige, dass für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\log(a^x) = x \log a$.

b) Man zeige, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $(a^x)^y = a^{(xy)}$.

c) Der Logarithmus $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei als Umkehrfunktion von $\mathbb{R} \to (0, \infty)$, $\quad x \mapsto a^x$ definiert. Man zeige, dass für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt: $\log_a(y) = \frac{\log(y)}{\log(a)}$.

10.7 $\star$ Aufgabe

Man bestimme, in welchen Punkten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x - \sin x|$ differenzierbar ist und bestimme ggfs. die Ableitung.

10.8 $\star$ Aufgabe

Benutzen Sie die Ableitung des Logarithmus im Punkte 1, um nun einen wesentlich eleganteren Beweis für

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e$$

zu geben.

10.9 $\star$ Aufgabe

Berechnen Sie die Ableitungen von $\sqrt{} : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $\arccos : (-1,1) \to (0,\pi)$ und $\arcsin : (-1,1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ als die der Umkehrfunktionen der Quadrat-, Kosinus- bzw. Sinusfunktion.

10.10 Aufgabe

Man zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0, \end{cases}$$

beliebig oft stetig differenzierbar ist.

10.11 Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Man beweise:

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}, \qquad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} = 0, \qquad \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}.$$

Hinweis. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 19.01.05 in der Vorlesung ab.]

Analysis I – WS 2004-2005

Prof. H.-Ch. Grunau, E. Sassone

11 19.01.2005

11.1 ⋆ Aufgabe

Man zeige, dass die Ableitung $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$ ist.

11.2 ⋆ Aufgabe

Es seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar und $g(x_0) \neq 0$. Man zeige, dass $g(x) \neq 0$ in einer Umgebung von x_0, dass $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar ist und dass gilt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

11.3 Aufgabe

Die Funktionen f, g seien im Intervall (a,b) differenzierbar und es sei $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $k(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Man zeige:

1) Die Funktionen h, k sind in allen Punkten $c \in (a,b)$ mit $f(c) \neq g(c)$ differenzierbar; in den Punkten c mit $f(c) = g(c)$ genau dann, wenn $f'(c) = g'(c)$ ist.
2) Die Funktion $x \mapsto |f(x)|$ ist in $c \in (a,b)$ differenzierbar, wenn $f(c) \neq 0$ ist; im Fall $f(c) = 0$ genau dann, wenn $f'(c) = 0$ ist.

11.4 Aufgabe

Gegeben sei ein offenes Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Es sei $f \in C^2(J)$, $a \in J$ und $f''(a) \neq 0$. Man zeige: Für kleine Werte von $|h|$ (mit $a + h \in J$) gibt es genau ein $\theta = \theta(h) \in (0,1)$ mit

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a + \theta h)$$

11.5 Aufgabe – Regel von Bernoulli–de L'Hospital

Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ seien in einer Umgebung $U(x_0)$ von $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Ferner seien $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und $g'(x_0) \neq 0$ in $U(x_0)$. Man zeige, dass dann der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

11.6 Aufgabe

Man bestimme die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x + x^2) - x}{x^2}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{\sin(x^2)}.$$

11.7 ⋆ Aufgabe – Konvexitätstest mit Tangentenkriterium

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einem offenen Intervall I. Man beweise die folgenden Aussagen:

1) f ist genau dann konvex auf I, wenn für alle $a \in I$ die Tangente τ_a eine Stützgerade ist, d.h. unterhalb des Graphen von f liegt; d.h. für alle $a \in I$, $x \in I$ gilt die Ungleichung

$$f(x) \geq \tau_a(x) = f(a) + f'(a)(x - a). \qquad (*)$$

2) f ist genau dann streng konvex, wenn für alle $a \in I$, $x \in I \setminus \{a\}$ die strikte Ungleichung, d.h. $(*)$ mit „$>$“ gilt.

Hinweis: Man benutze die Eingenschaft konvexer Funktionen

$$\frac{f(a) - f(x_1)}{a - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a} \quad \text{für alle } x_1, x_2, a \in I \text{ mit } x_1 < a < x_2.$$

11.8 ⋆ Aufgabe – Jensensche Ungleichung

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Für je k Punkte $x_1, ..., x_k \in I$ und k positive Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_k > 0$ mit $\lambda_1 + ... + \lambda_k = 1$ gilt dann die Ungleichung

$$f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_k x_k) \leq \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_k f(x_k).$$

Ist f streng konvex, so besteht Gleichheit genau dann, wenn alle x_i gleich sind.

11.9 ⋆ Aufgabe

Man zeige, dass für alle $x_1, ..., x_k > 0$ und alle $\lambda_1, ..., \lambda_k > 0$ mit $\lambda_1 + ... + \lambda_k = 1$ die Ungleichung

$$\log(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_k x_k) \geq \lambda_1 \log(x_1) + ... + \lambda_k \log(x_k)$$

gilt.

11.10 Aufgabe

Es sei $f_k(x) = 0$ für $-1 \leq x \leq 0$ und $f_k(x) = x^{1+\frac{1}{k}}$ für $0 < x \leq 1$.

1) Man zeige, dass die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ im Intervall $[-1, 1]$ gleichmässig konvergiert und man bestimme die Grenzfunktion f.

2) Man zeige, dass die Funktionen f_k in $[-1, 1]$ differenzierbar sind und dass die Folge $(f'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $[-1, 1]$ punktweise konvergiert. Man bestimme die Grenzfunktion g der Ableitungen.

[Die mit ⋆ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 26.01.05 in der Vorlesung ab.]

Analysis I – WS 2004-2005

Prof. H.-Ch. Grunau, E. Sassone

12 26.01.2005

12.1 ⋆ Aufgabe

Man berechne die Ableitung f' der Funktion f (und gebe an, wo sie nicht existiert):

1) $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)\sqrt{|x|}$;

2) $f(x) = \log\left(\frac{\sqrt{1+2x}-1}{\sqrt{1+2x}+1}\right) \quad (x > 0)$;

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } x = 0, \\ \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{e^x - 1} & \text{für } 0 < |x| < \frac{1}{2}; \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, \\ \arctan\left(x + \frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$

12.2 ⋆ Aufgabe

Man beweise, dass auf dem reellen Vektorraum

$$C^1([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad f \text{ stetig differenzierbar } \}$$

durch

$$\|f\|_{C^1([a,b])} = \|f\|_{C^0([a,b])} + \|f'\|_{C^0([a,b])}$$

eine Norm gegeben wird.

12.3 ⋆ Aufgabe

Man beweise, dass die Folge von Funktionen

$$f_k : [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_k(x) = kx(1-x^2)^k$$

punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen Null konvergiert.

12.4 Aufgabe

Gegeben sei die Teleskopreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1}\right) =: \lim_{K\to\infty} S_K(x).$$

Man beweise, dass

1) die Reihe in $[-1,1]$ gleichmäßig gegen $x \mapsto x$ konvergiert;

2) aber $\left(\frac{d}{dx} S_K(x)\right)_{K\in\mathbb{N}}$ nicht in ganz $[-1,1]$ gegen $\frac{d}{dx}x = 1$ konvergiert.

12.5 Aufgabe

Man berechne $\limsup\limits_{k\to\infty} \sin(k)$.
Hinweis: Aufgabe 10.3.

12.6 $\star$ Aufgabe

Man berechne die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (\sin k) x^k$;

2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{2}{k}\right)}\right)} x^k$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (1 + 3(-1)^k)^{-k} x^k$.

12.7 $\star$ Aufgabe

Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Es existiere

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \rho < \infty.$$

Man zeige, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe dann gleich ρ ist.

Zweite Klausur: Freitag, den 04.02.2005, 15-17 Uhr in G 05, Hörsaal 4.
Keine Hilfsmittel! Keine Taschenrechner!
Bitte bringen Sie Papier und Schreibmaterial mit.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 02.02.05 in der Vorlesung ab.]

Analysis I – WS 2004-2005

Prof. H.-Ch. Grunau, E. Sassone

13 02.02.2005 - Angebot für die vorlesungsfreie Zeit

Im Folgenden sei stets $-\infty < a < b < \infty$.

13.1 Aufgabe

Sei $\alpha > 0$ fest. Man betrachte die Funktionenfolge

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_k(x) = k^\alpha x \exp(-kx^2).$$

Konvergiert die Funktionenfolge punktweise? Man bestimme ggfs. den punktweisen Limes. Für welche Werte von α hat man gleichmäßige Konvergenz.

13.2 Aufgabe

Diskutieren Sie das Konvergenzverhalten der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{k!} x^k$$

für reelles x.

13.3 Aufgabe

Man konstruiere eine Funktion auf einem beschränkten Intervall, die stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

13.4 Aufgabe

Die Funktion f sei auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Man zeige, dass f höchstens wie eine lineare Funktion wächst, das heißt, dass eine Konstante $L > 0$ existiert, so dass $|f(x)| \leq L(1 + |x|)$ in $\mathbb{R}$ gilt.

13.5 Aufgabe

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ relativ prim}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Man entscheide, ob die Funktion f im Intervall $[0, 1]$ Riemann-integrierbar ist.

13.6 Aufgabe

Gegeben sei eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Man zeige, dass bezüglich einer beliebigen Zerlegung Z von $[a, b]$

$$S_*(f, Z) = -S^*(-f, Z)$$

gilt und folgere daraus:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = -\overline{\int_a^b} (-f(x))\, dx.$$

13.7 Aufgabe

Gegeben seien zwei beschränkte Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Man zeige, dass

$$\overline{\int_a^b} (f+g)(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \overline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

Man benutze die vorhergehende Aufgabe, um daraus zu folgern:

$$\underline{\int_a^b} (f+g)(x)\,dx \geq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

Falls f und g Riemann-integrierbar sind, folgere man daraus

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

13.8 Aufgabe

Es sei $a < c < b$ und die Funktion f sei in $[a,b]$ beschränkt. Man zeige, dass die Relation

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

gültig ist.

13.9 Aufgabe

Seien $f(x) = \frac{1}{x}$ und $\varepsilon > 0$.

1) ist $f(x)$ in $[\varepsilon, 1]$ intergrierbar?
2) Sei $k \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon = \frac{1}{k}$. Man zerlege

$$\left[\frac{1}{k}, 1\right] = \bigcup_{h=1}^{k-1} \left[\frac{1}{h+1}, \frac{1}{h}\right]$$

und gebe eine Formel für die Untersumme $S_*(Z_k, f)$ bezüglich der Zerlegung Z_k an.

3) Was läßt sich aus dem Verhalten der Untersummen für

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 f(x)\,dx$$

folgern?

13.10 Aufgabe

Sie $n \in \mathbb{N}$ fest. Man entscheide durch Betrachtung von Ober– und Untersummen, ob $x \mapsto x^n$ auf $[0,1]$ integrierbar ist und bestimme ggfs. $\int_0^1 x^n\,dx$.

Hinweis. Man verwende für $k \in \mathbb{N}$ die Zerlegungen $x_0 = 0, x_j = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k^2 - j} \quad (j = 1, \ldots, k^2)$.

Zweite Klausur: Freitag, den 04.02.2005, 15-17 Uhr
in G 05, Hörsaal 4.
Keine Hilfsmittel! Keine Taschenrechner!
Bitte bringen Sie Papier und Schreibmaterial mit.

Analysis I – WS 2004-2005

1. Klausur, 17.12.2004, Ohne Hilfsmittel

Prof. H.-Ch. Grunau, E. Sassone

Versehen Sie bitte zunächst dieses Blatt leserlich mit den erfragten Daten.

Bearbeiten Sie bitte jede Aufgabe auf einem separaten Blatt Papier, das Sie leserlich mit Ihrem Namen, Vornamen und Geburtsdatum versehen. Nach der Klausur geben Sie dieses Aufgabenblatt und Ihre Lösungen nach Aufgaben sortiert ab.

Name .... Vorname ....

Geb.-datum..................... Matrikelnr. ....

Studiengang ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
erreichte Punkte								

Jede Aufgabe wird mit bis zu 6 Punkten bewertet. Bitte begründen Sie Ihre Lösungen vollständig. Mit mindestens 18 Punkten ist die Klausur sicher bestanden.

1 Aufgabe

Sei $(V, \|\,.\|)$ ein normierter Vektorraum.

1) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in V. Man gebe die Definition für Konvergenz der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

2) Sei $G \subset V$, $(W, \|\,.\|)$ ein weiterer normierter Vektorraum, $f : G \to W$ eine Abbildung, $x_0 \in G$. Man gebe die Definition für Stetigkeit von f in x_0.

3) Man gebe die Definition für Vollständigkeit des normierten Vektorraums $(V, \|\,.\|)$. Nennen Sie mindestens ein Beispiel für einen normierten vollständigen Vektorraum.

2 Aufgabe

Sei $(V, \|\,.\|)$ ein normierter Vektorraum, $K \subset V$.

1) Geben Sie die Definition für (Folgen-) Kompaktheit von K.

2) Im Falle $V = \mathbb{R}^n$ gibt es eine einfache Charakterisierung der (Folgen-) Kompaktheit von K mittels zweier anderer wesentlich elementarerer Eigenschaften. Formulieren Sie diese!

3) Sei K (folgen-) kompakt, $f : K \to \mathbb{R}$ sei stetig. Formulieren Sie einen besonders wichtigen Satz für derartige Funktionen: Stetige reellwertige Funktionen auf kompakten Mengen ....

3 Aufgabe

Man zeige mit Hilfe von vollständiger Induktion, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{2k} \frac{(-1)^{j+1}}{j} = \sum_{j=k+1}^{2k} \frac{1}{j}.$$

4 Aufgabe

Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2}, \\ a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k}. \end{cases}$$

Man zeige zunächst durch vollständige Induktion, dass $0 \leq a_k \leq 2$. Beweisen Sie dann: Diese Folge ist monoton und beschränkt, also konvergent. Berechnen Sie ihren Grenzwert.

5 Aufgabe

Man entscheide und begründe, welche der folgenden Reihen konvergent sind:

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(3 + \frac{1}{k}\right)^k$;

2) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-3)^{\nu}$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$.

6 Aufgabe

Man beweise, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1.$$

7 Aufgabe

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^{12+e^{-x}}.$$

Ist diese Funktion

1) stetig?

2) monoton fallend? monoton wachsend?

3) injektiv? surjektiv?

Begründen Sie Ihre Antworten bitte sorgfältig.

Analysis I – WS 2004-2005

2. Klausur, 04.02.2005, Ohne Hilfsmittel

Prof. H.-Ch. Grunau, E. Sassone

Versehen Sie bitte zunächst dieses Blatt leserlich mit den erfragten Daten.

Bearbeiten Sie bitte jede Aufgabe auf einem separaten Blatt Papier, das Sie leserlich mit Ihrem Namen, Vornamen und Geburtsdatum versehen. Nach der Klausur geben Sie dieses Aufgabenblatt und Ihre Lösungen nach Aufgaben sortiert ab.

Name .... Vorname ....

Geb.-datum..................... Matrikelnr. ....

Studiengang ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
erreichte Punkte								

Jede Aufgabe wird mit bis zu 6 Punkten bewertet. Bitte begründen Sie Ihre Lösungen vollständig. Mit mindestens 18 Punkten ist die Klausur sicher bestanden.

1 Aufgabe

Sei $-\infty < a < b < \infty$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

1) Man gebe die Definition für Differenzierbarkeit der Funktion f in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$.

2) Man gebe die Definition für das Vorliegen eines lokalen Extremums von f in einem Punkt $x_1 \in (a, b)$. Nennen Sie ein notwendiges Kriterium für das Vorliegen eines lokalen Extremums in x_1 unter der Voraussetzung, dass f in x_1 differenzierbar ist.

3) Man formuliere den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

2 Aufgabe

Gegeben seien eine kompakte Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_k : A \to \mathbb{C}$.

1) Man gebe die Definition für punktweise Konvergenz der Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen eine Funktion $f : A \to \mathbb{C}$.

2) Geben Sie die Definition für gleichmäßige Konvergenz der Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen eine Funktion $f : A \to \mathbb{C}$.

3) Die $f_k : A \to \mathbb{C}$ seien stetig auf A und gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion $f : A \to \mathbb{C}$. Was kann man über f aussagen? (Ohne Beweis!)

3 Aufgabe

Gegeben sei die Funktion

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^{-\sin(x)} - \frac{2(e^{-1}-1)}{\pi}x - 1.$$

Man zeige, dass ein Punkt $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ existiert, so dass $f'(\xi) = 0$.
Man zeige, dass f in ξ ein Minimum hat.

4 Aufgabe

Untersuchen Sie die folgende Funktion in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und stetige Differenzierbarkeit:

$$f : (-\infty, 2] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} e^x & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x = 0, \\ x+1 & \text{für } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1, \\ \sin(x-1)+2 & \text{für } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

5 Aufgabe

Seien $f : \left(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) \to \mathbb{R}$ und $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert gemäß

1) $f(x) = \frac{1}{\tan(x^2)}$;

2) $g(x) = \log(2e^{-2x} + 2x + 2)$.

Man bestimme deren erste und zweite Ableitungen.

6 Aufgabe

Gegeben sei die Folge von Funktionen

$$f_k : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_k(x) = \begin{cases} kx & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{k}, \\ 2 - kx & \text{für } \frac{1}{k} < x \leq \frac{2}{k}, \\ 0 & \text{für } \frac{2}{k} < x \leq 1. \end{cases}$$

Man zeige, dass die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert.

7 Aufgabe

Man bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$;

2) $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \left(\frac{6}{(-1)^k+7}\right)^k x^{4k-1}$.