Analysis II
SS 2005

Prof. H.-Ch. Grunau
E. Sassone

1 06.04.2005

1.1 ⋆ Aufgabe

Man beweise den erweiterten Mittelwertsatz:
Gegeben seien die Riemann-integrierbaren Funktionen $f, p : [a, b] \to \mathbb{R}$. Es gelte $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$, und die Funktion p sei nichtnegativ: $\forall x \in [a, b]: \; p(x) \geq 0$. Dann ist

$$m \int_a^b p(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)p(x)\, dx \leq M \int_a^b p(x)\, dx.$$

Bei stetigem f gibt es also ein $\xi \in [a, b]$ mit $\int_a^b f(x)p(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b p(x)\, dx$.

1.2 Aufgabe

Sei $-\infty < a < b < \infty$, $f : [a, b] \to [0, \infty)$ eine stetige, nichtnegative Funktion. Es gebe ein $x_0 \in [a, b]$ so, dass $f(x_0) > 0$. Man zeige, dass dann

$$\int_a^b f(x)\, dx > 0.$$

Definition

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion. Seien $g = \operatorname{Re} f$ und $h = \operatorname{Im} f$ über $[a, b]$ integrierbar, so definiert man f als integrierbar und setzt

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b (g(x) + ih(x))\, dx := \int_a^b g(x)\, dx + i \int_a^b h(x)\, dx.$$

1.3 ⋆ Aufgabe

Mit Hilfe der reellen Integration und der Gleichung $e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$ beweise man, dass

$$\int_a^b e^{it}\, dt = -ie^{ib} + ie^{ia}.$$

1.4 ⋆ Aufgabe

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $x \in [a, b]$. Man zeige, dass

$$\int_a^x \left(\int_a^y f(\xi)\, d\xi \right) dy = \int_a^x (x - y) f(y)\, dy.$$

Hinweis: Partielle Integration.

1.5 ⋆ Aufgabe

Man berechne $\int_a^b xe^x\, dx$, $\int_a^b x^2 e^x\, dx$ und man formuliere eine rekursive Formel für $\int_a^b x^n e^x\, dx$, $n \in \mathbb{N}$.

1.6 $\star$ Aufgabe

Seien $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ stetig, mit $\alpha \le \varphi(x) \le \psi(x) \le \beta$ für alle $x \in [a,b]$. Man zeige, dass

$$F(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(\xi)\, d\xi$$

in $[a,b]$ differenzierbar ist und berechne die Ableitung.

1.7 Aufgabe

1) Man berechne, für $k, \ell \in \mathbb{Z}$:

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(\ell x)\, dx, \qquad \int_0^{2\pi} \sin(kx)\cos(\ell x)\, dx, \qquad \int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(\ell x)\, dx.$$

2) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *periodisch mit Periode* ω, falls $f(x+\omega) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass für eine solche periodische Funktion f, die Riemann-integrierbar auf dem Intervall $[0,\omega]$ ist, für alle $a, b \in \mathbb{R}$ auch $f|_{[a,b]}$ Riemann-integrierbar ist und dass

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{a+\omega}^{b+\omega} f(x)\, dx.$$

3) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodisch mit der Periode 2π und Riemann-integrierbar. Seien

$$a_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\, dx, \qquad b_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\, dx$$

für $k = 0, 1, 2....$ Diese Zahlen a_k, b_k heißen die *Fourierkoeffizienten von* f. Man zeige: Falls f eine gerade Funktion ist, d.h. $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$b_k = 0, \qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\, dx.$$

Falls f ungerade ist, d.h. $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$a_k = 0, \qquad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\, dx.$$

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 13.04.05 in der Vorlesung ab.]

Analysis II
SS 2005

Prof. H.-Ch. Grunau
E. Sassone

2 13.04.2005

2.1 Aufgabe

Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale:

1) $\star$ $\displaystyle\int \frac{6x^3+13x^2+4x+3}{6x^2+13x+5}\,dx$.

2) $\star$ $\displaystyle\int \frac{-x^3-x^2+6x-2}{x^4-2x^3+2x-1}\,dx.$

Ansatz: $\displaystyle\frac{-x^3-x^2+6x-2}{x^4-2x^3+2x-1} = \frac{a}{(x-1)^3}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x-1}+\frac{d}{x+1}.$

3) $\star$ $\displaystyle\int \frac{3x^3-2x^2+x+1}{(x^2+2x+2)^2}\,dx.$

4) $\star$ $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx.$

Hinweis: Man ersetze $x=\varphi(t):=\sinh(t):=\frac{1}{2}\left(e^t-e^{-t}\right)$. Man berechne $1+\sinh^2(t)$, $\dfrac{d}{dt}\sinh(t)$, $\dfrac{d}{dt}\cosh(t)$. Man zeige, dass $\sinh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bijektiv ist; die Umkehrfunktion heißt asinh. Man zeige, dass

$$\forall x\in\mathbb{R}:\qquad \operatorname{asinh}(x)=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$$

5) $\displaystyle\int \sin^k(x)\,dx,\ k\in\mathbb{N}_0.$

6) $\displaystyle\int \frac{3-4\cos(x)}{2\sin(x)-2}\,dx.$

Hinweis: Man ersetze $x=\varphi(t)$, $t=\varphi^{-1}(x):=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $\cos(x)=\dfrac{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$, $\sin(x)=\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

2.2 $\star$ Aufgabe

Für welche $k\in\mathbb{N}$ existiert $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{1}{x(\log x)^k}\,dx$ bzw. $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{1}{x(\log x)^k}\,dx$ als uneigentliches Riemann-Integral? Bestimmen Sie ggfs. die Integralwerte.

2.3 $\star$ Aufgabe

Gegeben sei die Funktion $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ und es existiere ein $c\in(a,b)$, so dass sowohl $f|_{(a,c]}$ als auch $f_{[c,b)}$ uneigentlich Riemann-integrierbar sind.

Man zeige, dass für alle $\gamma \in (a,b)$ sowohl $f|_{(a,\gamma]}$ als auch $f_{[\gamma,b)}$ uneigentlich Riemann-integrierbar sind und dass gilt:

$$\int_a^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

2.4 Aufgabe

Entwickeln Sie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2x+2}$ in eine Taylorreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = -1$. Bestimmen Sie deren Konvergenzradius.

2.5 $\star$ Aufgabe

Man bestimme das Taylorpolynome zehnter Ordnung mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ von $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan(x)$. Schätzen Sie für $x \in [-1/2, 1/2]$ das Restglied ab.
Bemerkung: Sie sollen die erforderlichen Ableitungen mit Hilfe von maple berechnen. Sie können hierfür einen Ausdruck Ihrer Berechnungen beilegen.

2.6 Aufgabe

Man beweise die Ungleichungen

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{x^k}{k!} < e^x$ für $x \neq 0$,

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k > \log(1+x)$ für $x > -1$, $x \neq 0$.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 20.04.05 in der Vorlesung ab.]

Analysis II
SS 2005

Prof. H.-Ch. Grunau
E. Sassone

3 20.04.2005

3.1 ⋆ Aufgabe

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Man zeige, dass f beliebig oft differenzierbar ist und dass gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \qquad f^{(k)}(0) = 0.$$

Also ist die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt 0 in ganz $\mathbb{R}$ konvergent

$$\forall x \in \mathbb{R} : \qquad T(x, 0) = 0$$

und für $x > 0$ von $f(x)$ verschieden.
Hinweis. Man zeige induktiv, dass es Polynome P_k vom Grade $\leq 2k$ gibt, so dass für $x > 0$ gilt: $f^{(k)}(x) = \exp(-1/x)P_k(1/x)$.

3.2 ⋆ Aufgabe

Man konstruiere zu zwei beliebigen reellen Zahlen a, b mit $a < b$ eine Funktion $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit den Eigenschaften

$$\begin{array}{ll} g(x) = 0 & \text{für } x \leq a, \\ g(x) = 1 & \text{für } x \geq b, \\ \multicolumn{2}{l}{g \text{ monoton wachsend.}} \end{array}$$

Hinweis. Man betrachte eine Stammfunktion zu $h(x) = f(x - a)f(b - x)$, wobei f die Funktion von Aufgabe 3.1 ist.

3.3 ⋆ Aufgabe

Es seien a, b mit $a < b$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Man konstruiere eine Funktion $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, welche =1 in $[a, b]$ und =0 außerhalb $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ ist und der Ungleichung $0 \leq h(x) \leq 1$ genügt.
Hinweis. Man benutze Aufgabe 3.2.

3.4 Aufgabe

Es sei $f \in C^n([a, b])$, $n \in \mathbb{N}$. Man konstruiere eine Fortsetzung g von f auf $\mathbb{R}$ von der Klasse $C^n(\mathbb{R})$. Zusätzlich wird verlangt, dass g außerhalb des Intervalls $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$, ($\varepsilon > 0$ vorgegeben) verschwindet.
Hinweis. Zur Fortsetzung kann man zunächst die Taylorpolynome $T_n(x; a)$ bzw. $T_n(x; b)$ benutzen und dann mit einer geeigneten Funktion multiplizieren.

3.5 Aufgabe

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine glatte reguläre Kurve, weiter sei $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}$ stetig. Gegeben sei $\omega : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ eine Umparametrisierung der Kurve $\gamma|_{[a,b]}$. Man zeige, dass

$$\int_\gamma f(x)\,ds(x) = \int_\omega f(x)\,ds(x).$$

3.6 ⋆ Aufgabe

Bestimmen Sie für $x \in (-1,1)$ die konvergente Potenzreihe derart, dass dort

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \arcsin(x)$$

gilt.
Hinweis. Betrachten Sie die Ableitung von arcsin und die binomische Reihe.

3.7 Aufgabe

Man berechne für festes $a > 0$ die Länge der Astroide

$$x = a\cos^3(t), \quad y = a\sin^3(t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

3.8 ⋆ Aufgabe

Man berechne die Länge der Zykloide

$$x = t - \sin(t), \quad y = 1 - \cos(t), \quad 0 \le t \le 4\pi.$$

3.9 Aufgabe

Man berechne die Länge der Kurve

$$y = \cosh(x), \quad x \in [0,a];\ a \in \mathbb{R}_+.$$

[Die mit ⋆ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 27.04.05 in der Vorlesung ab.]

Analysis II
SS 2005

Prof. H.-Ch. Grunau
E. Sassone

4 27.04.2005

4.1 Aufgabe

Gegeben sei eine glatte reguläre Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ der Länge L. Für $t \in [a, b]$ sei

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| \, d\tau.$$

(1) Man beweise, dass die Abbildung $s : [a, b] \to [0, L]$ differenzierbar und invertierbar ist und man bestimme die Ableitung der inversen Funktion $t = t(s)$.

Der Parameter s heißt *Bogenlänge* von γ.

(2) Man zeige, dass die durch $s \mapsto \alpha(s) := \gamma(t(s))$ beschriebene Kurve durch die Bogenlänge parametrisiert ist, d.h. dass für $\ell \in [0, L]$ gilt:

$$\ell = \int_0^\ell \|\alpha'(s)\| \, ds.$$

Definition

Gegeben sei eine glatte reguläre *ebene* Kurve $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $\phi : t \mapsto \phi(t) = (x(t), y(t))$, die mittels ψ durch die Bogenlänge s parametrisiert wird, d.h. $\phi(t(s)) =: \psi(s)$. Dann ist $\tau(s) = \psi'(s)$ ein Tangenteneinheitsvektor an den Kurvenpunkt $\psi(s)$; $\nu(s)$ sei normiert ($\|\nu(s)\| = 1$) und orthogonal zu $\tau(s)$ so gewählt, dass $\det(\tau(s), \nu(s)) = 1$, d.h. dass $(\tau(s), \nu(s))$ ein positiv orientiertes Orthonormalsystem bilden. Wir definieren die *Krümmung* von ϕ im Punkte $\phi(t(s)) = \psi(s)$ durch

$$\kappa = \det(\psi', \psi'') = \frac{1}{s'^3} \det(\phi', \phi'').$$

Unter Berücksichtigung von $\frac{\psi''}{|\psi''|^2} = \frac{\nu}{\kappa}$ erhält man damit die folgenden Werte im Kurvenpunkt $\phi(t)$:

$$\text{Krümmung:} \quad \kappa(t) = \frac{\det(\phi', \phi'')}{|\phi'|^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\text{Krümmungsmittelpunkt:} \quad \mu(t) = \phi(t) + (-y', x')\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} =$$

$$= (x, y) + (-y', x')\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}.$$

4.2 Aufgabe

Wir verwenden die Annahmen und Notationen der vorherigen Definition.
Sei C der im Krümmungmittelpunkt $\mu(t)$ zentrierte Kreis, dessen Radius $\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$ ist. Man zeige, dass C eine Approximation zweiten Grades der Kurve ϕ im Punkt $\phi(t)$ ist.
Hinweis: Man studiere nur den Fall $\phi(0) = (0, 0)$ und $\phi'(0) = (1, 0)$. Man zeige, dass der Kreis im Punkt $(0, 0)$ dasselbe Taylorpolynom vom Grade 2 wie die Kurve C besitzt, beide als Graph über der x-Achse betrachtet.

4.3 $\star$ Aufgabe

Man bestimme die Krümmung und die jeweiligen Krümmungsmittelpunkte der Kurve $t \mapsto (t, t^2)$.

4.4 Aufgabe

Man beweise durch Betrachtung der Definition, dass die Funktion

(a)
$$f(x, y) = |x| \log(1 + y)$$
in $(0, 0)$ differenzierbar ist;

(b)
$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^2(y - 1)}$$
in $(0, 1)$ nicht differenzierbar ist.

4.5 $\star$ Aufgabe

Man berechne die Hessesche Matrix von $f(x, y, z) = x^y(1 + z)$.

4.6 Aufgabe

Es sei $x \in \mathbb{R}^n$, $r = |x|$ und $\Delta = D_1^2 + ... + D_n^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ der Laplace-Operator.

$\star$ (1) Man zeige, dass für rotationssymmetrische Funktionen $u(x) = \phi(|x|)$
$$\Delta u = \phi'' + \frac{n-1}{r}\phi' \quad (r > 0)$$
gilt, falls ϕ zur Klasse C^2 gehört.

Man berechne Δu für die Funktionen

(2) $\phi(r) = r^\alpha$;

(3) $\phi(r) = \frac{1}{r}e^{\alpha r}$;

$\star$ (4) $\phi(r) = \frac{1}{r}\cos(\alpha r)$;

$\star$ (5) $\phi(r) = \frac{1}{r}\sin(\alpha r)$;

wobei $\alpha \neq 0$ ist, und gebe alle Fälle an, in denen u einer Differentialgleichung $\Delta u = \lambda u$ mit einem geeigneten $\lambda \in \mathbb{R}$ genügt.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 04.05.05 in der Vorlesung ab.]

Analysis II
SS 2005

Prof. H.-Ch. Grunau
E. Sassone

5 04.05.2005

5.1 $\star$ Aufgabe

Gegeben seien eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so, dass $A^t A = E$ (Drehung oder Drehspiegelung). Sei $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert gemäß $v(x) := u(Ax)$. Man zeige, dass dann

$$\Delta v(x) = (\Delta u)(Ax);$$

das heißt insbesondere, dass der Laplace-Operator rotationsinvariant ist.

5.2 $\star$ Aufgabe

Sie $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Mit Hilfe der Kettenregel zeige man, dass für $G(r, \varphi) := U(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ die Beziehung

$$U_{xx} = G_{rr} r_x^2 + 2G_{r\varphi} r_x \varphi_x + G_{\varphi\varphi}\varphi_x^2 + G_r r_{xx} + G_\varphi \varphi_{xx}$$

gilt. Mit Hilfe dieser Formel berechne man den Laplace-Operator

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

in Polarkoordinaten, d.h. mit Hilfe der Ableitungen von G.

5.3 Aufgabe

Gegeben sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Es gelte die Wellengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \qquad \text{für } (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Man bestimme die Form der allgemeinen Lösung der Wellengleichung.

Hinweis: Man benutze die Variablentransformation $\begin{cases} \xi = t + x, \\ \eta = t - x, \\ v(\xi, \eta) := u(t, x) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right). \end{cases}$

Man zeige, dass $v(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$ mit geeigneten Funktionen $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ gilt.

5.4 Aufgabe

Welche der folgenden Mengen sind konvex?

1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$,

2) $B = [0, 1]^2 \setminus [0, 1/2)^2$,

3) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1 \land \neg(y = 0 \land x \ge 0)\}$.

5.5 ⋆ Aufgabe

Man zeige, dass der Durchschnitt beliebig vieler konvexer Mengen aus $\mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge in $\mathbb{R}^n$ ist. Beweisen Sie, dass der Abschluss einer konvexen Menge ebenfalls wieder konvex ist.

5.6 ⋆ Aufgabe

Für die reellwertige Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ gelte $\operatorname{grad} f(x) = \lambda(x)x$ mit einer reellwertigen Funktion λ. Man zeige, dass f nur von $r = |x|$ abhängt, d.h. auf jeder Sphäre $S_r := \{x, |x| = r\}$ konstant ist.
Hinweis: Man zeige zuerst, dass man zwei Punkte $a, b \in S_r$ durch eine C^1-Funktion $\phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ mit $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$, $|\phi(t)| = r$ verbinden kann (durch eine orthogonale Transformation lassen sich a, b in die (x_1, x_2)-Ebene bringen) und betrachte dann die Funktion $f(\phi(t))$.

5.7 Aufgabe

Man entscheide (begründet), welche der folgenden Vektorfelder Gradientenfelder sind:

(1) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy + z^2 \\ x^2 + 2yz \\ 2xz + y^2 \end{pmatrix};$

(2) $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad G(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x\sin(y^3) - z^2 \\ 3x^2y^2\cos(y^3) + ze^{yz} \\ -2xz + ye^{yz} \end{pmatrix};$

(3) ⋆ $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3\log(y^2+1)z \\ \frac{12xyz}{y^2+1} \\ \frac{3}{2}\log(y^2+1)x^2 \end{pmatrix}.$

[Die mit ⋆ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 11.05.05 in der Vorlesung ab.]

Analysis II
SS 2005

Prof. H.-Ch. Grunau
E. Sassone

6 11.05.2005

6.1 ⋆ Aufgabe

Man bestimme alle lokalen und Rand–Maxima und Minima von $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) - \sin(x - y)$ in $W = [-\pi, \pi]^2$.

6.2 ⋆ Aufgabe

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $\tilde{x} \in G$ ein lokales Maximum von f. Man zeige, dass dann $\operatorname{Hess} f(\tilde{x})$ negativ semidefinit ist.
Hinweis: Indirekter Beweis mit Taylorreihe. Dazu zeige man, dass aus $a^T \operatorname{Hess} f(x)a > 0$ für ein $a \in \mathbb{R}^n$ folgt, dass ein $\lambda > 0$ unabhängig von der Länge von a existiert, so dass $a^T \operatorname{Hess} f(x)a > \lambda \|a\|^2$.

6.3 Aufgabe

Gegeben seien ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

(1) Man zeige: Falls $-\Delta u < 0$ in Ω gilt, dann besitzt u kein lokales Maximum in Ω. Insbesondere gilt:
$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

(2) Nun gelte lediglich $-\Delta u \leq 0$ in Ω. Zeigen Sie, dass auch unter dieser Voraussetzung gilt:
$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

Hinweis. Betrachten Sie für geeignetes R und $\varepsilon > 0$ die Funktionen $u_\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon(R^2 - |x|^2)$.

6.4 ⋆ Aufgabe

Gegeben seien die Funktionen
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = e^x - 2xe^y z^2 + 2z^2 + y^2,$$
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x, y) = \sin(\log(x^4 + 4)y) - (y^2 + 1)^{\cos(x)+1}.$$
Man bestimme alle lokalen Extrema von f und g.
Hinweis: Sie sollen mit Hilfe von Maple arbeiten. Sie können hierfür einen Ausdruck der Berechnungen beilegen.
Die folgenden Kommandos sind in maple 9 verfügbar und hilfreich:
```
with(VectorCalculus):
with(LinearAlgebra):
with(linalg);
```
dann stehen die Kommandos
```
Hessian
grad
```

`solve`
zur Verfügung. Um den online-Help-Browser auzufrufen, gebe man die Anweisung
`?;`
und z.B.
`?grad`
um die Erklärung der Anweisung zur Berechnung des Gradienten zu bekommen.
In älteren maple-Versionen müssen Sie den Gradienten und die Hessesche Matrix per Hand und mit Hilfe der Befehle `diff(f(x,y),x)`, `diff(f(x,y),x,y)` etc. zusammenstellen. In jedem Falle ist der Befehl `eigenvalues(A)` sehr hilfreich.

6.5 $\star$ Aufgabe

Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$. Man zeige, dass

$$\|A \circ B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Hinweis: Das Beweis erfolgt wie für $\|A \cdot \xi\| \leq \|A\| \cdot \|\xi\|$ mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Definition

Eine Teilmenge A eines Funktionenraumes B heißt konvex, falls mit je zwei Funktionen $a, b \in A$ auch die Gesamtheit der Funktionen $\lambda a + (1-\lambda)b, \lambda \in [0,1]$ in A liegt.

6.6 Aufgabe

Sei $A \subset C^0([a,b])$ so, dass $A = \{f \in C^0([a,b]) : \|f\|_{C^0([a,b])} \leq 1\}$. Man zeige dass A konvex ist. Ist A in $C^0([a,b])$ auch abgeschlossen?

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 25.05.05 in der Vorlesung ab.]

Analysis II
SS 2005

Prof. H.-Ch. Grunau
E. Sassone

7 25.05.2005

Definition

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f : G \to \mathbb{R}$. Wir nennen f konvex genau dann, falls für je zwei Punkte $x_0, x_1 \in G$, $x_0 \neq x_1$ und für $t \in [0,1]$ gilt;

$$f(tx_0 + (1-t)x_1) \leq tf(x_0) + (1-t)f(x_1).$$

7.1 ⋆ Aufgabe

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f : G \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar. Man zeige, dass f genau dann konvex ist, wenn Hess $f(x)$ für alle $x \in G$ positiv semidefinit ist.

7.2 ⋆ Aufgabe

Gegeben seien $G = (-1, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und die Funktion $f : G \to \mathbb{R}$, $f : (x, y, z) \mapsto \log(x+1)\cos(yz)$. Man bestimme das Taylorpolynom zweiter Ordnung mit Entwicklungspunkt $x_0 = (0,0,0)$. Diskutieren Sie das Restglied auf $(-1/2, 1/2) \times (-1,1) \times (-1,1)$. Die erforderlichen Ableitungen dürfen Sie mit Hilfe von maple o.ä. berechnen.

7.3 ⋆ Aufgabe

Gegeben seien eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, ein Punkt $\xi \in U$ und eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$. Es gelte für $x \in U \setminus \{\xi\}$:

$$\langle (x - \xi), \nabla f(x) \rangle > 0 \quad \text{bzw.} \quad < 0.$$

Man zeige, dass f an der Stelle ξ ein lokales Minimum bzw. ein lokales Maximum besitzt.

7.4 ⋆ Aufgabe

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$. Sei $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$.
Erzeugen Sie zunächst (z.B. mit Hilfe von maple) einen Plot von M.
Man bestimme, für welche $(x,y) \in M$ man den Satz von der impliziten Funktion benutzen kann, um M lokal als Graph über der x-Achse bzw. über der y-Achse zu beschreiben. In welchen Punkten nehmen diesen Graphen ihre lokalen Extrema an?

7.5 Aufgabe

Man zeige, dass die Gleichung

$$x^2 + 2x + e^y + y - 2z^3 = 0$$

in einer Umgebung von $P = (-1, 0, 0)$ eine Fläche darstellt, die durch einen stetig differenzierbaren Graphen der Form $y = g(x,z)$ beschrieben wird. Man bestimme die Gleichung der Tangentialebene an diesen Graphen (d.h. an die glatte Fläche) in P.

[Die mit ⋆ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 01.06.05 in der Vorlesung ab.]

Analysis II
SS 2005

Prof. H.-Ch. Grunau
E. Sassone

8 01.06.2005

8.1 Aufgabe

Sei (x_0, y_0, z_0) ein Punkt auf der Einheitssphäre des $\mathbb{R}^3$, d.h.

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1.$$

Man gebe die Gleichung der Tangentialebene in (x_0, y_0, z_0) an.

8.2 ⋆ Aufgabe

Gegeben seien die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f : (x, y, z) \mapsto \sinh(z - 1) - e^x + e^y + xz - y$ und die Niveaumenge $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}$.

1) Man beweise, dass es offene Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(0, 0)$ und $V \subset \mathbb{R}$ von 1 und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to V$ gibt, so dass gilt: $(x, y, z) \in M \cap (U \times V) \iff z = g(x, y)$.

2) Man bestimme das Taylorpolynom zweiter Ordnung von $g(x, y)$ mit Entwicklungspunkt $(0, 0)$. *Hinweis*: Man leite $0 \equiv f(x, y, g(x, y))$ bzgl. x und y ab.

8.3 ⋆ Aufgabe

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z)^2$. Man bestimme die Extrema von f unter der Nebenbedingung $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

8.4 ⋆ Aufgabe

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $h = (h_1, \ldots, h_k) : U \to \mathbb{R}^k$, $1 \leq k < n$ sei stetig differenzierbar; wir betrachten:

$$N := \{x \in U : h(x) = 0\}.$$

Für alle $x \in N$ gelte:

$$\operatorname{Rang} \frac{\partial h}{\partial x}(x) = k.$$

Man beweise, dass $\nabla h_1(x_0), \ldots, \nabla h_k(x_0)$ das Orthogonalkomplement des Tangentialraums an N in $x_0 \in N$ aufspannen.

8.5 Aufgabe

Ein Polynom in $x = (x_1, ..., x_n)$ von der Form

$$P_m(x) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha \quad (a_\alpha \in \mathbb{R})$$

wird auch *Form vom Grad m* genannt. Offenbar ist die Form P_m homogen vom Grad m, $P_m(\lambda x) = \lambda^m P_m(x)$. Wir nennen die Form P_m *positiv definit* bzw. *negativ definit* wenn ein $\lambda_0 > 0$ bzw. $\lambda_0 < 0$ existiert, so dass $P_m(x) \geq \lambda_0 |x|^m$ oder $P_m(x) \leq \lambda_0 |x|^m$ für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Sie heißt *indefinit* wenn es zwei Punkte $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $P_m(a) < 0 < P_m(b)$ gibt. Man zeige:

1) Jede Form $P_m \not\equiv 0$ von ungeradem Grad ist indefinit.

2) Gegeben sei die Funktion $f : B_r(x_0) \to \mathbb{R}$, $f \in C^m(B_r(x_0))$ $(m \geq 2)$; sei $D^\alpha f(x_0) = 0$ für $0 < |\alpha| < m$. Für das zugehörige Taylorpolynom T_m ist dann

$$T_m(x, x_0) - f(x_0) = P_m(x - x_0) \quad \text{mit } a_\alpha = \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!}, \quad |\alpha| = m.$$

Man zeige: Ist die Form P_m positiv definit, bzw. negativ definit bzw. indefinit, so hat f an der Stelle x_0 ein Minimum bzw. ein Maximum bzw. kein Extremum.

8.6 ⋆ Aufgabe

Man bestimme für die folgenden Abbildungen den Bildbereich $V = f(U)$ und die Funktionaldeterminante. Man entscheide, ob die Abbildungen $f : U \to V$ lokale oder globale Diffeomorphismen sind und bestimme die (eventuell lokale) Umkehrabbildung:

1) $U = \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + a, y + b), a, b \in \mathbb{R}$,

2) $U = \mathbb{R}^2, g(x, y) = (x^2 - x - 2, 3y)$.

[Die mit ⋆ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 08.06.05 in der Vorlesung ab.]

Analysis II
SS 2005

Prof. H.-Ch. Grunau
E. Sassone

9 08.06.2005

9.1 $\star$ Aufgabe

Man berechne das Integral
$$\int_0^x t^n e^{-t}\,dt$$
durch Differenzieren des parameterabhängigen Integrals
$$F(y) = \int_0^x e^{-ty}\,dt.$$

9.2 $\star$ Aufgabe

Gegeben sei die Gammafunktion
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt.$$
Man zeige, dass $\Gamma(x) \in C^\infty(0,\infty)$ und
$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty e^{-t} (\log t)^k t^{x-1}\,dt.$$

9.3 $\star$ Aufgabe

Gegeben sei eine nichtnegative stetige Funktion $f : [0,a] \to \mathbb{R}$. Man zeige, dass
$$\int_0^a f(x_1) \int_0^{x_1} f(x_2) ... \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_1\,dx_2\,...\,dx_n = \frac{1}{n!}\left(\int_0^a f(\xi)\,d\xi\right)^n.$$
Hinweis: Induktion und Hauptsatz der Integralrechnung.

9.4 $\star$ Aufgabe

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$ und $f : I \times I \to \mathbb{R}$, $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ eine stetige, nach der zweiten Variable stetig partiell differenzierbare Funktion. Man zeige, dass die durch
$$F(y) = \int_a^y f(x,y)\,dx$$
definierte Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und dass für alle $y \in I$ gilt
$$F'(y) = f(y,y) + \int_a^y f_y(x,y)\,dx.$$
Hinweis: Man beweise, dass die durch
$$G(y,z) = \int_a^z f(x,y)\,dx$$
definierte Funktion $G : I \times I \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar ist und wende die Kettenregel an.

9.5 Aufgabe

Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $f : [0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; man betrachte die eindimensionale Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = f(t,x) & \text{für } t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

(1) Man zeige, dass dieses Problem höchstens eine Lösung besitzt.
Hinweis. Seien u, v Lösungen von (1), man betrachte $w := u - v$. Sei $R > 0$ beliebig, aber fest. Für $0 \leq t < R$ betrachte man

$$e(t) := \int_{-R+t}^{R-t} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial t}(t,x)\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}(t,x)\right)^2 \right) dx$$

und berechne $e'(t)$.

(2) Man zeige, dass die Lösung $u(t,x)$ des Problems (1) gegeben ist durch

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \left(\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi \right) d\tau$$

9.6 Aufgabe

Man berechne das Volumen der vierdimensionalen Halbkugel.
Hinweis: Man arbeite wie im Beispiel 22.6: Sei $f : [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$,
$f(x,y,z) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2-z^2} & \text{falls } x^2+y^2+z^2 \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
Man ersetze $z = \sqrt{1-x^2-y^2}\sin t$.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 15.06.05 in der Vorlesung ab.]

Analysis II

SS 2005

Prof. H.-Ch. Grunau
E. Sassone

10 15.06.2005

10.1 $\star$ Aufgabe

Gegeben sei $\varepsilon > 0$ und eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Van der Polsche Gleichung

$$y'' - \varepsilon(1 - y^2)y' + y = 0$$

erfüllt.

1) Man reduziere die Gleichung auf ein System erster Ordnung der Form $Y'(t) = f(t, Y)$.

2) Genügt die so konstruierte Funktion f einer lokalen Lipschitz-Bedingung?

10.2 $\star$ Aufgabe

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $G \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, $f : I \times G \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung (bzgl. x). Seien $t_0 \in I$, $K \subset G$ kompakt und seien für $x_{1,0}, x_{2,0} \in K$

$$x_1, x_2 : [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_1] \to K$$

stetig differenzierbare Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\begin{cases} x_j'(t) = f(t, x_j(t)), & t \in [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_1], \\ x_j(t_0) = x_{j,0}. \end{cases}$$

Dann gibt es eine Konstante $L > 0$, so dass für alle $t \in [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_1]$ gilt:

$$\|x_2(t) - x_1(t)\| \le \|x_{2,0} - x_{1,0}\| e^{L|t-t_0|}.$$

Hinweis: Man benutze das Gronwallsche Lemma mit $a = \|x_{2,0} - x_{1,0}\|$.

10.3 Aufgabe

Man skizziere für die Differentialgleichung

$$y' = y^2 + 1 - x^2$$

das Richtungfeld unter Zuhilfenahme der Isoklinen $y^2 + 1 - x^2 = const.$
Hinweis: Isoklinen für die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ sind die Kurven $f(x, y) = const$, auf denen das Richtungsfeld konstante Steigung hat.

10.4 $\star$ Aufgabe

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = y\cos(x). \tag{2}$$

1) Man skizziere das Richtungsfeld.

2) Man bestimme und skizziere die Lösung der Differentialgleichung (2) mit der Anfangsbedingung $y(0) = 2$.

10.5 Aufgabe

Man bestimme alle Lösungen der Differentialgleichungen

1) $y' = (x - y + 3)^2$,
   Hinweis: Gegeben drei Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ und das Problem $y' = f(ax + by + c)$, ersetze man $u(x) = ax + by(x) + c$. Man berechne u'.

2)⋆ $y' = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$,
   Hinweis: Gegeben sei das Problem $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, ersetze man $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, falls $x \neq 0$.

3)⋆ $y = xy' - \sqrt{x^2 + y^2}$.

10.6 ⋆ Aufgabe

Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = -(x-3)y^3$. Man skizziere, mit der Hilfe von Maple, das Gradientenfeld und die Lösung, die durch den Punkt $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ läuft.

10.7 Aufgabe (Das Räuber-Beute Modell von Lotka-Volterra)

Wir betrachten zwei Populationen R (Räuber) und B (Beute). Die Grösse der Räuber-Population wird durch $y(t)$, jene der Beute-Population durch $x(t)$ beschrieben. Das Wachstum der Populationen ist voneinander beeinflusst:

$$x'(t) = r_1(x, y)x, \qquad y'(t) = r_2(x, y)y.$$

In unserem Modell nehmen wir an, dass die Beute der einzige Lebensunterhalt für die Räuber sind und die Beute unendlich viel Versorgung haben. Ein einfaches Modell für das Wachstum der Populationen ist von

$$x'(t) = (a - by)x, \qquad y'(t) = (-c + dx)y \qquad a, b, c, d > 0$$

gegeben. Wenn wir

$$p(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2,$$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto ((a - by)x, (-c + dx)y)$$

so definieren, dann können wir den System in der Form

$$p' = f(p)$$

schreiben. Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist ein Weg $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ so, dass sein Tangentenvektor $\gamma'(t)$ im Punkt $\gamma(t)$ von $f(\gamma(t))$ gegeben ist. Man skizziere das Vektorfeld der Differentialgleichung für $a = 3, b = 2, c = 2, d = 1$.

[Die mit ⋆ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 22.06.05 in der Vorlesung ab.]

Analysis II
SS 2005

Prof. H.-Ch. Grunau
E. Sassone

11 22.06.2005

11.1 Aufgabe

Die Funktion $f(t,x)$ sei im Streifen $S = J \times \mathbb{R}$, $J = [0,a]$, stetig und genüge der Bedingung

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq \frac{k}{t}|x-y| \quad \text{für } 0 \leq t \leq a \quad \text{und } x, y \in \mathbb{R}$$

mit $k < 1$. Man zeige, dass das Anfangswertproblem

$$x' = f(t,x) \quad \text{in } J, \quad x(0) = \eta$$

genau eine Lösung besitzt, und dass sie sich durch sukzessive Approximation berechnen lässt.
Hinweis: Der Operator T

$$(Tu)(t) = \int_0^t f(\tau, \eta + u(\tau))\, d\tau,$$

genügt im Banachraum B aller Funktionen $u \in C(J)$ mit endlicher Norm

$$\|u\| = \sup\left\{\frac{|u(t)|}{t} : 0 < t \leq a\right\}$$

einer Lipschitzbedingung. Die Fixpunkte von T sind, bis auf eine Konstante, die Lösungen des Anfangswertproblems.

11.2 ⋆ Aufgabe

Man integriere die folgenden Differentialgleichungen:

1) $(1+t^2)y' + ty = (1+t^2)^{-1}$,
2) $y' = \frac{n}{t+1}y + e^t(t+1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

11.3 ⋆ Aufgabe

Gegeben sei das Cauchyproblem

$$\begin{cases} x''' = t^3(x + x' + x'') \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = \frac{1}{2} \\ x''(0) = 0. \end{cases}$$

Man zeige, dass die Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ existiert.

11.4 Aufgabe

Man bestimme die Form eines Spiegels, der alle Lichtstrahlen einer punktförmigen Quelle parallel reflektiert.
Hinweis: Man nehme an, dass die Quelle im Ursprung 0 liegt. Wegen Symmetrie studiert man nur einen orthogonalen Schnitt des Spiegels. Seien $y = f(x)$ die Gleichung des Spiegels und $P = (x,y)$ ein Punkt auf dem Spiegel. Seien α der Winkel, der von der $x-$Achse und der Tangente im Punkt P an der Kurve $y = f(x)$ gebildet wird, und β der Winkel, der von der $x-$Achse und dem Lichtstrahl gebildet wird, der in P reflektiert wird. Dann sind $y' = \tan(\alpha)$, $\frac{y}{x} = \tan(\beta)$ und $\beta = 2\alpha$.

11.5 $\star$ Aufgabe

Man bestimme für alle $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}$ die Gesamtheit aller Lösungen des Problems

$$\begin{cases} y' = |y|^a \\ y(0) = b. \end{cases}$$

11.6 $\star$ Aufgabe

Gegeben sei die vereinfachte Gleichung der Fadenpendel

$$\varphi'' = -\sin(\varphi).$$

Man skizziere, mit Hilfe von Maple, die Lösung des Problems mit den verschiedenen Anfangsdaten

$$1) \begin{cases} \varphi(0) = 0.2 \\ \varphi'(0) = -1, \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} \varphi(0) = 0.2 \\ \varphi'(0) = 0, \end{cases} \qquad 3) \begin{cases} \varphi(0) = 1 \\ \varphi'(0) = 0. \end{cases}$$

11.7 Aufgabe

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, mit der Eigenschaft

$$\langle \xi, f(t, \xi) \rangle < 0 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}.$$

Sei $u : [0, a] \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$x'(t) = f(t, x(t)).$$

Man zeige, dass u als Lösung bis $+\infty$ fortgesetzt werden kann.

11.8 $\star$ Aufgabe

Gegeben sei das Problem

$$\begin{cases} x' = -yz - x^3 \\ y' = -xz - y^3 \\ z' = 2xy - z^3 \end{cases}.$$

Man zeige, dass jede Lösung bis nach $+\infty$ fortgesetzt werden kann.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 29.06.05 in der Vorlesung ab.]

Analysis II
SS 2005

Prof. H.-Ch. Grunau
E. Sassone

12 29.06.2005

12.1 ⋆ Aufgabe

Man integriere die folgenden Differentialgleichungen:

1) $(1-t^2)x' - tx - tx^2 = 0$;

2) $tx' + x(1 - tx^n) = 0$;

3) $x'' = \frac{1}{t}x' + t^2\sin(t)$;

4) $2xx'' - x'^2 - 1 = 0$;

5) $x''\sqrt{1-x^2} = 1$.

12.2 ⋆ Aufgabe

Für $x_0 \in \mathbb{R}$ betrachte man das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = -2t(t^2-1)x^2 \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Man bestimme den maximalen Definitionsbereich in Abhängigkeit von x_0.

12.3 Aufgabe

Gegeben seien eine lokal Lipschitz-stetige positive Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ und das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Man zeige, dass entweder $t^+_{\max}(x_0) = +\infty$ für alle x_0 oder $t^+_{\max}(x_0) < +\infty$ für alle x_0 und dann $t^+_{\max}(x_0) \to 0$ für $x_0 \to +\infty$; im letzten Fall ist die Funktion $x_0 \mapsto t^+_{\max}(x_0)$ stetig differenzierbar.
Ebenso ist $t^-_{\min}(x_0) = -\infty$ für alle x_0 oder $t^-_{\min}(x_0) > -\infty$ für alle x_0 und dann $t^-_{\min}(x_0) \to 0$ für $x_0 \to -\infty$, und die Funktion $x_0 \mapsto t^-_{\min}(x_0)$ ist stetig differenzierbar.
Hinweis: Man beweise $F(x(t)) = F(x_0) + t$, wobei $F(\xi)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{f(\xi)}$ ist und verwende die Charakterisierung des maximalen Existenzintervalls. Sodann studiere man die Fälle von unbeschränktem bzw. beschränktem F, um $t^+_{\max}(x_0)$ zu bestimmen. Um $t^-_{\min}(x_0)$ zu bestimmen, benutze man $-x(-t)$.

12.4 Aufgabe

Gegeben sei das Anfangswertproblem mit Parameter $\lambda \in [0,1]$

$$\begin{cases} x'(t,\lambda) = \begin{cases} e^{-\frac{\lambda^2}{x(t,\lambda)^2}}\sqrt{|x(t,\lambda)|} + \lambda & \text{, falls } \lambda \neq 0 \\ \sqrt{|x(t,\lambda)|} & \text{, falls } \lambda = 0 \end{cases} \\ x(0,\lambda) = 0 \text{ für alle } \lambda \in [0,1]. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

1) Für $\lambda \neq 0$ gibt es eine eindeutige globale Lösung $x(\,.\,,\lambda)$ des Anfangswertproblems.

2) Für $\lambda \neq 0$ ist diese Lösung ungerade, d.h. $x(-t,\lambda) = -x(t,\lambda)$.

3) Geben Sie nun eine Lösung $x(\,.\,,0)$ an, d.h. für $\lambda = 0$, so dass $x(\,.\,,\lambda)$ nicht punktweise gegen $x(\,.\,,0)$, wenn $\lambda \to 0$.

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 06.07.05 in der Vorlesung ab.]

Analysis II
SS 2005

Prof. H.-Ch. Grunau
E. Sassone

13 06.07.2005

13.1 ⋆ Aufgabe

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Man bestimme e^{At}.

13.2 ⋆ Aufgabe

Gegeben sei das Problem

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + 2t \\ x_2' = 3tx_1 + t^2 x_2. \end{cases} \tag{3}$$

1) Man schreibe (3) in der Form $x'(t) = A(t) \cdot x(t) + b(t)$.

2) Gegeben seien die Anfangsdaten

$$\begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1. \end{cases}$$

   Man entscheide, ob die zwei Lösungen ein Fundamentalssystem bilden.

13.3 Aufgabe

Gegeben seien ein Intervall I, zwei stetige Funktionen $P, Q : I \to \mathbb{R}$ und die homogene Differentialgleichung

$$x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0. \tag{4}$$

Nun seien x_1, x_2 zwei linear unabhängige Lösungen von (4). Man zeige, dass

1) x_1 und x_2 keine gemeinsame Nullstelle haben können.
   Hinweis: Durch Widerspruch: Man berechne die Wronski-Determinante einer gemeinsamen Nullstelle.

2) Die Nullstellen von x_1 und x_2 alternierend sind in I, d.h. x_1 genau eine Nullstelle zwischen zwei aufeinander folgenden Nullstellen von x_2 besitzt.
   Hinweis: Seien a und b zwei aufeinander folgende Nullstellen von x_2; man nehme an,

   dass x_1 keine Nullstelle in $[a, b]$ besitzt. Man studiere die Wronski-Determinante $W(t)$ in den Punkten a und b.

13.4 ⋆ Aufgabe

Man bestimme sämtliche Lösungen des Systems

$$\begin{cases} x' = (3t-1)x - (1-t)y + te^t \\ y' = -(t+2)x + (t-2)y - e^{t^2} \end{cases}$$

13.5 Aufgabe

Die Matrix $A(t)$ sei für alle t stetig und periodisch mit der Periode p: $A(t+p) = A(t)$. Man zeige:

1) Ist $Y(t)$ ein Fundamentalsystem von
$$Y'(t) = A(t)Y(t),$$
so ist $Y(t+kp)$ $(k \in \mathbb{Z})$ ebenfalls ein Fundamentalsystem.

2) Zu jedem Fundamentalsystem $Y(t)$ existiert eine reguläre Matrix C mit
$$Y(t+kp) = Y(t) \cdot C^k.$$
Man gebe C an.

13.6 Aufgabe

Gegeben seien ein Intervall $0 \in I \subset \mathbb{R}$, zwei stetige Funktionen $P, Q : I \to \mathbb{R}$ und die Differentialgleichung
$$x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0.$$
Weiterhin sei $\lambda : I \to \mathbb{R}$ eine gegebene Lösung mit $\lambda(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Man zeige mit Hilfe des d'Alembertschen Reduktionsverfahrens, dass die allgemeine Lösung
$$x(t) = \lambda(t) \left(c_1 + c_2 \int_0^t \frac{e^{-\int_0^s P(\tau)\, d\tau}}{\lambda(s)^2}\, ds \right)$$
ist.

13.7 $\star$ Aufgabe

Gegeben sei die homogene Differentialgleichung
$$(t^2 - 1)x'' - 2tx' + 2x = 0. \tag{5}$$

1) Man zeige, dass $x(t) = t$ eine Lösung von (5) ist.

2) Man bestimme die allgemeine Lösung von (5).

[Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.
Die Lösungen geben Sie bitte am 13.07.05 in der Vorlesung ab.]

Analysis II – SS 2005

1. Klausur, 27.05.2005, Ohne Hilfsmittel

Prof. H.-Ch. Grunau, E. Sassone

Versehen Sie bitte zunächst dieses Blatt leserlich mit den erfragten Daten.

Bearbeiten Sie bitte jede Aufgabe auf einem separaten Blatt Papier, das Sie leserlich mit Ihrem Namen, Vornamen und Geburtsdatum versehen. Nach der Klausur geben Sie dieses Aufgabenblatt und Ihre Lösungen nach Aufgaben sortiert ab.

Name .... Vorname ....

Geb.-datum..................... Geb.-ort ....

Studiengang .... Matrikelnr. ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
erreichte Punkte								

Jede Aufgabe wird mit bis zu 6 Punkten bewertet. Bitte begründen Sie Ihre Lösungen vollständig. Mit mindestens 18 Punkten ist die Klausur sicher bestanden.

14 Aufgabe

Gegeben seien $I = [a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

(1) Man gebe die Definitionen für Ober-, Untersummen, Ober-, Unterintegral und Riemann-Integrierbarkeit von f auf $[a, b]$.

(2) Man formuliere den Mittelwertsatz der Integralrechnung für stetiges f.

(3) Man formuliere den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für stetiges f in der ersten Version.

Formulieren Sie bitte stets alle erforderlichen Voraussetzungen.

15 Aufgabe

Gegeben seien eine offene Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f : G \to \mathbb{R}$.

(1) Man gebe die Definition von partieller Differenzierbarkeit von f in x_k-Richtung in $x_0 \in G$.

(2) Man gebe die Definition von (totaler) Differenzierbarkeit von f in $x_0 \in G$.

3) Man gebe ein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen eines lokalen Extremums von f in $x_0 \in G$ an. Geben Sie bitte alle erforderlichen Voraussetzungen an.

16 Aufgabe

Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale:

(1) $\int x \sin^2(x)\, dx$,

(2) $\int \frac{x^2}{x^2+5x+6}\, dx$.

17 Aufgabe

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert

(1) $\int_0^4 \frac{x+1}{(x^2+2x)^\alpha}\, dx$ bzw.

(2) $\int_4^\infty \frac{x+1}{(x^2+2x)^\alpha}\, dx$

als uneigentliches Riemann-Integral? Man bestimme ggfs. die Integralwerte.

18 Aufgabe

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right),$$

man bestimme das Taylorpolynom dritter Ordnung mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Man schätze für $x \in [-2, 2]$ das Restglied ab.

19 Aufgabe

Gegeben seien die ebene Kurve $\gamma : [\sqrt{3}, \sqrt{8}] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma : t \mapsto (\log t, t)$ und die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f : (x, y) \mapsto y^2$. Man bestimme

$$\int_\gamma f(x, y)\, ds(x, y).$$

20 Aufgabe

Man bestimme alle lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + 1}.$$

Analysis II – SS 2005

2. Klausur, 15.07.2005, Ohne Hilfsmittel

Prof. H.-Ch. Grunau, E. Sassone

Versehen Sie bitte zunächst dieses Blatt leserlich mit den erfragten Daten.

Bearbeiten Sie bitte jede Aufgabe auf einem separaten Blatt Papier, das Sie leserlich mit Ihrem Namen, Vornamen und Geburtsdatum versehen. Nach der Klausur geben Sie dieses Aufgabenblatt und Ihre Lösungen nach Aufgaben sortiert ab.

Name .... Vorname ....

Geb.-datum..................... Geb.-ort ....

Studiengang .... Matrikelnr. ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
erreichte Punkte								

Jede Aufgabe wird mit bis zu 6 Punkten bewertet. Bitte begründen Sie Ihre Lösungen vollständig. Mit mindestens 18 Punkten ist die Klausur sicher bestanden.

21 Aufgabe

Man formuliere die folgenden Sätze:

1) den Banachschen Fixpunktsatz;

2) den Satz von der (inversen bzw.) Umkehrabbildung.

22 Aufgabe

1) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $G \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f : I \times G \to \mathbb{R}^n$. Man gebe die Definition von "f ist stetig und genügt einer lokalen Lipschitz-Bedingung".

2) Man formuliere den Existenzsatz von Picard-Lindelöf.

23 Aufgabe

Seien $C = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|x\| < 1\}$, $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| > 1\}$ und $f : C \to A$, $f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$. Man zeige, dass f eine stetig differenzierbare inverse Abbildung $f^{-1} : A \to C$ zulässt. Man bestimme die Jacobi-Matrix der inversen Abbildung f^{-1}.

24 Aufgabe

Gegeben seien die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{x \cos(y)} - e^y$ und die Niveaumenge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$.

1) Man beweise, dass es offene Umgebungen $U \subset \mathbb{R}$ von $\{0\}$ und $V \subset \mathbb{R}$ von $\{0\}$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to V$ gibt, so dass gilt: $(x, y) \in M \cap (U \times V) \iff y = g(x)$.

2) Man bestimme das Taylorpolynom erster Ordnung von $g(x)$ mit Entwicklungspunkt 0.

25 Aufgabe

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x'(t) = \tan(t)x(t). \tag{6}$$

1) Man skizziere das Richtungfeld.

2) Man bestimme und skizziere die Lösung der Differentialgleichung (6) mit der Anfangsbedingung $x(0) = 1$.

26 Aufgabe

Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x'' + x' - 1 = 0, \\ x(0) = e^2, \\ x'(0) = 1 - 2e^2. \end{cases}$$

Hinweis: Man betrachte $y := x'$.

27 Aufgabe

Für $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 > 0$ betrachte man das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'' = 6x^2, \\ x(0) = x_0, \\ x'(0) = 2(x_0)^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Man bestimme den maximalen Definitionsbereich in Abhängigkeit von $x_0 > 0$.
Hinweis: Zur iterativen Auflösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung ist diese mit einer geeigneten Funktion zu multiplizieren.