

Abbildungsgrad
und
Fixpunktsätze

Vorlesungsmanuskript

von

Hans-Christoph Grunau
(Magdeburg)

Unter Benutzung von Vorlesungen von

Erhard Heinz
(Göttingen)

Vorwort

Wesentliche Teile des vorliegenden Manuskriptes gehen auf Vorlesungen von E. Heinz zurück, die er wiederholt an der Universität Göttingen gehalten hat. Zwar ist der Abbildungsgrad für stetige Abbildungen ein klassisches Werkzeug der algebraischen Topologie, hier wird jedoch ein rein analytischer Zugang dargestellt, der sich zudem auf natürliche Weise aus der komplexen Windungszahl ergibt. Ich habe diesen faszinierenden Gegenstand bei E. Heinz gelernt, die vorliegende Vorlesung inzwischen selbst schon zweimal gehalten und dabei noch einmal sorgfältig ausgearbeitet und durch ein Kapitel aus der Gleichgewichtstheorie in der Wirtschaft ergänzt.

Mit der vorliegenden auch elektronisch zugänglichen Ausarbeitung erhofft sich der Autor, dass dieser Zugang unter Kollegen ebenso wie unter interessierten fortgeschrittenen Studierenden weitere Verbreitung findet.

Frau Claudia Bieder und Frau Barabara Fischbach schulde ich einen ganz herzlichen Dank für die liebevolle und sorgfältige Umsetzung der handschriftlichen Vorlage in dieses Manuskript.

Magdeburg, April 2003

Hans-Christoph Grunau

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
Einleitung	4
I Der Brouwersche Abbildungsgrad	7
1 Der Abbildungsgrad für Funktionen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$	7
2 Der Brouwersche Abbildungsgrad in \mathbb{R}^n	14
3 Der Index einer Abbildung, die Ganzzahligkeit des Abbildungsgrades	23
4 Verallgemeinerte Transformationsformel, allgemeine Definition des Abbildungsgrades	29
5 Die Produkteigenschaft, der Satz von Jordan-Brouwer	35
II Fixpunktsätze	39
6 Der Brouwersche Fixpunktsatz für kompakte konvexe Mengen	39
7 Exkurs: Der Fixpunktsatz von Kakutani, Gleichgewichte in der mathematischen Wirtschaftstheorie	42
8 Der Schaudersche Fixpunktsatz	47
III Der Leray–Schauder–Abbildungsgrad im Banachraum	52
9 Definition des Abbildungsgrades im Banachraum	52
9.1 Endlichdimensionale Banachräume	52
9.2 Identität – Abbildung mit endlichdimensionalem Wertebereich	53
9.3 Identität – kompakt	57
Fundamenteigenschaften des Leray–Schauder–Grades	59
10 Der Produktsatz, Anwendungen auf die Topologie in Banachräumen	61
IV Anhang	72

A Wichtige „Hilfs-“ Sätze	72
A.1 Weierstraßscher Approximationssatz	72
A.2 Fortsetzungssatz von Tietze	74
A.3 Das Lemma von Sard	76
A.4 Der Satz von Arzela–Ascoli	77
Literatur	80
Index	81

Einleitung

Ein guter Teil der Analysis besteht in der Suche von Nullstellen bzw. von Fixpunkten. Das beginnt schon in der Schule und setzt sich im 1. Semester fort, wenn man bei der Diskussion von reellen Funktionen deren Nullstellen sowie die Nullstellen der Ableitung und, wenn man auch den Wechsel von Krümmungseigenschaften betrachtet, der zweiten Ableitung bestimmen muss. In diesem Kontext untersucht man im 2. Semester Nullstellen von Gradienten von Funktionen und damit von Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Diese Nullstellensuche setzt sich im 2. Studienjahr fort, nämlich auf abstrakterem Niveau bei der Betrachtung von Anfangswertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen: Es seien die Anfangszeit $t_0 \in \mathbb{R}$, ein Anfangsdatum $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sowie eine stetige Funktion (rechte Seite, Nichtlinearität) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben. Man sucht dann eine Funktion $x : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$, die zumindest in einem kleinen Zeitintervall um t_0 herum existiert und für die gilt:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) & \text{für } t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (*)$$

Mit der Einführung des Operators

$$\mathcal{F}(x)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

wird (*) äquivalent zu der Operatoren-Fixpunktgleichung

$$x = \mathcal{F}(x)$$

bzw. der Nullstellengleichung

$$(Id - \mathcal{F})(x) = 0,$$

die nun in geeigneten Funktionenräumen untersucht werden muss.

Auch in der Funktionentheorie haben Nullstellen eine besondere Bedeutung. Ist etwa $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so sind die Nullstellen $f'(z) = 0$ der Ableitung genau die „Verzweigungspunkte“ von f , in deren Nähe also f nicht konform, sondern im Kleinen winkelveerdoppelnd, -verdreifachend usw. je nach Vielfachheit der Nullstelle ist.

In vertieften Analysis-Veranstaltungen beschäftigt man sich dann u.a. mit nichtlinearen partiellen elliptischen Differentialgleichungen. Wir gehen davon aus, dass für lineare Randwertprobleme der Art

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (+)$$

eine Theorie zur Existenz und Abschätzung dieser Lösungen u vorliegt. Dabei sind das glatt berandete Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und die glatte Funktion $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Hat man also Existenz und Eindeutigkeit dieser Lösung u , so kann man durch

$$f \mapsto u := \mathcal{G}f$$

den zu (+) gehörigen Lösungsoperator oder *Greenschen Operator* \mathcal{G} definieren. Dieser ist wegen der Linearität von (+) linear und wegen der als gültig unterstellten a-priori-Abschätzungen

in geeigneten Funktionenräumen beschränkt und sogar kompakt. Die benötigten funktionalanalytischen Begriffe werden unten in Paragraph 8 definiert und ausführlich diskutiert.

Mit dieser wohlausgebauten Theorie aus der linearen Analysis im Hintergrund wendet man sich nun nichtlinearen Randwertproblemen zu. Als ganz einfaches Beispiel betrachte man

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (++)$$

mit einer geeigneten Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Indem man den linearen Lösungsoperator \mathcal{G} aus Problem (+) auf das nichtlineare Problem (++) anwendet, wobei man dort zunächst $f - g(u)$ auf die rechte Seite schreibt, erhält man das dazu äquivalente Problem

$$u = \mathcal{G}(f - g(u)) =: \mathcal{F}(u)$$

bzw.

$$(Id - \mathcal{F})(u) = 0.$$

Diese Nullstellengleichung ist wiederum in geeigneten Funktionenräumen zu studieren.

Diese Beispiele machen die Notwendigkeit eines wirkungsvollen Instruments zur Suche von Nullstellen bzw. Fixpunkten deutlich.

Das Ziel dieser Vorlesung besteht darin, mit dem Abbildungsgrad und den Fixpunktsätzen von Brouwer, Kakutani und Schauder geeignete Hilfsmittel aus der nichtlinearen Funktionalanalysis einzuführen. Es werden einige Anwendungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen gegeben; Anwendungen auf nichtlineare partielle Differentialgleichungen gehen über den Rahmen dieser Vorlesung hinaus. Es sei auf die entsprechende Veranstaltung bzw. die ausgezeichneten Monographien [CH, GT, LSU, LU, Zei4] verwiesen.

Neben diesem ganz angewandten Aspekt aus der nichtlinearen Analysis und Funktionalanalysis berühren wir hier aber auch das Gebiet der algebraischen Topologie, man vgl. [AH, Br]. Viele der klassischen Sätze wie der Offenheitssatz, der Satz von Borsuk, der „Igelsatz“, der Satz von der Invarianz der Dimension und schließlich der tiefliegende Satz von Jordan–Brouwer als Verallgemeinerung des Jordanschen Kurvensatzes werden hier gezeigt.

Hier entwickeln wir in Anlehnung an die Arbeit [He] allerdings eine analytische Theorie des Abbildungsgrades.

Wir merken an, dass sich mit Hilfe unseres Zugangs die Transformationsformel in ihrer klassischen und auch in einer verallgemeinerten Formulierung, die nicht mehr die Injektivität der Koordinatentransformation verlangt, als Nebenprodukt ergibt. Der Leser möge bitte beachten, dass wir zwar einige elementarere Tatsachen verwenden werden, die man üblicherweise dem Beweis der Transformationsformel vorausschickt wie etwa das Verhalten des Integrals bei Bewegungen oder Eigenschaften von Nullmengen unter stetig differenzierbaren Abbildungen, dass weitere Resultate aus diesem Bereich aber nicht vorausgesetzt werden. Das Lemma von Sard wird im Anhang bewiesen.

In einem kleinen Exkurs werden die Anwendungsmöglichkeiten von Fixpunktsätzen auf Gleichgewichtstheorien in Wirtschaftsmodellen aufgezeigt.

Der Banachsche Fixpunktsatz ist analytischer und nicht topologischer Natur und soll aus methodischen Gründen hier unberücksichtigt bleiben.

Um eine *Orientierung* zu gewinnen, welcher Art die hier vorgelegten Instrumente und Resultate sein werden, mag man sich die Frage vorlegen, welche theoretischen Werkzeuge zur

Nullstellen- und Fixpunktsuche man im Grundstudium kennengelernt hat, wenn die explizite Rechnung versagt:

- In der Analysis der Funktionen einer reellen Veränderlichen hat man als den zentralen Satz den Zwischenwertsatz kennengelernt: Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und gilt $f(a) \cdot f(b) < 0$, so hat f im offenen Intervall (a, b) eine Nullstelle.

Trotz seiner Einfachheit ist dieses Resultat in mancher Hinsicht für das Folgende typisch: es ist ein Satz über *stetige* Funktionen und damit aus dem topologischen Kontext, es werden keine Aussagen über Eindeutigkeit oder Anzahlen gemacht, und die Aussage ist gegenüber kleinen Änderungen von f stabil. Zwar können auch Funktionen mit $f(a) \cdot f(b) > 0$ Nullstellen in (a, b) haben, aber diese können auch bei kleinen Änderungen von f verschwinden, und ohne dass man dieses an den Randwerten von f in a und b bemerkt.

- Einen noch deutlicheren Hinweis gibt die Funktionentheorie. Sei $\Omega \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ offen, $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$ und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f|_{\partial B_R(z_0)} \neq 0$. Dann ist die *Windungszahl* oder der *Abbildungsgrad* von f

$$d(f, B_R(z_0), 0) := N(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

gemäß dem Residuensatz gleich der Gesamtzahl der mit Vielfachheiten gezählten Nullstellen von f in $B_R(z_0)$. Diese Zahl hängt stetig und nur von $f|_{\partial B_R(z_0)}$ ab, dazu vgl. man unten den Satz 1.10 von Rouché.

Wir werden in einem ersten Schritt diesen elementaren Abbildungsgrad auf stetige Abbildungen $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ verallgemeinern und uns damit einen Fingerzeig verschaffen, auf welche Weise man diesen auf Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ausdehnen kann.

Teil I

Der Brouwersche Abbildungsgrad

1 Der Abbildungsgrad für Funktionen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

Formal betrachtet ist dieser Paragraph ganz unnötig. Hier geht es darum:

- die Hörer der Funktionentheorie zu erinnern und das dort sehr vorläufig betrachtete Werkzeug des Abbildungsgrades auf den Rahmen stetiger Funktionen zu erweitern;
- für die übrigen auf relativ elementarem Niveau schon einmal das Flair zu vermitteln und eine Richtung anzudeuten, welcher Art das gewünschte Werkzeug und dessen zu erwartende Eigenschaften sein werden.

Wir verwenden die folgenden Schreibweisen: $B_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ für die offene Kreisscheibe, $\partial B_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ für die Kreislinie, $z = x + iy$, $f = u + iv$ jeweils für die Darstellung mittels Real- und Imaginärteil.

Definition 1.1. Seien $f, g : \partial B_R(0) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann nennen wir

$$\int_{\partial B_R(0)} (f dx + g dy) = \int_0^{2\pi} (f(Re^{it})(-R \sin t) + g(Re^{it})(R \cos t)) dt$$

das *Linienintegral* der „Differentialform $f dx + g dy$ “.

Sei vorübergehend $f : \overline{B_R(0)} \rightarrow \mathbb{C}$ eine „holomorphe Funktion“, und es gelten die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(u + iv) = u_x + iv_x = -i f_y = -i \frac{\partial}{\partial y}(u + iv) = v_y - i u_y.$$

Sei ferner $f|_{\partial B_R(0)} \neq 0$, dann hatten wir in der Funktionentheorie mit

$$d(f, B_R(0), 0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (1.1)$$

ein Hilfsmittel gefunden, das genau die Anzahlen der Nullstellen von f in $B_R(0)$ mit Vielfachheit zählt. Diese Beobachtung beruht auf der Indexformel und diese wiederum auf dem Residuensatz.

Das Ziel in diesem Abschnitt besteht nun in der Ausdehnung zunächst auf stetig differenzierbare (man beachte: es besteht ein riesiger Unterschied zu holomorph!) und später dann auf stetige Funktionen $f : \overline{B_R(0)} \rightarrow \mathbb{C}$. Stetig differenzierbar auf $\overline{B_R(0)}$ soll dabei heißen, dass f in einer offenen Umgebung von $\overline{B_R(0)}$ als stetig differenzierbare Funktion existiert. Nachdem wir uns aber später ohnehin auf stetige Funktionen ausdehnen wollen, wir den Tietzeschen Fortsetzungssatz A.6 zur Verfügung haben und sehen werden, dass der Abbildungsgrad nur von $f|_{\partial B_R(0)}$ abhängt, können wir uns nun auf stetig differenzierbare Abbildungen

$$f \in C^1 := C^1(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$$

beschränken.

Formulieren wir (1.1) also für diesen Kontext um:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f_x(Re^{it})}{f(Re^{it})} \cdot (iRe^{it}) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \left(\frac{f_x}{f} \cdot (-R \sin t) + \overbrace{\frac{if_x}{f}}^{= f_y \text{ laut Cauchy-Riemann-Dgl.}} \cdot (R \cos t) \right) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \left(\frac{f_x}{f} \cdot (-R \sin t) + \frac{f_y}{f} (R \cos t) \right) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(0)} \left(\frac{f_x}{f} dx + \frac{f_y}{f} dy \right).
 \end{aligned}$$

Und genau diesen Term nehmen wir als Definition für den Abbildungsgrad stetig differenzierbarer Funktionen.

Definition 1.2. Sei $f \in C^1$ und $f|_{\partial B_R(0)} \neq 0$, dann nennen wir

$$d(f, B_R(0), 0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(0)} \left(\frac{f_x}{f} dx + \frac{f_y}{f} dy \right)$$

den *Abbildungsgrad* von f auf $B_R(0)$ bezüglich des Wertes 0.

Mit Hilfe dieser Definition berechnet man $d(id, B_R(0), 0) = 1$. Dabei bezeichnet $id : z \mapsto z$ stets die identische Abbildung.

Satz 1.3. Sei $f \in C^1$ und $f|_{\partial B_R(0)} \neq 0$. Dann gilt:

$$d(f, B_R(0), 0) \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Wir betrachten die Hilfsfunktion:

$$\begin{aligned}
 [0, 2\pi] \ni s \mapsto \Phi(s) &:= f(R \cos s, R \sin s) \cdot \exp \left(\int_0^s \frac{(-R \sin t) \cdot f_x + (R \cos t) f_y}{f(R \cos t, R \sin t)} dt \right) \\
 \Phi'(s) &= \{-R \sin s \cdot f_x + R \cos s \cdot f_y - (-R \sin s f_x + R \cos s \cdot f_y)\} \\
 &\quad \cdot \exp \left(\int_0^s \frac{(-R \sin t) \cdot f_x + (R \cos t) f_y}{f(R \cos t, R \sin t)} dt \right) = 0 \\
 \Rightarrow f(R, 0) &= \Phi(0) = \Phi(2\pi) = \underbrace{f(R, 0)}_{\neq 0} \cdot \exp(-2\pi i d(f, B_R(0), 0))
 \end{aligned}$$

Das zeigt $d(f, B_R(0), 0) \in \mathbb{Z}$. □

Bemerkung 1.4. (a) $\Phi(s) = \Phi(0)$ bedeutet durch „Logarithmieren“

$$\arg f(R \cos s, R \sin s) - \arg f(R, 0) = \operatorname{Im} \int_0^s \frac{(-R \sin t) f_x + (R \cos t) f_y}{f(R \cos t, R \sin t)} dt,$$

so dass man Letzteres als orientierten Winkel zwischen $f(R, 0)$ und $f(R \cos s, R \sin s)$ interpretieren kann.

- (b) Für die Hörer der Funktionentheorie: Man bedenke, dass bei lediglich differenzierbaren Abbildungen die Kurven $f(\partial B_R(0))$ auch rechts herum durchlaufen werden können. So hat man z.B.

$$d(z \mapsto \bar{z}, B_1(0), 0) = -1.$$

□

Als wichtiger als die explizite Definition werden sich die Eigenschaften des Abbildungsgrades erweisen. Die zentrale Eigenschaft ist die Homotopieinvarianz, und der folgende Hilfssatz ein erster Schritt dorthin. Bei diesem handelt es sich um eine Vorform des Satzes von Rouché.

Hilfssatz 1.5. Seien $f, g \in C^1$, für ein $\varepsilon > 0$ gelte

$$|f_1|_{\partial B_R(0)} > \varepsilon \quad \text{und} \quad |(f_1 - f_2)|_{\partial B_R(0)} < \varepsilon.$$

Dann gilt

$$d(f_1, B_R(0), 0) = d(f_2, B_R(0), 0).$$

Beweis. Man betrachte $[0, 1] \ni \tau \mapsto d(\tau f_2 + (1 - \tau)f_1, B_R(0), 0)$. Weil für alle $z \in \partial B_R(0)$

$$\begin{aligned} |\tau f_2(z) - (1 - \tau)f_1(z)| &= |f_1(z) - \tau(f_1(z) - f_2(z))| \\ &\geq |f_1(z)| - \tau|f_1(z) - f_2(z)| > \varepsilon - |f_1(z) - f_2(z)| > \varepsilon - \varepsilon = 0 \end{aligned}$$

gilt, ist diese Abbildung für alle τ wohldefiniert und auf Grund der Theorie parameterabhängiger Integrale auch stetig in τ . Eine stetige ganzzahlige Funktion auf $[0, 1]$ ist aber konstant, so dass

$$d(f_1, B_R(0), 0) = d(f_2, B_R(0), 0).$$

□

Mittels Approximation durch C^1 -Funktionen soll nun der Abbildungsgrad für stetige Funktionen erklärt werden. Wir klären zunächst die Wohldefiniertheit eines solchen Verfahrens:

Hilfssatz 1.6. Sei $f : \overline{B_R(0)} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $f|_{\partial B_R(0)} \neq 0$. Sei \hat{f} eine stetige Fortsetzung von f nach \mathbb{C} , die gemäß dem Fortsetzungssatz von Tietze existiert, und $f_k \in C^1$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen, die auf $\overline{B_R(0)}$ gleichmäßig gegen \hat{f} und damit gegen f konvergiert und die gemäß dem Weierstraßschen Approximationssatz existiert. Dann existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k, \ell \geq k_0$ gilt:

$$f_k, f_\ell|_{\partial B_R(0)} \neq 0 \quad \text{und} \quad d(f_k, B_R(0), 0) = d(f_\ell, B_R(0), 0).$$

Beweis. Zunächst existiert wegen $f|_{\partial B_R(0)} \neq 0$ ein $\varepsilon > 0$ so, dass:

$$\forall z \in \partial B_R(0) : |f(z)| > 2\varepsilon.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz findet man ein k_1 , so dass:

$$\forall k \geq k_1 \quad \forall z \in \partial B_R(0) : |f_k(z)| > \varepsilon$$

und ein k_2 , so dass:

$$\forall k, \ell \geq k_2 \quad \forall z \in \partial B_R(0) : |f_k(z) - f_\ell(z)| < \varepsilon.$$

Mit $k_0 = \max(k_1, k_2)$ sind für f_k, f_ℓ die Voraussetzungen von Hilfssatz 1.5 erfüllt, dieser liefert die Behauptung. □

Die Folge der Abbildungsgrade wird also stets stationär, welche approximierende Funktionenfolge man auch wählt; sofern nur $f|_{\partial B_R(0)} \neq 0$. Hat man zwei approximierende Folgen, so zeigt die „Reißverschlussfolge“ die Gleichheit der Grenzwerte. Daraus ergibt sich die Wohldefiniertheit des folgenden Verfahrens:

Definition 1.7. Sei $f : \overline{B_R(0)} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, und $f|_{\partial B_R(0)} \neq 0$. Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus C^1 , die auf $\overline{B_R(0)}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Wir definieren dann den *Abbildungsgrad* für die stetige Abbildung f durch

$$d(f, B_R(0), 0) := \lim_{k \rightarrow \infty} d(f_k, B_R(0), 0).$$

Nun also zu der bereits angekündigten zentralen Eigenschaft des Abbildungsgrades:

Satz 1.8 (Homotopieinvarianz). Sei $H : [0, 1] \times \overline{B_R(0)} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, außerdem gelte die Zulässigkeitsbedingung für die Homotopie H :

$$\forall \tau \in [0, 1], \forall z \in \partial B_R(0) : H(\tau, z) \neq 0.$$

Dann ist

$$[0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \tau \mapsto d(H(\tau, \cdot), B_R(0), 0)$$

konstant.

Beweis. Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\tau \in [0, 1]$ und für alle $z \in \partial B_R(0)$ gilt:

$$|H(\tau, z)| > 4\varepsilon.$$

Auf Grund der gleichmäßigen Stetigkeit von H kann man ein $\delta > 0$ so finden, so dass aus

$$\tau_1, \tau_2 \in [0, 1], \quad |\tau_1 - \tau_2| \leq \delta$$

folgt:

$$\forall z \in \partial B_R(0) : |H(\tau_1, z) - H(\tau_2, z)| \leq \varepsilon.$$

Man halte zwei solche τ_1, τ_2 fest und bestimme zu $H(\tau_1, \cdot)$ bzw. $H(\tau_2, \cdot)$ ein f_1 bzw. $f_2 \in C^1$ so, dass für alle $z \in \partial B_R(0)$ gilt:

$$\begin{aligned} |H(\tau_1, z) - f_1(z)| &< \frac{\varepsilon}{2}, & d(f_1, B_R(0), 0) &= d(H(\tau_1, \cdot), B_R(0), 0), \\ |H(\tau_2, z) - f_2(z)| &< \frac{\varepsilon}{2}, & d(f_2, B_R(0), 0) &= d(H(\tau_2, \cdot), B_R(0), 0). \end{aligned}$$

Es folgt $|f_1(z)| > 3\varepsilon$, $|f_2(z)| > 3\varepsilon$ sowie

$$\begin{aligned} |f_1(z) - f_2(z)| &\leq |f_1(z) - H(\tau_1, z)| + |H(\tau_1, z) - H(\tau_2, z)| + |H(\tau_2, z) - f_2(z)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Hilfssatz 1.5 zeigt

$$d(H(\tau_1, \cdot), B_R(0), 0) = d(f_1, B_R(0), 0) = d(f_2, B_R(0), 0) = d(H(\tau_2, \cdot), B_R(0), 0). \quad (1.2)$$

Indem man nun $0 = \tilde{\tau}_0 < \tilde{\tau}_1 < \tilde{\tau}_2 < \dots < \tilde{\tau}_k = 1$ mit $|\tilde{\tau}_j - \tilde{\tau}_{j-1}| < \delta$ betrachtet, erhält man durch k -malige Anwendung von (1.2) sukzessive die Übereinstimmung und Konstanz von $\tau \mapsto d(H(\tau, \cdot), B_R(0), 0)$. \square

Und nun die vielleicht wichtigste Eigenschaft des Abbildungsgrades, wegen derer man denselben überhaupt erfunden hat:

Satz 1.9. Sei $f : \overline{B_R(0)} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $f|_{\partial B_R(0)} \neq 0$. Ist $d(f, B_R(0), 0) \neq 0$, so besitzt f in $B_R(0)$ eine Nullstelle:

$$\exists z_0 \in B_R(0) : f(z_0) = 0.$$

Beweis. Wir nehmen an, dass für alle $z \in B_R(0)$

$$f(z) \neq 0$$

ist. Dann ist die Homotopie $H : [0, 1] \times \overline{B_R(0)} \rightarrow \mathbb{C}$, $H(\tau, z) = f(\tau z)$ zulässig, und Satz 1.8 über die Homotopieinvarianz zeigt

$$0 \neq d(f, B_R(0), 0) = d(z \mapsto \underbrace{f(0)}_{\neq 0}, B_R(0), 0) = 0,$$

ein Widerspruch. Also:

$$\exists z_0 \in B_R(0) : f(z_0) = 0.$$

□

Eine weitere wichtige, aber nun ganz leicht zu zeigende Eigenschaft des Abbildungsgrades ist der

Satz 1.10 (Satz von Rouché). Seien $f_0, f_1 : \overline{B_R(0)} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, und für alle $z \in \partial B_R(0)$ gelte

$$|f_0(z)| > |f_0(z) - f_1(z)|.$$

Dann folgt:

$$d(f_0, B_R(0), 0) = d(f_1, B_R(0), 0).$$

Beweis. Die triviale Homotopie $H(\tau, z) = \tau f_1(z) + (1 - \tau)f_0(z)$ ist zulässig, denn man hat für alle $\tau \in [0, 1]$ und alle $z \in \partial B_R(0)$:

$$\begin{aligned} |\tau f_1(z) + (1 - \tau)f_0(z)| &\geq |f_0(z)| - \tau|f_0(z) - f_1(z)| \\ &\geq |f_0(z)| - |f_0(z) - f_1(z)| > 0. \end{aligned}$$

Satz 1.8 von der Homotopieinvarianz zeigt die Behauptung. □

Als Folgerung aus dem Satz von Rouché erhält man auch den Fundamentalsatz der Algebra: dazu ist nur $d(z \mapsto z^n, B_R(0), 0)$ und eine geeignete Störung von $z \mapsto z^n$ auf hinreichend großen Kreisscheiben $B_R(0)$ zu betrachten.

Satz 1.11 (Brouwerscher Fixpunktsatz in \mathbb{C}). Sei $f : \overline{B_1(0)} \rightarrow \overline{B_1(0)}$ stetig. Dann hat f einen Fixpunkt:

$$\exists \xi \in \overline{B_1(0)} : f(\xi) = \xi.$$

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir

$$g_k : \overline{B_1(0)} \rightarrow \mathbb{C}, \quad g_k(z) = z - \left(1 - \frac{1}{k}\right) f(z).$$

Für $|z| = 1$ gilt

$$|z - g_k(z)| = \left|1 - \frac{1}{k}\right| \cdot |f(z)| \leq 1 - \frac{1}{k} < 1 = |z|.$$

Nach dem Satz von Rouché ist also

$$d(g_k, B_1(0), 0) = d(\text{id}, B_1(0), 0) = 1.$$

Somit existiert ein $\xi_k \in B_1(0)$ mit $g_k(\xi_k) = 0$, so dass

$$\xi_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right) f(\xi_k). \quad (*)$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existieren eine Teilfolge $(k_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ und ein $\xi \in \overline{B_1(0)}$, so dass:

$$\xi_{k_\ell} \rightarrow \xi \quad (\ell \rightarrow \infty).$$

Wegen der Stetigkeit von f ergibt (*) für $k_\ell \rightarrow \infty$:

$$\xi = f(\xi).$$

□

Wir beseitigen in der Definition des Abbildungsgrades noch die Ausnahmestelle des Wertes 0:

Definition 1.12. Sei $f : \overline{B_R(0)} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, $w \in \mathbb{C}$ so, dass für alle $z \in \partial B_R(0)$ gilt: $f(z) \neq w$. Dann definieren wir

$$d(f, B_R(0), w) := d(f(\cdot) - w, B_R(0), 0)$$

als *Abbildungsgrad* von f auf $B_R(0)$ bezüglich des Wertes w .

Satz 1.13. Sei $f : \overline{B_R(0)} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, $\Gamma = f(\partial B_R(0))$, $G \subset \mathbb{C} \setminus \Gamma$ sei ein Gebiet. Dann ist

$$G \ni w \mapsto d(f, B_R(0), w)$$

auf G konstant.

Beweis. G ist offen und zusammenhängend, also wegweise zusammenhängend. Seien $w_0, w_1 \in G$, $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ ein Weg mit

$$\gamma(0) = w_0, \quad \gamma(1) = w_1.$$

Wir betrachten die Homotopie

$$H : [0, 1] \times \overline{B_R(0)} \rightarrow \mathbb{C}, \quad H(\tau, z) = f(z) - \gamma(\tau).$$

Da $\gamma(\tau) \in \mathbb{C} \setminus f(\partial B_R(0))$, gilt

$$\forall \tau \in [0, 1], \quad \forall z \in \partial B_R(0) : \quad H(\tau, z) \neq 0.$$

Also ist H eine zulässige Homotopie, und Satz 1.8 gibt:

$$d(f, B_R(0), w_0) = d(H(0, \cdot), B_R(0), 0) = d(H(1, \cdot), B_R(0), 0) = d(f, B_R(0), w_1).$$

□

Zum Abschluss wird gezeigt, dass die aus der Funktionentheorie bekannte Nullstellen- bzw. Indexformel auch im Rahmen stetiger Funktionen ihre Gültigkeit behält. Man beachte dabei, dass Indizes von Nullstellen nun aber auch negativ sein können!

Definition 1.14. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine isolierte Nullstelle von f ; das heißt, es gebe ein $\rho > 0$, so dass $f : \overline{B_\rho(z_0)} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist, $f(z_0) = 0$ und $\forall z \in \overline{B_\rho(z_0)} \setminus \{z_0\} : f(z) \neq 0$. Dann nennt man den lokalen Abbildungsgrad

$$\text{ind}(f, z_0) := d(f, B_\rho(z_0), 0)$$

den *Index der Nullstelle* z_0 von f .

Satz 1.15 (Indexsatz). Sei $f : \overline{B_R(0)} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $f|_{\partial B_R(0)} \neq 0$. f habe in $B_R(0)$ nur die isolierten paarweise verschiedenen Nullstellen $z_1, \dots, z_\ell : f(z_1) = \dots = f(z_\ell) = 0, \forall z \in \overline{B_R(0)} \setminus \{z_1, \dots, z_\ell\} : f(z) \neq 0$. Dann gilt:

$$d(f, B_R(0), 0) = \sum_{j=1}^{\ell} \text{ind}(f, z_j).$$

Beweis. Seien $\varepsilon > 0$ und $\rho_1, \dots, \rho_\ell > 0$ so, dass $\overline{B_{\rho_j}(z_j)} \subset B_R(0)$, $\overline{B_{\rho_j}(z_j)} \cap \overline{B_{\rho_k}(z_k)} = \emptyset$ für $j \neq k$, $\forall z \in \overline{B_R(0)} \setminus \bigcup_{j=1}^{\ell} \overline{B_{\rho_j}(z_j)} : |f(z)| > 2\varepsilon$. Sei $\tilde{f} \in C^2$ so, dass $\forall z \in \overline{B_R(0)} : |f(z) - \tilde{f}(z)| < \varepsilon$, dann gilt nach dem Satz von Rouché:

$$\begin{aligned} j = 1, \dots, \ell : \quad \text{ind}(f, z_j) &= d(\tilde{f}, B_{\rho_j}(z_j), 0), \\ d(f, B_R(0), 0) &= d(\tilde{f}, B_R(0), 0), \end{aligned}$$

und für \tilde{f} hat man nach dem Stokeschen Satz (wobei alle Kurven links herum parametrisiert sind):

$$\begin{aligned} d(\tilde{f}, B_R, 0) &- \sum_{j=1}^{\ell} d(\tilde{f}, B_{\rho_j}(z_j), 0) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(0)} \left(\frac{\tilde{f}_x}{\tilde{f}} dx + \frac{\tilde{f}_y}{\tilde{f}} dy \right) - \sum_{j=1}^{\ell} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\rho_j}(z_j)} \left(\frac{\tilde{f}_x}{\tilde{f}} dx + \frac{\tilde{f}_y}{\tilde{f}} dy \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial(B_R(0) \setminus (\cup B_{\rho_j}(z_j)))} \left(\frac{\tilde{f}_x}{\tilde{f}} dx + \frac{\tilde{f}_y}{\tilde{f}} dy \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_R(0) \setminus (\cup B_{\rho_j}(z_j))} \left(-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tilde{f}_x}{\tilde{f}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{f}_y}{\tilde{f}} \right) \right) d(x, y). \end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass $\tilde{f}|_{\overline{B_R(0)} \setminus (\cup B_{\rho_j}(z_j))} \neq 0$. Für den Integranden gilt:

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tilde{f}_x}{\tilde{f}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{f}_y}{\tilde{f}} \right) = \frac{1}{\tilde{f}} (-\tilde{f}_{xy} + \tilde{f}_{yx}) - \frac{1}{\tilde{f}^2} (-\tilde{f}_x \tilde{f}_y + \tilde{f}_y \tilde{f}_x) = 0,$$

woraus direkt die Indexformel folgt. □

2 Der Brouwersche Abbildungsgrad in \mathbb{R}^n

Ursprünglich (vor 1950) war der Abbildungsgrad ein Werkzeug allein aus der algebraischen Topologie. Hier werden wir nun eine Verallgemeinerung der *analytischen* Theorie aus §1 für $n = 2$ auf beliebige Raumdimensionen darstellen.

Sei $f = u + iv : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, der Einfachheit halber zweimal stetig differenzierbar angenommen, $|f|_{\partial B_R(0)} > \varepsilon > 0$, definitionsgemäß ist dann

$$d(f, B_R(0), 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \left(\frac{f_x}{f} dx + \frac{f_y}{f} dy \right). \quad (2.1)$$

Aus verschiedenen Gründen erscheint diese Formel zur Verallgemeinerung auf beliebige Raumdimensionen zunächst wenig ermutigend:

- Relativ starke Regularitätsanforderungen an $\partial\Omega = \partial B_R(0)$,
- Was ersetzt i.a. $\frac{1}{f}$?
- Wie konstruiert man aus $f, \nabla f$ eine geeignete $(n - 1)$ -Form?

Mit Hilfe des Stokesschen Satzes soll nun (2.1) in ein verallgemeinerungsfähiges Flächenintegral umgeformt werden. Zur Löschung möglicher Singularitäten von $\frac{1}{f}$ führen wir eine Abschneidefunktion ein:

Sei $0 < \delta < \varepsilon$, $\psi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ so, dass

$$\psi(r) := \begin{cases} 0 & , \quad r \leq \delta, \\ 1 & , \quad r \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Insbesondere ist $\psi(|f(z)|) = 0$ in einer Umgebung der Nullstellenmenge von f und $\psi(|f(z)|) = 1$ auf $\partial B_R(0)$. Also wird $\frac{\psi(|f(z)|)}{f(z)}$ auf der Nullstellenmenge von f durch 0 stetig differenzierbar nach $\overline{B_R(0)}$ fortgesetzt, und wir erhalten mit Hilfe des Stokesschen Satzes:

$$\begin{aligned} d(f, B_R(0), 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{\psi(|f|)}{f} (f_x dx + f_y dy) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|<R} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi(|f|) \frac{f_y}{f} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\psi(|f|) \frac{f_x}{f} \right) \right\} d(x, y) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|<R} \left\{ f_y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi(|f|)}{f} \right) - f_x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\psi(|f|)}{f} \right) \right\} d(x, y) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|<R} \left\{ \frac{f_y}{f} \frac{\partial}{\partial x} (\psi(|f|)) - \frac{f_x}{f} \frac{\partial}{\partial y} (\psi(|f|)) \right\} d(x, y) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|<R} \left\{ \frac{f_y}{f} \cdot \psi'(|f|) \cdot \frac{1}{|f|} \cdot (u u_x + v v_x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{f_x}{f} \cdot \psi'(|f|) \cdot \frac{1}{|f|} \cdot (u u_y + v v_y) \right\} d(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|<R} \frac{\psi'(|f|)}{|f|} \cdot \frac{1}{f} \cdot \left\{ \begin{array}{l} u u_x u_y + v v_x u_y \\ - u u_x u_y - v u_x v_y \\ + i u u_x v_y + i v v_x v_y \\ - i u u_y v_x - i v v_y v_x \end{array} \right\} d(x, y) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|<R} \frac{\psi'(|f|)}{|f|} \cdot \frac{1}{f} \cdot (u_x v_y - v_x u_y) \cdot \underbrace{(-v + iu)}_{i f} d(x, y) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{|z|<R} \frac{\psi'(|f|)}{|f|} (u_x v_y - v_x u_y) d(x, y).
\end{aligned}$$

Mit der Bezeichnung

$$J_f(x, y) = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \text{ für die Jacobi-Determinante}$$

und der Setzung

$$\omega(r) := \frac{\psi'(r)}{2\pi r}$$

wird

$$d(f, B_R, 0) = \int_{|z|<R} \omega(|f(x, y)|) \cdot J_f(x, y) d(x, y). \quad (2.2)$$

Dabei ergeben sich aus der Herleitung folgende Bedingungen an ω :

1. $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.
2. Ist $|f(z)| > \varepsilon$ für $|z| = R$ und ein geeignetes $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $\delta \in (0, \varepsilon)$ derart, dass $\omega(r) = 0$ für $r \geq \varepsilon$ und $r \leq \delta$ gilt.
3. Für $r \geq \varepsilon$ ist $1 = \psi(r) = \int_0^r \psi'(\rho) d\rho = 2\pi \int_0^r \rho \omega(\rho) d\rho$, insbesondere also

$$1 = 2\pi \int_0^\infty \rho \omega(\rho) d\rho = \int_{\mathbb{R}^2} \omega(|(x, y)|) d(x, y).$$

Soweit die vorbereitenden Umformungen für den Fall $n = 2$, von nun an werden wir beliebiges $n \in \mathbb{N}$ betrachten.

Die Relation (2.2) soll zur Definition erhoben werden. Vorab ist die Wohldefiniertheit zu klären, d. h. die Unabhängigkeit von der Wahl der Testfunktion ω .

Bezeichnung. Mit $C^k := C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir die k -mal stetig differenzierbaren Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, sofern nicht ausdrücklich etwas Anderes vereinbart wird.

Hilfssatz 2.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, $f \in C^2$, $|f(x)| > \varepsilon > 0$ auf $\partial\Omega$. Ferner sei $\omega \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\omega(r) = 0$ für $r \geq \varepsilon$ und $r \leq \delta$ mit einem geeigneten $\delta \in (0, \varepsilon)$. Ferner sei $\int_0^\infty r^{n-1} \omega(r) dr = 0$. Dann gilt:

$$\int_{\Omega} \omega(|f(x)|) J_f(x) dx = 0. \quad (2.3)$$

Beweis. Die Strategie besteht darin, ein Vektorfeld $\tau \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ zu konstruieren mit $\operatorname{div} \tau(x) = \omega(|f(x)|) J_f(x)$. Damit ergibt dann die Elementarform des Gaußschen Satzes, dass die linke Seite von (2.3) $= \int_{\Omega} \operatorname{div} \tau \, dx = 0$.

(a) *Zur Divergenzstruktur der Jacobi-Determinante:*

Diese lässt sich zum Beispiel in zwei Dimensionen schnell einsehen:

$$f_{x_1}^{(1)} f_{x_2}^{(2)} - f_{x_2}^{(1)} f_{x_1}^{(2)} = (f_{x_1}^{(1)} f_{x_2}^{(2)})_{x_1} - (f_{x_1}^{(1)} f_{x_2}^{(2)})_{x_2}.$$

Um auch im Allgemeinen etwas Analoges zu erhalten, soll die Adjunktenformel $A \cdot \operatorname{ad} A = \det A \cdot E$ verwendet werden.

Es bezeichne $Df(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n}$ die Jacobi-Matrix der Abbildung f , $A_{ji}(x)$ deren (j, i) -ten Kofaktor, d.h. das $(-1)^{i+j}$ -fache der Determinante von $Df(x)$ ohne deren j -te Zeile und i -te Spalte. Man hat also

$$A_{ji}(x) = \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \underbrace{e_j}_{i\text{-te Spalte}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Die Adjunkte ist dann definiert als die transponierte Kofaktoren-Matrix:

$$\operatorname{ad}(Df(x)) = (A_{ji})_{i,j=1,\dots,n}.$$

Aus $A \cdot \operatorname{ad} A = \det A \cdot E$ folgt für $k = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} J_f(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \cdot A_{ki} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (f_k A_{ki}) - f_k \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_{ki}}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Der erste Schritt ist also erreicht, wenn für $k = 1, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial A_{ki}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.5)$$

gezeigt wird.

Beweis von (2.5): Aus der definierenden Gleichung der Kofaktoren und der Produktregel erhält man:

$$\begin{aligned} A_{ki} &= \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{i-1}}, \underbrace{e_k}_{i\text{-te Spalte}}, \frac{\partial f}{\partial x_{i+1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ki} &= \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^n \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_\ell}}_{\ell\text{-te Spalte}}, \dots, \underbrace{e_k}_{i\text{-te Spalte}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right). \end{aligned}$$

Indem man diesen Term mit Faktor $\frac{1}{2}$ zweimal hinschreibt und im zweiten Term i und ℓ miteinander vertauscht, folgt weiter

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ki} &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,\ell=1 \\ i \neq \ell}}^n \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_\ell}}_{\ell\text{-te Spalte}}, \dots, \underbrace{e_k}_{i\text{-te Spalte}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,\ell=1 \\ i \neq \ell}}^n \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \underbrace{e_k}_{\ell\text{-te Spalte}}, \dots, \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_\ell}}_{i\text{-te Spalte}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right). \end{aligned}$$

Für festes i, ℓ entsprechen die Determinanten einander bis auf die Vertauschung zweier Spalten, d. h. bis auf den Faktor (-1) , womit die Gleichung (2.5) bewiesen ist.

Aus (2.5) und (2.4) folgt somit für $k = 1, \dots, n$:

$$J_f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (f_k(x) \cdot A_{ki}(x)) \quad (2.6)$$

bzw.

$$J_f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_k(x) A_{ki}(x) \right). \quad (2.6')$$

(b) *Zur Divergenzstruktur von $\omega(|f(x)|)J_f(x)$:*

Ansatz: Wir ersetzen in (2.6') die Konstante $\frac{1}{n}$ durch $\varphi(|f(x)|)$ mit einer noch zu bestimmenden hinreichend glatten Funktion $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die $\varphi(r) = 0$ für $r \leq \delta$ erfüllt. In den folgenden Umformungen verwenden wir (2.6'):

$$\begin{aligned} \omega(|f(x)|)J_f(x) &\stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varphi(|f(x)|) \left(\sum_{k=1}^n f_k(x) A_{ki}(x) \right) \right) \\ &= \sum_{i,k,\ell=1}^n \left(\varphi'(|f(x)|) \frac{f_\ell(x)}{|f(x)|} \cdot \underbrace{\frac{\partial f_\ell}{\partial x_i} A_{ki} \cdot f_k(x)}_{\text{Summe über } i \text{ ergibt } \delta_{k\ell} J_f(x)} \right) \\ &\quad + n\varphi(|f(x)|) \cdot J_f(x) \\ &= \left(\varphi'(|f(x)|)|f(x)| + n\varphi(|f(x)|) \right) J_f(x). \end{aligned}$$

Das ist erfüllt, falls:

$$\begin{aligned} \omega(r) &= r\varphi'(r) + n\varphi(r) = r^{1-n} (r^n \varphi(r))' \\ \Leftrightarrow (r^n \varphi)' &= r^{n-1} \omega(r) \\ \Leftrightarrow r^n \varphi &= \int_0^r \rho^{n-1} \omega(\rho) d\rho + 0. \end{aligned}$$

Somit löst

$$\varphi(r) = r^{-n} \int_0^r \rho^{n-1} \omega(\rho) d\rho \quad (2.7)$$

dieses Problem. Zudem ist, und hier gehen die Voraussetzungen unseres Hilfssatzes entscheidend ein: $\varphi(r) = 0$ für $r \leq \delta$ und $r \geq \varepsilon$. Insbesondere haben wir $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(c) Zusammenfassend gilt in Ω mit dem gemäß (2.7) gewählten φ :

$$\begin{aligned}\omega(|f(x)|)J_f(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varphi(|f(x)|) \left(\sum_{k=1}^n f_k(x) A_{ki}(x) \right) \right) \\ &=: \operatorname{div} \tau(x).\end{aligned}$$

Da auf $\partial\Omega$ gemäß unseren Voraussetzungen $|f(x)| > \varepsilon$ und deshalb $\varphi(|f(x)|) = 0$ gilt, haben wir somit wie angestrebt $\operatorname{supp} \tau \subset \Omega$ und damit das Vektorfeld $\tau \in C_0^1(\Omega)$ erhalten.

□

Bemerkung 2.2. Nachdem $f \in C^1$ gemäß der zweiten Formulierung des Satzes A.5 von Weierstraß in der C^1 -Norm auf kompakten Bereichen durch eine Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C^2$ approximiert werden kann, bleibt Hilfssatz 2.1 auch für $f \in C^1$ gültig.

Definition 2.3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, $f \in C^1$ und $f \neq 0$ auf $\partial\Omega$. Seien $\delta, \varepsilon > 0$ mit $|f(x)| > \varepsilon > \delta > 0$ für $x \in \partial\Omega$. Sei ferner $\omega \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ so gewählt, dass $\omega(r) = 0$ für $r \leq \delta$ und $r \geq \varepsilon$ sowie $\int_{\mathbb{R}^n} \omega(|y|) dy = 1$ erfüllt ist.

Dann wird durch

$$d(f, \Omega) := d(f, \Omega, 0) := \int_{\Omega} \omega(|f(x)|) J_f(x) dx$$

der *Abbildungsgrad von f auf Ω bezüglich 0 (degree of mapping)* erklärt.

Bemerkung 2.4. (a) Aus Hilfssatz 2.1 ergibt sich unmittelbar die Wohldefiniertheit, wenn man noch die elementare Formel für radialsymmetrische Integration $\int_{B_R} \omega(|y|) dy = n e_n \int_0^R \rho^{n-1} \omega(\rho) d\rho$ zu Grunde legt. Dabei bezeichnet $e_n = |B_1(0)|$ das n -dimensionale Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel. Die allgemeine Transformationsformel wird nicht benötigt.

(b) Die Ganzzahligkeit des Abbildungsgrades, d.h. $d(f, \Omega, 0) \in \mathbb{Z}$, können wir erst später und mit beträchtlichem Aufwand zeigen. Dazu siehe unten Satz 3.10.

(c) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, $x_0 \notin \partial\Omega$. Dann kann man sich leicht davon überzeugen, dass gilt:

$$\begin{aligned}d(\operatorname{id} - x_0, \Omega, 0) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } x_0 \in \Omega, \\ 0, & \text{falls } x_0 \notin \overline{\Omega}, \end{cases} \\ d(-(\operatorname{id} - x_0), \Omega, 0) &= \begin{cases} (-1)^n, & \text{falls } x_0 \in \Omega, \\ 0, & \text{falls } x_0 \notin \overline{\Omega}. \end{cases}\end{aligned}$$

Die nächsten Ziele sind die Ausdehnung der Definition auf stetige Funktionen und der Nachweis der Homotopieinvarianz des Abbildungsgrades. Dazu dient das folgende „ 7ε -Lemma“, das im wesentlichen auf der Unabhängigkeit des Abbildungsgrades von der Wahl der Testfunktion beruht.

Hilfssatz 2.5 (7ε -Lemma von Heinz). Seien $f_1, f_2 \in C^1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, für $x \in \partial\Omega$ gelte $|f_i(x)| > 7\varepsilon > 0$ ($i = 1, 2$). Ferner gelte $|f_1(x) - f_2(x)| < \varepsilon$ für $x \in \bar{\Omega}$. Dann ist

$$d(f_1, \Omega, 0) = d(f_2, \Omega, 0).$$

Beweis. Man führt eine „Übergangsfunktion“ f_3 ein, die abhängig von der Größe von $|f_1|$ teilweise mit f_1 und teilweise mit f_2 übereinstimmt.

Sei $\lambda \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ und

$$\lambda(r) = \begin{cases} 1, & r \leq 3\varepsilon, \\ 0, & 4\varepsilon \leq r. \end{cases}$$

Wir setzen $f_3(x) = (1 - \lambda(|f_1(x)|))f_1(x) + \lambda(|f_1(x)|)f_2(x)$. Für $x \in \partial\Omega$ ist $f_3(x) = f_1(x)$, $|f_3(x)| > 7\varepsilon$, für $x \in \bar{\Omega}$ ist

$$\begin{aligned} |f_3(x) - f_1(x)| &= \lambda(|f_1(x)|)|f_1(x) - f_2(x)| < \varepsilon \\ |f_3(x) - f_2(x)| &= (1 - \lambda(|f_1(x)|))|f_1(x) - f_2(x)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Schließlich ist,

$$\begin{aligned} \text{falls } 0 \leq |f_1(x)| \leq 3\varepsilon : & f_3(x) = f_2(x), \\ \text{falls } 4\varepsilon \leq |f_1(x)| : & f_3(x) = f_1(x). \end{aligned}$$

Wir betrachten Testfunktionen $\omega_1, \omega_2 \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \omega_i(|x|) dx = 1$ und

$$\begin{aligned} \omega_1(r) &= 0 \quad \text{für } r \leq 5\varepsilon \quad \text{und} \quad r \geq 6\varepsilon, \\ \omega_2(r) &= 0 \quad \text{für } r \leq \varepsilon \quad \text{und} \quad r \geq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $x \in \Omega$:

$$\omega_1(|f_1(x)|)J_{f_1}(x) = \omega_1(|f_3(x)|)J_{f_3}(x), \quad (2.8)$$

$$\omega_2(|f_2(x)|)J_{f_2}(x) = \omega_2(|f_3(x)|)J_{f_3}(x). \quad (2.9)$$

Zu (2.8): Auf der offenen Teilmenge $\{x \in \Omega : |f_1(x)| > 4\varepsilon\}$ stimmen f_1 und f_3 , also auch J_{f_1} und J_{f_3} überein. Auf $\{x \in \Omega : |f_1(x)| \leq 4\varepsilon\}$ hat man hingegen $\omega_1(|f_1(x)|) = 0 = \omega_1(|f_3(x)|)$.

Zu (2.9): Auf der offenen Teilmenge $\{x \in \Omega : |f_1(x)| < 3\varepsilon\}$ hat man $f_2 = f_3$ und damit auch $J_{f_2} = J_{f_3}$. Auf $\{x \in \Omega : |f_1(x)| \geq 3\varepsilon\}$ ist wiederum $\omega_2(|f_2(x)|) = 0 = \omega_2(|f_3(x)|)$.

Zuletzt sind ω_1, ω_2 zulässige Testfunktionen für f_1, f_2, f_3 , und es folgt mittels Hilfssatz 2.1:

$$\begin{aligned} d(f_1, \Omega) &= \int_{\Omega} \omega_1(|f_1(x)|)J_{f_1}(x) dx = \int_{\Omega} \omega_1(|f_3(x)|)J_{f_3}(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \omega_2(|f_3(x)|)J_{f_3}(x) dx = \int_{\Omega} \omega_2(|f_2(x)|)J_{f_2}(x) dx = d(f_2, \Omega). \end{aligned}$$

□

Eine erste unmittelbare Konsequenz von Hilfssatz 2.5 ist:

Hilfssatz 2.6. Sei $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $f \neq 0$ auf $\partial\Omega$. Die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C^1$ konvergiere auf $\overline{\Omega}$ gleichmäßig gegen f . Dann existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k, \ell \geq k_0$ gilt

$$f_k \neq 0 \text{ auf } \partial\Omega, \quad f_\ell \neq 0 \text{ auf } \partial\Omega, \quad d(f_k, \Omega) = d(f_\ell, \Omega).$$

Definition 2.7. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $f \neq 0$ auf $\partial\Omega$. Man wähle dazu eine approximierende Folge $(f_k) \subset C^1$, $f_k \neq 0$ auf $\partial\Omega$, so dass $f_k \rightarrow f$ auf $\overline{\Omega}$ gleichmäßig konvergiert.

Dann wird der *Abbildungsgrad von f auf Ω (bezüglich 0)* erklärt durch

$$d(f, \Omega) := d(f, \Omega, 0) := \lim_{k \rightarrow \infty} d(f_k, \Omega, 0).$$

Es sei an die Sätze von Weierstraß A.3 und Tietze A.6 erinnert, die die Existenz einer solchen approximierenden Folge sicherstellen.

Satz 2.8 (Homotopiesatz). Sei $(f_\tau)_{\tau \in [0,1]} \subset C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ eine Schar von Abbildungen, die die Zulässigkeitsbedingungen der Homotopie

$$\begin{aligned} & f_\tau \neq 0 \text{ auf } \partial\Omega \quad (\tau \in [0, 1]); \\ & ((\tau, x) \mapsto f_\tau(x)) \in C^0([0, 1] \times \overline{\Omega}) \end{aligned}$$

erfüllen. Dann ist

$$[0, 1] \ni \tau \rightarrow d(f_\tau, \Omega, 0)$$

konstant.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $\tau \in [0, 1]$, $x \in \partial\Omega$ gilt:

$$|f_\tau(x)| > 8\varepsilon.$$

Wir bestimmen dazu ein $\delta > 0$, so dass aus $\tau, \tau' \in [0, 1]$, $|\tau - \tau'| \leq \delta$ für alle $x \in \overline{\Omega}$ folgt

$$|f_\tau(x) - f_{\tau'}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für je zwei derartige τ, τ' bestimme man $\tilde{f}_\tau, \tilde{f}_{\tau'} \in C^1$ mit

$$\begin{aligned} \left| f_\tau(x) - \tilde{f}_\tau(x) \right| &< \frac{\varepsilon}{4}, \quad \left| f_{\tau'}(x) - \tilde{f}_{\tau'}(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (x \in \overline{\Omega}), \\ d(f_\tau, \Omega) &= d(\tilde{f}_\tau, \Omega), \quad d(f_{\tau'}, \Omega) = d(\tilde{f}_{\tau'}, \Omega). \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \left| \tilde{f}_\tau(x) \right| &> 7\varepsilon, \quad \left| \tilde{f}_{\tau'}(x) \right| > 7\varepsilon \quad (x \in \partial\Omega); \\ \left| \tilde{f}_\tau(x) - \tilde{f}_{\tau'}(x) \right| &< \varepsilon \quad (x \in \overline{\Omega}). \end{aligned}$$

Das 7ε -Lemma 2.5 zeigt schließlich

$$d(f_\tau, \Omega) = d(\tilde{f}_\tau, \Omega) = d(\tilde{f}_{\tau'}, \Omega) = d(f_{\tau'}, \Omega).$$

D. h. $\tau \rightarrow d(f_\tau, \Omega)$ ist jeweils auf Intervallen der festen Länge δ und damit auf $[0, 1]$ konstant. \square

Der nächste Satz befasst sich mit unserem eigentlichen Ziel, der Nullstellensuche:

Satz 2.9. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $f \neq 0$ auf $\partial\Omega$. Es sei $d(f, \Omega, 0) \neq 0$. Dann existiert ein $\xi \in \Omega$ mit

$$f(\xi) = 0.$$

Beweis. Annahme: $f \neq 0$ in $\overline{\Omega}$. Man wähle $\varepsilon > 0$ mit $|f(x)| \geq 2\varepsilon$ in $\overline{\Omega}$ und bestimme ein $\tilde{f} \in C^1$ mit

$$\begin{aligned} |f(x) - \tilde{f}(x)| < \varepsilon, \quad \text{sowie} \quad d(f, \Omega, 0) = d(\tilde{f}, \Omega, 0), \\ \Rightarrow |\tilde{f}(x)| > \varepsilon \quad (x \in \overline{\Omega}). \end{aligned}$$

Wir wählen eine Testfunktion $\omega \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit den üblichen Bedingungen, sowie mit $\omega(r) = 0$ für $r \geq \varepsilon$. Damit ist

$$0 \neq d(f, \Omega, 0) = d(\tilde{f}, \Omega, 0) = \int_{\Omega} \omega(|f(x)|) J_{\tilde{f}}(x) dx = 0.$$

Widerspruch ! □

Satz 2.10 (Satz von Rouché). Seien $f_0, f_1 \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, für $x \in \partial\Omega$ gelte

$$|f_0(x) - f_1(x)| < |f_1(x)|.$$

Dann ist

$$d(f_0, \Omega, 0) = d(f_1, \Omega, 0).$$

Beweis. Man beachte, dass aus der Voraussetzung $f_0(x) \neq 0$, $f_1(x) \neq 0$ für $x \in \partial\Omega$ folgt. Für $\tau \in [0, 1]$ betrachte man die triviale Homotopie $f_{\tau}(x) = \tau f_0(x) + (1 - \tau)f_1(x)$. □

Bemerkung. Laut dem Satz von Rouché hängt $d(f, \Omega, 0)$ nur von $f|_{\partial\Omega}$ ab. Deshalb definieren wir:

Definition 2.11. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig, $0 \notin f(\partial\Omega)$. Sei $\hat{f} \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ eine stetige Fortsetzung von f , d.h. $\hat{f}|_{\partial\Omega} = f$. Dann heißt

$$v(f, \partial\Omega) := d(\hat{f}, \Omega)$$

die *Ordnung von f auf Ω* (bezüglich 0).

Man beachte, dass die Existenz dieser Fortsetzung wieder durch den Satz von Tietze A.6 gesichert wird. Indem man diesen Satz direkt auf $[a, b] \times \partial\Omega$ anwendet, gilt auch für die Ordnung in offensichtlicher Weise ein Homotopiesatz.

Zum Abschluss dieses Abschnitts folgen zwei der bekanntesten Sätze aus der Topologie.

Satz 2.12 (Fixpunktsatz von Brouwer). Jede stetige Abbildung $f : \overline{B_1(0)} \rightarrow \overline{B_1(0)}$ der abgeschlossenen Einheitskugel in sich hat einen Fixpunkt, d. h. es existiert ein $\xi \in \overline{B_1(0)}$ mit

$$f(\xi) = \xi.$$

Beweis. Für $\tau \in [0, 1)$, $x \in \overline{B_1(0)}$ betrachten wir die stetige Schar von Abbildungen

$$f_\tau(x) = x - \tau f(x).$$

Für $x \in \partial B_1(0)$ ist $|f_\tau(x)| \geq |x| - \tau|f(x)| \geq 1 - \tau > 0$. Wegen des Homotopiesatzes gilt für $0 \leq \tau < 1$:

$$d(f_\tau, B_1(0)) = d(f_0, B_1(0)) = d(id, B_1(0)) = 1.$$

Also existiert für jedes $\tau \in [0, 1)$ ein $\xi_\tau \in B_1(0)$, so dass $0 = f_\tau(\xi_\tau) = \xi_\tau - \tau f(\xi_\tau)$.

Nun existiert nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß eine Folge $\tau_k \nearrow 1$ sowie ein $\xi \in \overline{B_1(0)}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{\tau_k} = \xi$.

Auf Grund der Stetigkeit von f folgt schließlich: $0 = \xi - f(\xi)$. □

Bemerkung 2.13. (a) Wie man am Beispiel der Identität sieht, kann f beliebig viele Fixpunkte haben.

(b) Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und homöomorph zu $B_1(0)$, dann gilt auch in K der Brouwersche Fixpunktsatz.

(c) Wir werden später zeigen: Zumindest für kompaktes konvexes K gilt der Brouwersche Fixpunktsatz, dazu siehe man unten Satz 6.3.

(d) Der Satz gilt nicht in der Kugelschale $K = \overline{B_2(0)} \setminus B_1(0)$; man betrachte beispielsweise $f(x) = -x$.

Satz 2.14 (Igelsatz von Poincaré–Brouwer). *Sei n ungerade, $n \geq 3$. Dann gibt es auf der Sphäre $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ kein stetiges normiertes Tangentialvektorfeld, d.h. kein stetiges $\varphi : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, für das $|\varphi(x)| = 1$ und $\varphi(x) \cdot x = 0$ für alle $x \in S^{n-1}$ gilt.*

In ungeraden Raumdimensionen kann der Igel also nicht gekämmt werden.

Beweis. Sei $\varepsilon \in \{+1, -1\}$, $f_0(x) := \varepsilon x$. Annahme: So ein φ existiert doch.

Für $(\tau, x) \in [0, 1] \times S^{n-1} = [0, 1] \times \partial B_1(0)$ definieren wir

$$f_\tau(x) = \tau\varphi(x) + (1 - \tau)f_0(x).$$

Die Zulässigkeit dieser Homotopie ergibt sich aus der folgenden Rechnung:

$$\begin{aligned} |f_\tau(x)|^2 &= \tau^2|\varphi(x)|^2 + 2\tau(1 - \tau)\underbrace{(\varphi(x) \cdot f_0(x))}_{=0} + (1 - \tau)^2|f_0(x)|^2 \\ &= \tau^2 + (1 - \tau)^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Der Homotopiesatz zeigt also

$$v(\varphi, S^{n-1}) = v(f_0, S^{n-1}) = d(f_0, B_1(0)) = \varepsilon^n.$$

Das bedeutet, dass dann $(-1)^n = 1$ gelten würde. Bei ungeradem n ergibt sich ein Widerspruch. □

3 Der Index einer Abbildung, die Ganzzahligkeit des Abbildungsgrades

Hilfssatz 3.1 (Additivität des Abbildungsgrades). *Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen und disjunkt. Sei $f \in C^0$ mit $f|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2} \neq 0$. Dann gilt:*

$$d(f, \Omega_1 \cup \Omega_2) = d(f, \Omega_1) + d(f, \Omega_2).$$

Beweis. Approximation durch $(f_k) \subset C^1$; Additivität des Integrals. □

Hilfssatz 3.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, $f \in C^0$ mit $f|_{\partial\Omega} \neq 0$. Sei $F = \{x \in \bar{\Omega} : f(x) = 0\}$. Weiter sei Ω_0 offen mit $F \subset \Omega_0 \subset \Omega$. Dann gilt*

$$d(f, \Omega) = d(f, \Omega_0).$$

Beweis. Für geeignetes $\varepsilon > 0$ ist $|f(x)| > \varepsilon$ auf $\bar{\Omega} \setminus \Omega_0$; man approximiere f auf $\bar{\Omega}$ gleichmäßig durch $(f_k) \subset C^1$, so dass $|f_k(x)| > \varepsilon$ auf $\bar{\Omega} \setminus \Omega_0$.

Sei ω zulässige Testfunktion mit $\omega(r) = 0$ für $r \geq \varepsilon$, dann gilt

$$d(f, \Omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \omega(|f_k(x)|) J_{f_k}(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_0} \omega(|f_k(x)|) J_{f_k}(x) dx = d(f, \Omega_0).$$

□

Definition 3.3. Sei $z \in \mathbb{R}^n, \rho > 0, f \in C^0(\overline{B_\rho(z)}, \mathbb{R}^n), f(z) = 0, f(x) \neq 0$ für $x \in \overline{B_\rho(z)} \setminus \{z\}$. Dann heißt

$$\text{ind}(f, z) := d(f, B_\rho(z))$$

der *Index* der Nullstelle z von f .

Damit folgt unmittelbar:

Satz 3.4 (Indexsatz). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, $f \in C^0$ mit $f|_{\partial\Omega} \neq 0$. Ferner habe f in Ω genau p paarweise verschiedene Nullstellen $z_1, \dots, z_p \in \Omega$. Dann gilt:*

$$d(f, \Omega) = \sum_{j=1}^p \text{ind}(f, z_j).$$

Unsere nächste Aufgabe besteht nun in der Indexberechnung, zunächst für isolierte, nichtdegenerierte Nullstellen stetig differenzierbarer Abbildungen. Dann wird der Nachweis zu führen sein, dass diese Situation generisch ist, dass man diese also durch Approximation mit beliebig kleinem Fehler herstellen kann.

Zunächst rekapitulieren wir einen Faktorisierungssatz aus der Linearen Algebra:

Hilfssatz 3.5. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix, d.h. $\det(A) \neq 0$. Dann existieren eine positiv definite symmetrische Matrix P und eine orthogonale Matrix $S \in O(n)$ mit $A = SP$.*

Beweis. Über die Hauptachsentransformation findet man ein positiv definites symmetrisches P mit $P^2 = A^t \cdot A$. Setze $S = AP^{-1}$, dann ist definitionsgemäß $A = SP$, und wegen

$$S^t S = (AP^{-1})^t \cdot (AP^{-1}) = \underbrace{(P^{-1})^t A^t A P}_{\text{symmetrisch}} = P^{-1} P^2 P^{-1} = E$$

ist S orthogonal. □

Mit Hilfe dieser Faktorisierung und des Homotopiesatzes können wir nun den Index von isolierten regulären Nullstellen differenzierbarer Abbildungen bestimmen.

Satz 3.6. Sei $z \in \mathbb{R}^n, \rho > 0, f \in C^0(\overline{B_\rho(z)}, \mathbb{R}^n)$, f sei in z (total) differenzierbar, $f(z) = 0$, $J_f(z) \neq 0, f(x) \neq 0$ für $x \in \overline{B_\rho(z)} \setminus \{z\}$. Dann gilt:

$$\text{ind}(f, z) = \text{sgn } J_f(z).$$

Beweis. Auf Grund der Differenzierbarkeit in z ist auf $\overline{B_\rho(z)}$

$$f(x) = \underbrace{f(z)}_{=0} + Df(z) \cdot (x - z) + R(x) \quad \text{mit} \quad \lim_{x \rightarrow z} \frac{R(x)}{|x - z|} = 0. \quad (3.1)$$

In einem ersten Schritt werden wir zeigen, dass das Restglied für die Indexberechnung unerheblich ist und man sich auf die reguläre lineare Approximation beschränken kann. Es bezeichne $f_0(x) = Df(z) \cdot (x - z)$. Da $Df(z)$ regulär ist, gilt mit einem geeigneten $C > 0$:

$$|x - z| = |(Df(z))^{-1} \cdot Df(z) \cdot (x - z)| \leq C |Df(z) \cdot (x - z)|.$$

Indem man ρ gegebenenfalls verkleinert, hat man wegen (3.1) auf $\partial B_\rho(z)$:

$$|f_0(x)| = |Df(z) \cdot (x - z)| \geq \frac{1}{C} \cdot \rho > |R(x)| = |f_0(x) - f(x)|.$$

Der Satz von Rouché 2.10 liefert

$$\text{ind}(f, z) = d(f, B_\rho(z)) = d(f_0, B_\rho(z)) = \text{ind}(f_0, z).$$

In einem zweiten Schritt werden wir die lineare Abbildung f_0 durch eine Drehung bzw. Drehspiegelung ersetzen. Gemäß Hilfssatz 3.5 zerlegen wir also $Df(z) = SP$ mit $S \in O(n)$ und P symmetrisch positiv definit, so dass insbesondere $\det(P) > 0$ und folglich

$$\det S = \text{sgn } \det Df(z) = \text{sgn } J_f(z) \quad (3.2)$$

gilt. Nun wird die lineare Abbildung f_0 mittels

$$f_\tau(x) = S(\tau E + (1 - \tau)P) \cdot (x - z)$$

in die Dreh(spiegel)ung

$$f_1(x) = S \cdot (x - z)$$

homotopiert. Es ist $f_\tau(x) \neq 0$ auf $\partial B_\rho(z)$, diese Homotopie ist also zulässig. Andernfalls hätte man nämlich ein $y \neq 0$ und ein $\tau \in (0, 1)$, so dass $(\tau E + (1 - \tau)P) \cdot y = 0$. Daraus erhalte man

$$Py = -\frac{\tau}{1 - \tau}y,$$

also einen negativen Eigenwert der Matrix P im Widerspruch zu deren positiver Definitheit.

Damit haben wir insgesamt das Folgende erreicht, dabei sei ω eine für die Berechnung des lokalen Abbildungsgrades zulässige Testfunktion:

$$\begin{aligned} \text{ind}(f, z) &= \text{ind}(f_0, z) = \text{ind}(f_1, z) = \int_{B_\rho(z)} \omega(|S \cdot (x - z)|) J_{f_1}(x) dx \\ &= (\det S) \int_{B_\rho(z)} \omega(|x - z|) dx = (\det S) \int_{B_\rho(0)} \omega(|x|) dx = \text{sgn } J_f(z). \end{aligned}$$

Bei diesen Rechnungen ist noch die Bewegungsinvarianz des Integrals benutzt worden. \square

Für hinreichend reguläre Abbildungen kann man die bisherigen Ergebnisse zusammenfassen:

Hilfssatz 3.7. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, $f \in C^0$, $f|_{\partial\Omega} \neq 0$. Ferner habe f in Ω genau p paarweise verschiedene Nullstellen z_1, \dots, z_p ; f sei in z_1, \dots, z_p (total) differenzierbar mit $J_f(z_j) \neq 0$ ($j = 1, \dots, p$). Dann gilt:

$$d(f, \Omega) = \sum_{j=1}^p \text{sgn } J_f(z_j). \quad (3.3)$$

Insbesondere ist $d(f, \Omega) \in \mathbb{Z}$.

Wir wollen nun zeigen, dass die Situation von Hilfssatz 3.7 im Kontext des Abbildungsgrades generisch ist, dass sich diese also gegebenenfalls durch beliebig kleine Störungen einer gegebenen Situation erreichen lässt. Dazu dient das Lemma von Sard (die Menge der singulären Werte, d.h. das Bild der Menge der singulären Punkte, deren Jacobi-Determinante also verschwindet, ist „dünn“):

Satz 3.8 (Lemma von Sard). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Ferner sei $F \subset \Omega$ kompakt und $F^* := \{y : y = f(x) \text{ für ein } x \in F \text{ mit } J_f(x) = 0\}$. Dann ist F^* eine (Jordan-) Nullmenge.

Beweise findet man im Anhang, Satz A.8, oder auch – sehr elegant – im Buch von W. Walter [Wa, 7.17].

Hilfssatz 3.9. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, für $f \in C^1$ gelte $|f(x)| > \varepsilon > 0$ auf $\partial\Omega$. Dann existiert ein $\Theta \in \mathbb{R}^n$, $|\Theta| < \varepsilon$, so dass gilt:

1. Die Gleichung $f(x) = \Theta$ hat in Ω höchstens endlich viele paarweise verschiedene Lösungen z_1, \dots, z_p , $p \in \mathbb{N}_0$.
2. Für $j = 1, \dots, p$ gilt: $J_f(z_j) \neq 0$.

Beweis. Die Menge $F := \{x \in \bar{\Omega} : |f(x)| \leq \varepsilon\} \subset \Omega$ ist abgeschlossen. Für $F^* = \{y : \exists x \in F \text{ mit } y = f(x), J_f(x) = 0\}$ ist nach dem Lemma von Sard : $|F^*| = 0$.

Also existiert ein $\Theta \in \mathbb{R}^n, |\Theta| < \varepsilon, \Theta \notin F^*$. Wir zeigen die behaupteten Eigenschaften:

Zu (1): Angenommen, es gäbe eine Folge $(z_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \bar{\Omega}$ paarweise verschiedener Punkte mit $f(z_j) = \Theta$, o.B.d.A. können wir Konvergenz $z_j \rightarrow z$ gegen ein $z \in \bar{\Omega}$ und $z_j \neq z$ annehmen.

Auf Grund der Wahl von Θ erhält man: $z_j, z \in F, J_f(z_j) \neq 0, J_f(z) \neq 0$. Letzteres bedeutet aber gemäß dem Satz von der inversen Abbildung lokale Injektivität um z , d.h. z ist in einer ganzen Kugel um z die einzige Lösung von $f(x) = \Theta$. Widerspruch !

Zu (2): Diese Eigenschaft ergibt sich direkt aus der Wahl von Θ . □

Satz 3.10. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, $f \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit $0 \notin f(\partial\Omega)$. Dann gilt

$$d(f, \Omega) \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. O. B. d. A. sei $f \in C^1; |f(x)| > \varepsilon > 0$ auf $\partial\Omega$. Wir wählen ein Θ wie oben in Hilfssatz 3.9, insbesondere ist $|\Theta| < \varepsilon$. Betrachte $f_\Theta(x) = f(x) - \Theta$; auf $\partial\Omega$ gilt:

$$|f_\Theta(x) - f(x)| = |\Theta| < \varepsilon < |f(x)|.$$

Nach dem Satz 2.10 von Rouché und den Hilfssätzen 3.7 und 3.9 ist

$$d(f, \Omega) = d(f_\Theta, \Omega) \in \mathbb{Z}.$$

□

Satz 3.11 (Borsuk). Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen mit $0 \in \Omega$. Weiter sei Ω symmetrisch, d. h. $x \in \Omega \Rightarrow -x \in \Omega$. Schließlich sei $f \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n), 0 \notin f(\partial\Omega)$. Ist f eine ungerade Abbildung, d. h. $f(x) = -f(-x)$, so ist $d(f, \Omega)$ eine ungerade ganze Zahl.

Man beachte, dass die Voraussetzung $0 \in \Omega$ absolut wesentlich ist.

Beweis. Die Idee des Beweises ist ganz einfach, allein die Approximationsargumente in der Klasse der ungeraden Abbildungen erfordern dann erheblichen Aufwand. Wir nehmen also zunächst zusätzlich an: $f \in C^1(\bar{\Omega}), 0$ ist regulärer Wert, d. h. für alle $x \in \Omega$ mit $f(x) = 0$ gilt: $J_f(x) \neq 0$. Wie in Hilfssatz 3.9 sieht man: es gibt dann nur endlich viele solcher Nullstellen, und nach Hilfssatz 3.7 ist:

$$d(f, \Omega) = \text{sgn } J_f(0) + \sum_{\substack{f(z)=0 \\ z \neq 0}} \text{sgn } J_f(z).$$

Unter dem Summenzeichen taucht mit z stets auch $-z$ auf. Da f ungerade ist, ist $J_f(z) = J_f(-z)$, also ist der Summenwert gerade, $d(f, \Omega)$ mithin ungerade.

Sei nun f allgemein wie im Satz. Es ist ein g wie zu Anfang des Beweises zu finden, wobei $\|f - g\|_{C^0(\bar{\Omega})}$ beliebig klein ist.

1. Schritt: $J_g(0) \neq 0$.

Wir approximieren zunächst f durch $g_1 \in C^1$ in $C^0(\bar{\Omega})$ hinreichend gut, setzen $g_2(x) := \frac{1}{2}(g_1(x) - g_1(-x))$ und wählen ein beliebig kleines $|\delta|$, so dass δ nicht Eigenwert von $Dg_2(0)$

ist. Dann ist $g(x) := g_2(x) - \delta x$ ungerade und beliebig nahe in $C^0(\overline{\Omega})$ an f , $g \in C^1$, $Dg(0) = Dg_2(0) - \delta E$ ist regulär.

2. Schritt: 0 ist regulärer Wert von g .

Wir können also gemäß dem ersten Schritt nun im Folgenden zusätzlich voraussetzen, dass $f \in C^1$ und $J_f(0) \neq 0$.

Das gewünschte g wird mit Hilfe eines Induktionsschlusses konstruiert. Es bezeichne

$$\Omega_k := \{x \in \Omega : x_i \neq 0 \text{ für ein } i \leq k\}.$$

Wir konstruieren sukzessive g_k beliebig nahe an f , so dass $g_k \in C^1$ ungerade und 0 regulärer Wert von g_k auf $\Omega_k \cup \{0\}$ ist. Dabei ist $\Omega_n \cup \{0\} = \Omega$.

Betrachte hierfür ungerades $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit den Eigenschaften $-1 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi'(0) = 0$, $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

- $k = 1$: $\Omega_1 = \{x \in \Omega : x_1 \neq 0\}$

Man betrachte $\tilde{f}(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x_1)}$ auf Ω_1 . Nach dem Lemma von Sard findet man ein $y^{(1)} \in \mathbb{R}^n$, $|y^{(1)}|$ beliebig klein, so dass gilt:

Die Gleichung $\tilde{f}(x) = y^{(1)}$ hat in Ω_1 höchstens endlich viele Lösungen; in diesen gilt $J_{\tilde{f}}(x) \neq 0$, d.h. definitionsgemäß ist $y^{(1)}$ regulärer Wert von \tilde{f} in Ω_1 .

Wir setzen $g_1(x) = f(x) - \varphi(x_1)y^{(1)}$, damit ist $g_1 \in C^1$ ungerade und beliebig nahe an f . Außerdem ist 0 ist regulärer Wert von g_1 auf $\Omega_1 \cup \{0\}$:

Für $x \in \Omega_1$ mit $g_1(x) = 0$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varphi(x_1) \left(\tilde{f}(x) - y^{(1)} \right) \right) \\ &= \underbrace{\delta_{i1} \varphi'(x_1) \left(\tilde{f}(x) - y^{(1)} \right)}_{=0} + \varphi(x_1) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x) = \varphi(x_1) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x), \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } J_{g_1}(x) = \varphi(x_1)^n J_{\tilde{f}}(x) \neq 0.$$

Schließlich gilt im Punkte 0:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(0) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) - \delta_{i1} \varphi'(0) y^{(1)} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0), \\ \text{d.h. } J_{g_1}(0) &= J_f(0) \neq 0. \end{aligned}$$

- $k = 2$: $\Omega_2 = \{x \in \Omega : x_1 \neq 0 \text{ oder } x_2 \neq 0\}$.

Man findet wie im ersten Schritt, nun ausgehend von g_1 , ein beliebig kleines $y^{(2)} \in \mathbb{R}^n$, so dass mit

$$g_2(x) = g_1(x) - \varphi(x_2)y^{(2)}$$

gilt: $g_2 \in C^1$ ist ungerade, beliebig nahe an f , und 0 ist regulärer Wert von g_2 auf $\{x \in \Omega : x_2 \neq 0\}$. Wir zeigen noch: 0 ist auch regulärer Wert von g_2 auf $\Omega_2 \setminus \{x \in \Omega : x_2 \neq 0\}$.

Ist $x \in \Omega_2 \setminus \{x \in \Omega : x_2 \neq 0\}$, so ist $x \in \Omega_1$ und $x_2 = 0$, hier ist $J_{g_2}(x) = J_{g_1}(x) \neq 0$ wegen $\varphi'(0) = 0$. Schließlich ist $J_{g_2}(0) = J_{g_1}(0) = J_f(0) \neq 0$ ebenfalls wegen $\varphi'(0) = 0$.

⋮

⋮

Nach n Schritten erhält man ungerades $g := g_n \in C^1$, beliebig nahe an f , wobei 0 regulärer Wert von g ist. □

Schon jetzt kann ein wichtiger Satz der klassischen Topologie gezeigt werden:

Satz 3.12 (Satz von der Gebietsinvarianz, Satz von der offenen Abbildung). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal injektiv. Dann gilt: $f(\Omega)$ ist offen.*

Ist Ω sogar ein Gebiet, so ist $f(\Omega)$ ebenfalls ein Gebiet.

Ein analoger Satz ist aus der Analysis-Grundvorlesung bekannt, nur dass man dort stärkere Voraussetzungen stellen muss, nämlich dass die Abbildung f stetig differenzierbar mit überall regulärer Jacobi-Matrix ist.

Beweis. Es ist zu zeigen: $\forall x_0 \in \Omega : \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(f(x_0)) \subset f(\Omega)$.

Indem man gegebenenfalls zu $\tilde{f}(x) = f(x + x_0) - f(x_0)$ übergeht, kann man o.B.d.A. $x_0 = 0, f(x_0) = 0$ annehmen.

Auf Grund der lokalen Injektivität von f existiert ein $\rho > 0$ so, dass $\overline{B_\rho(0)} \subset \Omega$ und $f|_{\overline{B_\rho(0)}}$ injektiv ist. Wegen $f(0) = 0$ ist mit einem geeigneten $\varepsilon > 0$ auf $\partial B_\rho(0)$: $|f(x)| > \varepsilon$.

Die überraschende zentrale Beweisidee besteht darin, dass man f auf $\overline{B_\rho(0)}$ auf zulässige Weise in eine ungerade Abbildung homotopieren kann. Für $\tau \in [0, 1], x \in \overline{B_\rho(0)}$ sei

$$h(\tau, x) := f(x) - f(-\tau x).$$

Es ist $h(0, x) = f(x)$, und $h(1, x) = f(x) - f(-x)$ ist ungerade. Diese Homotopie ist zulässig: Die Annahme, dass $h(\tau, x) = 0$ für ein $\tau \in [0, 1]$ und $x \in \partial B_\rho$ sei, führt auf

$$f(x) = f(-\tau x).$$

Da sowohl $x \in \overline{B_\rho}$ als auch $-\tau x \in \overline{B_\rho}$ und da $f|_{\overline{B_\rho}}$ injektiv ist, folgt daraus:

$$x = -\tau x \quad \Rightarrow \quad (1 + \tau)x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \notin \partial B_\rho.$$

Somit ergeben die Homotopieinvarianz und der Satz von Borsuk:

$$0 \neq d(h(1, \cdot), B_\rho(0)) = d(f, B_\rho(0)).$$

Mit dieser Aussage über den lokalen Abbildungsgrad und dessen Invarianz gegenüber kleinen Störungen von f gelingt schließlich der Nachweis, dass $f(\Omega)$ sogar eine ganze Nullumgebung enthält. Sei $|z| < \varepsilon$, es bezeichne $f_z(x) = f(x) - z$. Der Satz 2.10 von Rouché zeigt

$$0 \neq d(f, B_\rho(0)) = d(f_z, B_\rho(0)).$$

Folglich existiert zu jedem $z \in B_\varepsilon(0)$ ein $\xi \in B_\rho(0)$ mit $f(\xi) = z$. Das bedeutet, dass $B_\varepsilon(0) \subset f(B_\rho(0)) \subset f(\Omega)$.

Ist Ω zusätzlich (wegweise) zusammenhängend, so liegt die Aussage über den Zusammenhang von $f(\Omega)$ auf der Hand. □

Als unmittelbare Folgerung hieraus erhalten wir ein weiteres fundamentales Resultat der Topologie:

Satz 3.13 (Invarianz der Dimension). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $m \leq n, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig und lokal injektiv. Dann gilt: $m = n$.*

4 Verallgemeinerte Transformationsformel, allgemeine Definition des Abbildungsgrades

Hier geben wir zunächst eine Formulierung der Transformationsformel, bei der die Injektivität der Koordinatentransformation nicht vorausgesetzt wird und die damit der eindimensionalen Substitutionsregel an Allgemeinheit nicht mehr nachsteht. Im nächsten Abschnitt werden wir die Produkteigenschaft des Abbildungsgrades als relativ leichte Folgerung aus dieser verallgemeinerten Transformationsformel erhalten. Wir können aber auch die klassische Formulierung der Transformationsformel hieraus zurückerhalten.

Um die Schnittstelle mit den Analysis-Grundvorlesungen klar zu definieren, sei angemerkt: Vorbereitende Resultate aus dem Umfeld der Transformationsformel werden wir hier ohne Beweis verwenden, wie die Bewegungsinvarianz des Jordan-Inhalts bzw. des Lebesgue-Maßes und das Verhalten von Nullmengen unter differenzierbaren Abbildungen. Alles Weitergehende, das in der Tat wesentlich tiefer liegt, wird hier vollständig bewiesen. Für das Lemma von Sard verweisen wir auf den Anhang A.3.

Zur Vermeidung rein technischer Fallunterscheidungen sei im folgenden $n \geq 2$.

Hier wird die topologische Gestalt von $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ eine wichtige Rolle spielen. Daher definieren wir:

Definition 4.1. Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ offen. $G \subset \mathcal{O}$ heißt *Zusammenhangskomponente* von \mathcal{O} , falls gilt:

1. G ist ein Gebiet;
2. ist $G' \subset \mathcal{O}$ ein beliebiges Gebiet mit $G \cap G' \neq \emptyset$, dann gilt $G' \subset G$ (Maximalität von G).

Unter der zu einem $x \in \mathcal{O}$ gehörigen (Zusammenhangs-) Komponente von \mathcal{O} verstehen wir:

$$\{y \in \mathcal{O} : \text{es gibt einen Weg in } \mathcal{O} \text{ von } y \text{ nach } x\}.$$

Hilfssatz 4.2. Jede offene Menge $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ lässt sich auf bis auf Permutationen genau eine Weise in höchstens abzählbar viele (Zusammenhangs-) Komponenten $(G_j)_{j \in J}$ zerlegen: $\mathcal{O} = \bigcup_{j \in J} G_j$, wobei $G_i \cap G_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Der Menge \mathcal{O} kommt dabei eine wohldefinierte Komponentenzahl $N(\mathcal{O}) := \#J$ zu.

Beweis. Bleibt zur Übung, wichtig ist die Separabilität von \mathbb{R}^n . □

Hilfssatz 4.3. Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ offen mit Komponenten $(G_j)_{j \in J}$. Ferner sei $\varphi \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } \varphi \subset \mathcal{O}$. Dann ist $\text{supp } \varphi \cap G_j \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele j .

Beweis. Annahme, es existieren unendlich viele $(j_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ mit $\text{supp } \varphi \cap G_{j_\ell} \neq \emptyset$. Dann existiert zu jedem ℓ ein $x_\ell \in G_{j_\ell} : \varphi(x_\ell) \neq 0$. Da $\text{supp } \varphi$ kompakt ist, kann man nach Auswahl einer Teilfolge annehmen, dass Konvergenz $x_\ell \rightarrow x \in \text{supp } \varphi \subset \mathcal{O}$ stattfindet.

Der Grenzwert liegt in einer bestimmten Komponente von \mathcal{O} : $x \in G_{j_0}$. Für fast alle ℓ ist dann aber auch $x_{j_\ell} \in G_{j_0}$. Wir erhalten einen Widerspruch, denn die Komponenten sind paarweise disjunkt. □

In der Definition des Abbildungsgrades beseitigen wir nun die Ausnahmerolle des Bildpunktes 0:

Definition 4.4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, $f \in C^0$, $z \notin f(\partial\Omega)$. Dann heißt

$$d(f, \Omega, z) := d(f(\cdot) - z, \Omega, 0) = d(f(\cdot) - z, \Omega)$$

Abbildungsgrad von f auf Ω bezüglich des Wertes z .

Hilfssatz 4.5. Sei $G \subset \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ ein Gebiet.

Dann ist $G \ni z \mapsto d(f, \Omega, z) \in \mathbb{Z}$ auf G konstant.

Beweis. Sind $z_0, z_1 \in G$ beliebig, so existiert ein (stetiger!) Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$, der z_0 und z_1 in G verbindet: $\gamma(0) = z_0, \gamma(1) = z_1$. Durch $(\tau, x) \mapsto f(x) - \gamma(\tau)$ wird eine zulässige Homotopie definiert. \square

In Folge dieser Beobachtung können wir den Abbildungsgrad im Bildbereich bezüglich Teilgebieten des Komplementes von $f(\partial\Omega)$ definieren:

Definition 4.6. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, ferner sei $G \subset \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ ein Gebiet. Dann setzen wir

$$d(f, \Omega, G) := d(f, \Omega, z),$$

wobei $z \in G$ beliebig gewählt wird.

Bemerkung 4.7. Es gibt genau eine unbeschränkte Komponente G_∞ von $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. Hier geht z.B. die Generalvoraussetzung $n \geq 2$ dieses Abschnitts ein. Wegen der Beschränktheit von $f(\overline{\Omega})$ und wegen des Nullstellensatzes gilt $d(f, \Omega, G_\infty) = 0$.

Satz 4.8 (Verallgemeinerte Transformationsformel). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Es sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C^1$ eine Folge, die auf $\overline{\Omega}$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Weiter sei $E \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit $f(\partial\Omega) \subset E$, $(G_j)_{j \in J}$ seien die beschränkten Komponenten von $\mathbb{R}^n \setminus E$.

Dann gibt es zu jeder stetigen Funktion $\Phi \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $\text{supp } \Phi \subset \mathbb{R}^n \setminus E$ eine Zahl $k_0 = k_0(\Phi)$, so dass für $k \geq k_0$ gilt:

$$\int_{\Omega} \Phi(f_k(x)) J_{f_k}(x) dx = \sum_{j \in J} d(f, \Omega, G_j) \int_{G_j} \Phi(z) dz.$$

Bemerkung. Ist $\mathbb{R}^n \setminus E$ zusammenhängend, d.h. $J = \emptyset$, so ist $\int_{\Omega} \Phi(f_k(x)) J_{f_k}(x) dx = 0$. Der folgende Beweis gilt auch für diesen Extremfall leerer Indexmenge $J = \emptyset$.

Beweis. Zunächst soll die *Idee* erläutert werden: Für ganz spezielle Φ ist die Aussage des Satzes genau die Definition des Abbildungsgrades. Sei etwa

$$E = f(\partial\Omega), \quad z_0 \notin f(\partial\Omega), \quad \text{dist}(f(\partial\Omega), z_0) > \varepsilon > 0,$$

d.h. für $x \in \partial\Omega$ gilt: $|f(x) - z_0| > \varepsilon$. Sei $0 < \delta < \varepsilon, \omega \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\omega(r) = 0$ für $r \leq \delta$ und $r \geq \varepsilon$.

Dann ist nach Definition für $k \geq k_0(z_0)$:

$$d(f, \Omega, z_0) = \frac{1}{\int_{|z| \leq \varepsilon} \omega(|z|) dz} \int_{\Omega} \omega(|f_k(x) - z_0|) J_{f_k}(x) dx,$$

d.h. mit $\Phi(z) := \omega(|z - z_0|)$ haben wir, dass $\text{supp } \Phi$ in der zu z_0 gehörigen Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n \setminus E$ liegt, und es gilt für $k \geq k_0(z_0)$:

$$d(f, \Omega, z_0) \int_{|z-z_0| \leq \varepsilon} \Phi(z) dz = \int_{\Omega} \Phi(f_k(x)) J_{f_k}(x) dx.$$

Allgemeine Funktionen Φ sollen nun mit Hilfe solcher speziellen Funktionen approximiert werden: Lokal durch

$$\omega(|z - z_0|)\Phi(z_0)$$

bzw. global durch die Faltung

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega(|z - \zeta|)\Phi(\zeta) d\zeta.$$

Nun also zur technischen *Ausführung* dieser Idee. O.B.d.A. sei $\Phi \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$, denn $\bigcup G_j$ und $f_k(\bar{\Omega})$ sind gleichmäßig beschränkt.

Da $\text{dist}(\partial\Omega, \text{supp } \Phi) > 0$, gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $x \in \partial\Omega, z \in \text{supp } \Phi$ gilt

$$|f(x) - z| > \varepsilon_0.$$

Wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz auf $\bar{\Omega}$ und damit auf $\partial\Omega$ gilt für $k \geq \tilde{k}_0, \tilde{k}_0 = \tilde{k}_0(\Phi)$ geeignet:

$$\forall z \in \text{supp } \Phi \quad \forall x \in \partial\Omega : \quad |f_k(x) - z| > \varepsilon_0. \quad (4.1)$$

Man betrachtet für $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ eine Schar sich konzentrierender zulässiger Testfunktionen $\omega_\varepsilon \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit

$$\begin{cases} \omega_\varepsilon(r) \geq 0, \\ \omega_\varepsilon(r) = 0 \text{ für } r \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } r \geq \varepsilon, \\ \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(|x|) dx = 1. \end{cases} \quad (4.2)$$

Damit ist dann wegen des Satzes von Rouché für $z \in \text{supp } \Phi$ und $k \geq k_0$ mit einem geeigneten $k_0 = k_0(\Phi)$ und unabhängig von $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$:

$$d(f, \Omega, z) = d(f_k, \Omega, z) = \int_{\Omega} \omega_\varepsilon(|f_k(x) - z|) J_{f_k}(x) dx. \quad (4.3)$$

Wie oben angekündigt, approximieren wir nun die gegebene Funktion Φ und verwenden die Testfunktionen ω_ε als „Approximationskerne“. Sei

$$\Phi_\varepsilon(z) := \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(|z - \zeta|)\Phi(\zeta)d\zeta,$$

offensichtlich ist $\Phi_\varepsilon \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$. Wie im Beweis des Satzes A.3 von Weierstraß sieht man, dass $\Phi_\varepsilon \rightarrow \Phi$ gleichmäßig konvergiert:

$$\begin{aligned} \sup_{z \in \mathbb{R}^n} |\Phi_\varepsilon(z) - \Phi(z)| &= \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(|z - \zeta|)(\Phi(\zeta) - \Phi(z)) d\zeta \right| \\ &\leq \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\omega_\varepsilon(|z - \zeta|) \cdot \sup_{|z-\xi| \leq \varepsilon} |\Phi(\xi) - \Phi(z)| \right) d\zeta \\ &\leq \sup_{|z-\xi| \leq \varepsilon} |\Phi(\xi) - \Phi(z)| \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \searrow 0; \end{aligned}$$

wegen $\Phi \in C_0^0$ ist nämlich Φ gleichmäßig stetig.

Nun gilt für die linke Seite der Behauptung des Satzes

$$\int_{\Omega} \Phi(f_k(x)) J_{f_k}(x) dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\Omega} \Phi_{\varepsilon}(f_k(x)) J_{f_k}(x) dx \quad (4.4)$$

und weiter für $k \geq k_0$ und beliebiges $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi_{\varepsilon}(f_k(x)) J_{f_k}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} 1_{\Omega}(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \omega_{\varepsilon}(|f_k(x) - \zeta|) \Phi(\zeta) d\zeta \right) \cdot J_{f_k}(x) dx \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \underbrace{1_{\Omega}(x) \omega_{\varepsilon}(|f_k(x) - \zeta|) \Phi(\zeta) J_{f_k}(x) d(x, \zeta)}_{\text{beschränkt, kompakter Träger, bis auf } 1_{\Omega} \text{ stetig}} \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} 1_{\Omega}(x) \omega_{\varepsilon}(|f_k(x) - \zeta|) J_{f_k}(x) dx \right) \Phi(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{\text{supp } \Phi} \left(\int_{\Omega} \omega_{\varepsilon}(|f_k(x) - z|) J_{f_k}(x) dx \right) \Phi(z) dz \\ &\stackrel{(4.3)}{=} \int_{\text{supp } \Phi} d(f, \Omega, z) \Phi(z) dz. \end{aligned}$$

Wir kombinieren diese Umformung mit (4.4) und erhalten für alle $k \geq k_0$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi(f_k(x)) J_{f_k}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus E} d(f, \Omega, z) \Phi(z) dz \\ &= \sum_{j \in J} \int_{G_j} d(f, \Omega, z) \Phi(z) dz + \int_{G_{\infty}} \underbrace{d(f, \Omega, z) \Phi(z)}_{=0} dz \\ &= \sum_{j \in J} d(f, \Omega, G_j) \int_{G_j} \Phi(z) dz. \end{aligned}$$

Laut Hilfssatz 4.3 ist diese Summe endlich; bei leerer Indexmenge J ist sie konventionsgemäß gleich 0. \square

Satz 4.9 (und allgemeine Definition des Abbildungsgrades). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C^1$ eine Folge, die auf $\bar{\Omega}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Schließlich sei G eine Komponente von $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$, und es sei $\Phi \in C_0^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $\text{supp } \Phi \subset G$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z) dz = 1$. Dann gilt für $k \geq k_0(\Phi)$:*

$$d(f, \Omega, G) = \int_{\Omega} \Phi(f_k(x)) J_{f_k}(x) dx. \quad (4.5)$$

Bemerkung 4.10. (a) Die bisherige Definition ordnet sich ein.

(b) Bei nur stetigem f ist der „Sicherheitsabstand“ $\text{supp } \Phi \subset G$ unerlässlich; $f_k(\partial\Omega)$ wackelt! Man beachte auch, dass $k_0 = k_0(\Phi)$.

(c) Ist dagegen bereits $f \in C^1$, so kann man wie am Ende des Beweises des folgenden Satzes zeigen, dass die folgende Bedingung an Φ ausreicht:

$$\Phi \in L^1(G), \quad \Phi \equiv 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \setminus G, \quad \int_G \Phi(z) dz = 1.$$

Auf die Ausführung der Details sei hier verzichtet.

Wir zeigen nun, dass wir die klassische Transformationsformel in der verallgemeinerten Transformationsformel wiederfinden können. Wir verwenden dabei einige Tatsachen, die man in den Analysis-Grundvorlesungen zur Vorbereitung der klassischen Transformationsformel beweist, die aber sämtlich wesentlich elementarer als diese zu erhalten sind. Das wichtigste derartige Hilfsresultat besagt, dass Nullmengen unter stetig differenzierbaren Abbildungen auf Nullmengen abgebildet werden.

Satz 4.11 (Klassische Transformationsformel). *Seien $\Omega, \Omega^* \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Gebiete, $f : \Omega \rightarrow \Omega^*$ ein Homöomorphismus der Klasse $C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Ferner sei $\Phi \in L^1(\Omega^*)$. Dann ist $\Phi \circ f \cdot |J_f| \in L^1(\Omega)$, und es gilt:*

$$\int_{\Omega} \Phi(f(x)) \cdot |J_f(x)| dx = \int_{\Omega^*} \Phi(z) dz.$$

Kam man bisher auch mit der Riemannschen Integrationstheorie aus, so ist für diesen Satz in dieser Formulierung die Lebesguesche Integrationstheorie unverzichtbar.

Beweis. Satz 4.8 soll mit einem einzigen G_j , nämlich Ω^* angewendet werden. Wir wollen also $E = \mathbb{R}^n \setminus \Omega^*$ wählen und müssen dafür zunächst $f(\partial\Omega) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega^*$ zeigen.

Nachweis davon: Angenommen, es gibt ein $x_1 \in \partial\Omega$ mit $z := f(x_1) \in \Omega^*$. Es existierte dann aber auch ein $x_2 \in \Omega$ mit $f(x_2) = z$. Der Randpunkt x_1 kann aus Ω heraus approximiert werden: $\xi_\nu \in \Omega$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \xi_\nu \rightarrow x_1$, andererseits ist aber $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \xi_\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} f^{-1}(\underbrace{f(\xi_\nu)}_{\rightarrow z}) \rightarrow x_2$, da $f : \Omega \rightarrow \Omega^*$

ein Homöomorphismus ist. Also folgt $x_1 = x_2$ und damit ein Widerspruch.

- (a) Um nun Satz 4.8 tatsächlich anwenden zu können, setzen wir zunächst zusätzlich $\Phi \in C_0^0(\Omega^*)$ voraus. Es werde f durch $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C^1$ approximiert, gleichmäßig auf $\overline{\Omega}$, und in $C^1(K)$ auf jeder kompakten Teilmenge K von Ω . Dazu vgl. man den Beweis des Satzes A.5 von Weierstraß in seiner zweiten Formulierung.

Nach Satz 4.8 gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \Phi(f_k(x)) J_{f_k}(x) dx = d(f, \Omega, \Omega^*) \cdot \int_{\Omega^*} \Phi(z) dz.$$

Für alle $x \in \partial\Omega$ ist $f(x) \notin \Omega^*$, d.h. $\text{dist}(f(x), \text{supp } \Phi) > 0$. Da $\partial\Omega$ kompakt und letztere Funktion gleichmäßig stetig in $\overline{\Omega}$ ist, gilt mit einem geeigneten $\varepsilon > 0$ in einem offenen und hinreichend kleinen Streifen um $\partial\Omega$, dass $\text{dist}(f(x), \text{supp } \Phi) > \varepsilon > 0$, also für $k \geq k_0$: $\text{dist}(f_k(x), \text{supp } \Phi) > \frac{\varepsilon}{2} > 0$, d.h. $\Phi(f_k(x)) = 0$ für x nahe $\partial\Omega$. Im Komplement dieses Randstreifens konvergiert jedoch $J_{f_k} \rightarrow J_f$ gleichmäßig, so dass insgesamt

$$\Phi(f_k(x)) J_{f_k}(x) \rightarrow \Phi(f(x)) J_f(x)$$

gleichmäßig in Ω konvergiert. Außerdem haben alle Funktionen gleichmäßig kompakte Träger in Ω . Also können wir in der obigen Identität Grenzwert und Integration vertauschen:

$$\int_{\Omega} \Phi(f(x)) \cdot J_f(x) dx = d(f, \Omega, \Omega^*) \cdot \int_{\Omega^*} \Phi(z) dz. \quad (4.6)$$

Wäre $J_f(x) \equiv 0$, so wäre nach dem Lemma von Sard $f(\Omega) = \Omega^*$ eine Nullmenge, Ω^* ist aber offen und nicht leer. Für alle $x_0 \in \Omega$ mit $J_f(x_0) \neq 0$, deren mindestens eines existiert, gilt

$$\begin{aligned} d(f, \Omega, \Omega^*) &= d(f, \Omega, f(x_0)) = d(f(\cdot) - f(x_0), \Omega, 0) \\ &\stackrel{\text{f injektiv}}{=} \text{ind}(f(\cdot) - f(x_0), x_0) \stackrel{\text{Satz 3.6}}{=} \text{sgn } J_f(x_0) = \pm 1, \\ \Rightarrow J_f(x_0) &= \text{sgn } J_f(x_0) |J_f(x_0)| = d(f, \Omega, \Omega^*) |J_f(x_0)|. \end{aligned}$$

Für $x_0 \in \Omega$ mit $J_f(x_0) = 0$ ist diese Identität trivialerweise erfüllt. Also gilt für alle $x \in \Omega$:

$$J_f(x) = d(f, \Omega, \Omega^*) |J_f(x_0)|,$$

und es folgt aus (4.6):

$$d(f, \Omega, \Omega^*) \int_{\Omega} \Phi(f(x)) |J_f(x)| dx = d(f, \Omega, \Omega^*) \int_{\Omega^*} \Phi(z) dz.$$

Durch Kürzen von $d(f, \Omega, \Omega^*) = \pm 1$ ergibt sich die Behauptung im Fall $\Phi \in C_0^0(\Omega^*)$.

- (b) Sei nun $\Phi \in L^1(\Omega^*)$. Auf Grund der Dichtheit von $C_0^0(\Omega^*)$ in $L^1(\Omega^*)$ und des Satzes von Riesz–Fischer existiert eine approximierende Folge $\Phi_k \in C_0^0(\Omega^*)$ mit $\Phi_k \rightarrow \Phi$ in $L^1(\Omega^*)$ und $\Phi_k \rightarrow \Phi$ punktweise fast überall für $k \rightarrow \infty$.

Sei $N = \{x \in \Omega : J_f(x) = 0\}$, $N^* = f(N)$. Da f ein Homöomorphismus ist, ist N^* abgeschlossen in Ω^* . Nach dem Lemma von Sard ist N^* eine Lebesguesche Nullmenge. Die Einschränkung $f : \Omega \setminus N \rightarrow \Omega^* \setminus N^*$ ist nun wegen des Satzes von der inversen Abbildung ein Diffeomorphismus.

Für fast alle $y \in \Omega^*$ gilt konstruktionsgemäß $\Phi_k(y) \rightarrow \Phi(y)$ für $k \rightarrow \infty$. Da $f|_{\Omega \setminus N}$ ein Diffeomorphismus ist, folgt für fast alle $x \in \Omega \setminus N$, dass $\Phi_k(f(x)) \rightarrow \Phi(f(x))$ ($k \rightarrow \infty$). Hier haben wir benutzt, dass Bilder von Nullmengen unter differenzierbaren Abbildungen ebenfalls Nullmengen sind.

Insgesamt haben wir also für fast alle $x \in \Omega$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\Phi_k(f(x))| \cdot |J_f(x)| = |\Phi(f(x))| \cdot |J_f(x)|.$$

Außerdem erhalten wir aus Teil (a) und der L^1 -Konvergenz der Folge $(\Phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus N} |(\Phi_k - \Phi_\ell)(f(x))| \cdot |J_f(x)| dx &= \int_{\Omega} |(\Phi_k - \Phi_\ell)(f(x))| \cdot |J_f(x)| dx \\ &= \int_{\Omega^*} |(\Phi_k - \Phi_\ell)(y)| dy \rightarrow 0 \text{ für } k, \ell \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Somit haben wir aus Teil (a) gefolgert, dass $\Phi_k \circ f \cdot |J_f|$ eine Cauchy-Folge in $L^1(\Omega \setminus N)$ ist. Wegen der Vollständigkeit erhalten wir ein $\tilde{\Phi} \in L^1(\Omega \setminus N)$, so dass $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k \circ f \cdot |J_f| = \tilde{\Phi}$ in $L^1(\Omega \setminus N)$. Nach Auswahl einer Teilfolge hat man gemäß dem Satz von Riesz–Fischer auch punktweise Konvergenz fast überall. Letzteres zeigt insbesondere:

$$\Phi \circ f \cdot |J_f| = \tilde{\Phi} \text{ fast überall in } \Omega \setminus N.$$

Fassen wir alle Argumente zusammen und verwenden wir für die Φ_k noch einmal das Ergebnis aus Teil (a), so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi(f(x)) |J_f(x)| dx &= \int_{\Omega \setminus N} \Phi(f(x)) |J_f(x)| dx \\ &= \int_{\Omega \setminus N} \tilde{\Phi}(x) dx \stackrel{L^1\text{-Limes}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega \setminus N} \Phi_k(f(x)) |J_f(x)| dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega^* \setminus N^*} \Phi_k(y) dy \stackrel{L^1\text{-Limes}}{=} \int_{\Omega^* \setminus N^*} \Phi(y) dy = \int_{\Omega^*} \Phi(y) dy. \end{aligned}$$

□

5 Die Produkteigenschaft, der Satz von Jordan-Brouwer

Betrachtet man $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n$ mit „regulären“ glatten Abbildungen f, g , so lässt sich mit Hilfe der Summenformel für den Abbildungsgrad, Hilfssatz 3.7, und der Kettenregel $\text{sgn } J_{g \circ f}(x) = \text{sgn } J_g(f(x)) \cdot \text{sgn } J_f(x)$ relativ schnell eine Produkteigenschaft finden. Für einen vollen Beweis bliebe die recht technische Approximation und die Anwendung des Lemmas von Sard.

Hier wird ein anderer Weg eingeschlagen: Die Produkteigenschaft soll als Weiterentwicklung der verallgemeinerten Transformationsformel, Satz 4.8, dargestellt werden. Der Einfachheit halber setzen wir im Folgenden auch wieder $n \geq 2$ voraus.

Satz 5.1 (Produktsatz von Leray). *Seien $g, f \in C^0, \Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ beschränkt und offen, $E \subset \mathbb{R}^n$ sei kompakt mit $f(\partial\Omega) \subset E, (G_j)_{j \in J}$ seien die beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n \setminus E$. Schließlich sei $z \in \mathbb{R}^n$ mit $z \notin g(E)$. Dann gilt:*

$$d(g \circ f, \Omega, z) = \sum_{j \in J} d(f, \Omega, G_j) \cdot d(g, G_j, z).$$

Bemerkung 5.2. (a) Insbesondere wird $z \notin (g \circ f)(\partial\Omega)$ vorausgesetzt. Die Menge E wird sich im Beweis des Satzes 5.3 von Jordan–Brouwer als hilfreich erweisen.

(b) Falls $\mathbb{R}^n \setminus E$ zusammenhängend ist, d.h. $J = \emptyset$, so ist die rechte Seite gleich 0, d.h. in diesem Falle ist $d(g \circ f, \Omega, z) = 0$.

(c) In $\sum_{j \in J}$ sind höchstens endliche viele Summanden $\neq 0$.

Beweis dazu. Angenommen, es gibt unendlich viele $j_k (k \in \mathbb{N})$ mit $d(g, G_{j_k}, z) \neq 0$. Dann hätte man Lösungen $\xi_k \in G_{j_k}$ der Gleichung $g(\xi_k) = z$. Da die Folge $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, kann man nach Auswahl einer Teilfolge Konvergenz $\xi_k \rightarrow \xi$ erreichen, es folgt sofort $g(\xi) = z$, also $\xi \notin E$. Also liegt $\xi \in G_{j_0}$ mit einem geeigneten j_0 und folglich ist auch für unendlich viele $\xi_k \in G_{j_0}$ im Widerspruch zur Konstruktion. □

Beweis des Produktsatzes. Sind $g, f \in C^1$, so folgt der Satz unmittelbar aus der verallgemeinerten Transformationsformel Satz 4.8, indem man dort $\Phi(y)$ durch $\Phi(g(y))J_g(y)$ ersetzt. Dabei bezeichnet Φ eine zulässige Testfunktion.

Für stetige Abbildungen g, f soll diese Situation durch Approximation hergestellt werden. Seien $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C^1, (g_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C^1$ Folgen, die lokal gleichmäßig gegen f beziehungsweise g konvergieren. Es bezeichne $h = g \circ f, h_k = g_k \circ f, h_{k\ell} = g_k \circ f_\ell$. Es gilt im Sinne lokal gleichmäßiger Konvergenz

$$\begin{aligned} h_k &\rightarrow h & (k \rightarrow \infty) \\ h_{k\ell} &\rightarrow h_k & (k \text{ fest}, \ell \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

denn auf Kompakta sind stetige Funktionen gleichmäßig stetig.

Aus $z \notin g(E)$ folgt mit einem geeigneten $\varepsilon > 0$ für alle $y \in E$:

$$\begin{aligned} |g(y) - z| &> \varepsilon > 0, \\ |g_k(y) - z| &> \varepsilon, \text{ falls } k \geq k_0, k_0 \text{ geeignet.} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Wegen $f(\partial\Omega) \subset E$ hat man auch für alle $x \in \partial\Omega$:

$$|h(x) - z| > \varepsilon, \quad |h_k(x) - z| > \varepsilon, \text{ falls } k \geq k_0.$$

Wir betrachten eine Testfunktion $\Phi \in C_0^0(B_\varepsilon(z), \mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(u) du = 1$. Da $\text{supp } \Phi \subset B_\varepsilon(z) \subset \mathbb{R}^n \setminus h_k(\partial\Omega)$, ist Φ gemäß Satz 4.9 zulässige Testfunktion für $h_k, k \geq k_0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad d(h_k, \Omega, z) &= \int_{\Omega} \Phi(h_{k\ell}(x)) \cdot J_{h_{k\ell}}(x) dx & (k \geq k_0, \ell \geq \ell_0(k)) \\ &= \int_{\Omega} \underbrace{(\Phi \circ g_k)(f_\ell(x)) \cdot J_{g_k}(f_\ell(x))}_{=: \Phi_k^*(f_\ell(x))} \cdot J_{f_\ell}(x) dx. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Für $\Phi_k^*(y) := \Phi(g_k(y)) \cdot J_{g_k}(y)$ gilt $\text{supp } \Phi_k^* \subset \mathbb{R}^n \setminus E$, sofern $k \geq k_0$, denn auch auf einer geeigneten Umgebung von E gilt noch $g_k(y) \notin B_\varepsilon(z)$ und folglich $\Phi(g_k(y)) = 0$. Die verallgemeinerte Transformationsformel, Satz 4.8, zeigt für festes $k \geq k_0$, indem man zu diesem k in (5.2) ein hinreichend großes $\ell \geq \ell_0(k)$ wählt:

$$d(h_k, \Omega, z) = \sum_{j \in J} d(f, \Omega, G_j) \int_{G_j} \Phi_k^*(y) dy = \sum_{j \in J} d(f, \Omega, G_j) \int_{G_j} \Phi(g_k(y)) J_{g_k}(y) dy.$$

Man bemerke, dass man den Hilfsindex ℓ nach diesem Argument bereits „vergessen“ kann; er tritt in dieser Gleichung nicht mehr auf.

Man überzeugt sich leicht, dass $\partial G_j \subset E$ und damit $g(E) \supset g(\partial G_j)$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt. Auf Grund von (5.1) folgt hieraus $\text{supp } \Phi \subset B_\varepsilon(z) \subset \mathbb{R}^n \setminus g(\partial G_j)$. Deshalb ist Φ auch zulässige Testfunktion für g_k auf G_j , und (5.3) ergibt für $k \geq k_0$:

$$d(h_k, \Omega, z) = \sum_{j \in J} d(f, \Omega, G_j) d(g_k, G_j, z).$$

Mit dem Satz von Rouché und der gleichmäßigen Konvergenz von $h_k \rightarrow h$ auf $\partial\Omega$ und von $g_k \rightarrow g$ auf $\bigcup_{j \in J} \partial G_j \subset E$ folgt die Behauptung. \square

Als Folgerung kann nun leicht ein wichtiger Satz der Topologie gezeigt werden, der Satz von Jordan–Brouwer. Dieser enthält als Spezialfall den Jordanschen Kurvensatz.

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $n \geq 2, \mathbb{R}^n \setminus K = G_\infty \cup \bigcup_{j \in J} G_j$ die Zerlegung in Zusammenhangskomponenten. Mit $N(K) = \#J$ bezeichnen wir die Anzahl der beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n \setminus K$.

Satz 5.3 (Jordan–Brouwer). *Seien K, K^* zwei zueinander homöomorphe kompakte Mengen in \mathbb{R}^n , dann gilt:*

$$N(K) = N(K^*).$$

Beweis. Der Fall $n = 1$ ordnet sich entsprechend ein, da auch dort der Produktsatz gilt. Wir bezeichnen $N := N(K)$; $N^* = N(K^*)$ und nehmen an: $N \neq N^*$, o.B.d.A. $N > N^*$. Insbesondere haben wir $N^* < \infty$, mit

$$G_1^*, \dots, G_{N^*}^*$$

bezeichnen wir die beschränkten Komponenten von $\mathbb{R}^n \setminus K^*$, $\mathbb{R}^n \setminus K$ hat *mindestens* $N^* + 1$ Komponenten

$$G_1, \dots, G_{N^*+1} \subset \mathbb{R}^n \setminus K.$$

Nach Voraussetzung existiert ein Homöomorphismus $F : K \rightarrow K^*$, $F^{-1} : K^* \rightarrow K$. Gemäß dem Satz A.6 von Tietze existieren Fortsetzungen: $f, g \in C^0$, $f|_K = F, g|_{K^*} = F^{-1}$. Für die Komposition $h = g \circ f$ dieser Fortsetzungen gilt $h|_K = id|_K$; das Problem in diesem Beweis besteht darin, dass man i.a. mit $h|_{\mathbb{R}^n} \neq id|_{\mathbb{R}^n}$ rechnen muss.

Es gilt $\partial G_i \subset K$, $f(\partial G_i) \subset f(K) = F(K) = K^*$. Der Produktsatz 5.1 soll nun angewendet werden, dabei spielt K^* die Rolle der Menge E dort, und für $z \in G_j$ gilt $z \notin K = F^{-1}(K^*) = g(K^*)$. Wir erhalten also für $i, j = 1, \dots, N^* + 1$:

$$\delta_{ij} = d(id, G_i, G_j) = d(h, G_i, G_j) = \sum_{k=1}^{N^*} d(f, G_i, G_k^*) d(g, G_k^*, G_j).$$

Man hat also ein Matrizenprodukt der folgenden Form:

$$\underbrace{E}_{\in \mathbb{R}^{N^*+1, N^*+1}} = \underbrace{A}_{\in \mathbb{R}^{N^*+1, N^*}} \cdot \underbrace{B}_{\in \mathbb{R}^{N^*, N^*+1}}$$

Das ist aber aus Dimensionsgründen unmöglich. Also ist die Annahme absurd, und es folgt $N = N^*$. \square

Betrachtet man speziell die Sphäre als die kompakte Menge K , so läßt sich die Aussage des Jordan–Brouwerschen Satzes noch präzisieren:

Satz 5.4. *Sei $S = S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ die Einheitskugel und $f : S \rightarrow S^*$ bijektiv und stetig. Dann zerfällt $\mathbb{R}^n \setminus S^*$ in genau ein beschränktes Gebiet G_1 und ein unbeschränktes Gebiet G_2 . Deren gemeinsamer Rand ist $S^* = \partial G_1 = \partial G_2$. Für den Abbildungsgrad hat man $d(f, B_1(0), G_1) = \pm 1$.*

Beweis. Da wir in \mathbb{R}^n arbeiten, ist f^{-1} ebenfalls stetig. Mit Blick auf den Produktsatz 5.1 und den vorhergehenden Satz 5.3 ist nur noch zu zeigen: $S^* = \partial G_1 = \partial G_2$. Dabei ist in offensichtlicher Weise erfüllt: $\partial G_i \subset S^*$ Zu zeigen reicht also: Zu jedem $z_0 \in S^*$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren $a \in G_1, b \in G_2$ mit $|a - z_0| \leq \varepsilon, |b - z_0| \leq \varepsilon$.

Seien also $z_0 \in S^*$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Die Idee besteht darin, das Bild S^* der Sphäre in der Nähe des Punktes z_0 aufzuschneiden und das Innen- und das Außengebiet mit einem Weg durch dieses Loch hindurch zu verbinden.

Man bestimmt ein $\delta > 0$ so, dass aus $x, x' \in S$, $|x - x'| \leq \delta$ folgt: $|f(x) - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Es bezeichne $x_0 = f^{-1}(z_0)$, $F = \{x \in S : |x - x_0| \geq \delta\}$, $E = \{x \in S : |x - x_0| \leq \delta\}$, $F^* = f(F)$ und $E^* = f(E)$.

Nach dem Satz von Jordan–Brouwer ist $N(F^*) = N(F) = 0$, d.h. $\mathbb{R}^n \setminus F^*$ ist (wegweise-) zusammenhängend.

Wir wählen je einen Punkt in G_1 und G_2 und verbinden diese in $\mathbb{R}^n \setminus F^*$ durch einen (stetigen!) Weg. Nachdem $\mathbb{R}^n \setminus S^* = \mathbb{R}^n \setminus (F^* \cup E^*)$ nicht zusammenhängend und S^* kompakt ist, gibt es auf diesem Weg von G_1 kommend einen ersten Punkt z_1 auf E^* , nach Konstruktion von E^* ist $|z_1 - z_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Der Wahl von z_1 entsprechend existiert ein $a \in G_1$ mit $|a - z_1| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, so dass $|a - z_0| \leq \varepsilon$. Entsprechend findet man, entlang des verbindenden Weges von G_2 kommend, erneut einen ersten Punkt $z_2 \in E^*$ mit $|z_2 - z_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ und dazu $b \in G_2$ mit $|b - z_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, so dass wir ebenfalls $|z_0 - b| \leq \varepsilon$ erreichen. \square

Teil II

Fixpunktsätze

6 Der Brouwersche Fixpunktsatz für kompakte konvexe Mengen

Als wichtiger Zwischenschritt wird die Version für das Einheitssimplex dienen. Dazu führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\Sigma_{n-1} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \quad : \quad x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\},$$
$$\sigma_{n-1} := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n-1} \quad : \quad x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n-1} x_i \leq 1 \right\}.$$

Hilfssatz 6.1. *Jede stetige Abbildung $f : \Sigma_{n-1} \rightarrow \Sigma_{n-1}$ besitzt einen Fixpunkt.*

Beweis. Zunächst Umformulierung auf σ_{n-1} :

Für $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \sigma_{n-1}$ gilt $(x', x_n) := (x', 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i) \in \Sigma_{n-1}$ und

$$g(x') = (g_1(x'), \dots, g_{n-1}(x')) := \left(f_1 \left(x', 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right), \dots, f_{n-1} \left(x', 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right) \right)$$

bildet $\sigma_{n-1} \rightarrow \sigma_{n-1}$ stetig ab.

Betrachte nun $h(y') = (\sqrt{g_1(y_1^2, \dots, y_{n-1}^2)}, \dots, \sqrt{g_{n-1}(y_1^2, \dots, y_{n-1}^2)})$.

$$h : \overline{B_1^{(n-1)}(0)} \rightarrow \overline{B_1^{(n-1)}(0)} \quad \text{ist stetig,}$$

hat also nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz für den Kreis einen Fixpunkt $\eta' = h(\eta')$.

Mit $\xi' := (\eta_1^2, \dots, \eta_{n-1}^2) \in \sigma_{n-1}$ gilt zunächst

$$\xi' = g(\xi');$$

mit $\xi := \left(\xi', 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \right) \in \Sigma_{n-1}$ hat man dann

$$\xi_i = g_i(\xi') = f_i(\xi) \quad , i = 1, \dots, n-1,$$

und schließlich noch

$$\begin{aligned} \xi_n &= 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} g_i(\xi') \\ &\stackrel{\text{Def. von } g_i}{=} 1 - \sum_{i=1}^{n-1} f_i(\xi) \stackrel{f(\xi) \in \Sigma_{n-1}}{=} f_n(\xi), \end{aligned}$$

also insgesamt $f(\xi) = \xi$. □

Als direkte Folgerung aus diesem speziellen Fixpunktsatz erhält man einen Existenzsatz für einen positiven und damit insbesondere reellen Eigenwert bei i.a. nicht selbstadjungierten Matrizen mit positiven Komponenten:

Satz 6.2 (Frobenius). *Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit strikt positiven Koeffizienten $a_{ij} > 0$ besitzt einen strikt positiven Eigenwert $\lambda > 0$ und einen zugehörigen Eigenvektor ξ mit ausschließlich strikt positiven Komponenten $\xi_i > 0$.*

Beweis. Man betrachtet die stetige Abbildung:

$$f(x) = \frac{A \cdot x}{\underbrace{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_j}_{\text{stets} \neq 0}} : \Sigma_{n-1} \rightarrow \Sigma_{n-1}.$$

Diese besitzt einen Fixpunkt $f(\xi) = \xi$. Mit

$$\lambda = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_j > 0$$

ist dann:

$$\lambda \xi_i = (A \cdot \xi)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j > 0, \text{ d.h. auch } \xi_i > 0.$$

□

Satz 6.3 (Fixpunktsatz von Brouwer). *Sei $(\phi \neq) \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex. Dann besitzt jede stetige Abbildung $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ einen Fixpunkt.*

Beweis. Man konstruiert zunächst approximative Fixpunkte. Sei $\varepsilon > 0$.

Überdecke $\mathcal{C} \subset \bigcup_{j=1}^N B_\varepsilon(x_j)$, konstruiere untergeordnete Teilung der 1:

$$\begin{aligned} \psi_j : \mathcal{C} &\rightarrow [0, 1] \text{ stetig,} \\ \psi_j(x) &= 0, \text{ falls } x \notin B_\varepsilon(x_j), \\ \text{für alle } x \in \mathcal{C} &\text{ ist } \sum_{j=1}^N \psi_j(x) = 1. \end{aligned}$$

Für alle $x \in \mathcal{C}$ ist:

$$\left| x - \sum_{j=1}^N \psi_j(x) x_j \right| = \left| \sum_{j=1}^N \psi_j(x) (x - x_j) \right| \leq \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^N \psi_j(x) = \varepsilon. \quad (6.1)$$

Betrachte nun $g : \Sigma_{N-1} \rightarrow \Sigma_{N-1}$,

$$g(\Lambda) = g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \psi_j \left(f \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i x_i \right) \right)_{j=1, \dots, N}, \quad g \text{ ist stetig.}$$

Nach Hilfssatz 6.1 hat g einen Fixpunkt $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, d.h.

$$\lambda_j = \psi_j \left(f \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i x_i \right) \right).$$

Mit $\xi_\varepsilon := \sum_{j=1}^N \lambda_j x_j$ gilt

$$\xi_\varepsilon = \sum_{j=1}^N \psi_j(f(\xi_\varepsilon))x_j.$$

Auf Grund von (6.1) und der soeben hergeleiteten Relation ist

$$|\xi_\varepsilon - f(\xi_\varepsilon)| = \left| f(\xi_\varepsilon) - \sum_{j=1}^N \psi_j(f(\xi_\varepsilon))x_j \right| \leq \varepsilon.$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ findet man gemäß dem Satz von Bolzano-Weierstraß nach Auswahl einer Teilfolge

$$\begin{aligned} \xi_\varepsilon &\rightarrow \xi \in \mathcal{C}, & f(\xi_\varepsilon) &\rightarrow f(\xi), & \text{also} \\ & & \xi &= f(\xi). \end{aligned}$$

□

Aus dem Brouwerschen Fixpunktsatz kann man direkt und ohne (explizite) Verwendung des Abbildungsgrades das folgende topologische Resultat herleiten:

Folgerung 6.4 (Nichtretraktionssatz). *Es gibt keine stetige Abbildung $f : \overline{B_R(0)} \rightarrow \partial B_R(0)$ mit $f|_{\partial B_R(0)} = id$.*

Beweis. Annahme, das wäre doch der Fall, dann hätte $g = -f$ einen Fixpunkt $\xi \in \overline{B_R(0)} : \xi = g(\xi) = -f(\xi) \Rightarrow |\xi| = |f(\xi)| = R$, also $f(\xi) = \xi$ und folglich $\xi = -\xi$. Widerspruch! □

Beispiel 6.5. Existenz periodischer Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen. (Vgl. Deimling [Dei, S. 18f]) Wir betrachten das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$u' = f(t, u), \quad u(0) = x_0$$

mit einer Nichtlinearität $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die

- lokal eine Lipschitzbedingung bzgl. u erfüllt,
- stetig in (t, u) ist,
- die ω -periodisch bezüglich t ist, $f(t + \omega, u) = f(t, u)$,
- die einer Randbedingung etwa der Art genügt

$$\exists R \quad \forall x \text{ mit } |x| = R \quad \forall t : \sum_{i=1}^n f_i(t, x_i)x_i < 0.$$

Für alle Anfangswerte

$$x_0 \in \overline{B_R(0)}$$

mit zugehörigen Lösungen u ($0 \leq t < T$) gilt $|u(t)| \leq R$, denn falls $|u(t_0)| = R$, so ist

$$\frac{d}{dt}|u|^2 = 2u \cdot u' = f(t, u) \cdot u < 0$$

nach Voraussetzung. Mithin existiert die Lösung global, d.h. für $t \in [0, \infty)$ und die *Poincaré-Abbildung* $P_\omega(x_0) = u(\omega, x_0)$ definiert wegen der stetigen Abhängigkeit vom Anfangswert eine stetige Abbildung $\overline{B_R(0)} \rightarrow \overline{B_R(0)}$.

Nach dem Satz von Brouwer existiert ein Fixpunkt, d.h. $\overline{B_R(0)} \ni x_0 = P_\omega x_0$, d.h. die zum Anfangswert x_0 gehörige Lösung $u(t, x_0)$ erfüllt $u(0, x_0) = u(\omega, x_0)$. Nachdem $f(\cdot, u)$ ω -periodisch ist, ist auch $u(\cdot, x_0)$ ω -periodisch. \square

7 Exkurs: Der Fixpunktsatz von Kakutani, Gleichgewichte in der mathematischen Wirtschaftstheorie

Zur Beschreibung von Wirtschaftssystemen werden mengenwertige Abbildungen, sogenannte Korrespondenzen, herangezogen: z.B. bei festen Preisen kann man sich verschiedene Produktionsstrategien vorstellen, usw.

Definition 7.1. Seien $M \subset \mathbb{R}^m$, $N \subset \mathbb{R}^n$. Unter einer *Korrespondenz* $f : M \rightrightarrows N$ versteht man eine Abbildung $M \rightarrow \mathcal{P}(N)$. Die Korrespondenz $f : M \rightrightarrows N$ heißt *abgeschlossen*, falls für je zwei konvergente Folgen $x_k \rightarrow x$ in M , $y_k \rightarrow y$ in N ($k \rightarrow \infty$) mit $y_k \in f(x_k)$ ($k \in \mathbb{N}$) gilt:

$$y \in f(x).$$

Satz 7.2 (Fixpunktsatz von Kakutani, 1941). Sei $\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex. Die Korrespondenz $f : C \rightrightarrows C$ sei abgeschlossen, und für alle $x \in C$ sei $\emptyset \neq f(x)$ konvex. Dann hat f einen „Fixpunkt“, d.h. es existiert in $\xi \in C$ mit

$$\xi \in f(\xi).$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Man konstruiert zunächst ähnlich wie im Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes eine approximierende Abbildung $g_\varepsilon : C \rightarrow C$. Dazu überdecken wir $C \subset \bigcup_{j=1}^N B_\varepsilon(x_j)$ und betrachten eine untergeordnete Teilung der Eins:

$$\begin{aligned} \psi_j &: C \rightarrow [0, 1] \text{ stetig,} \\ \psi_j(x) &= 0, \text{ falls } x \notin B_\varepsilon(x_j), \\ \text{für alle } x \in C &\text{ ist } \sum_{j=1}^N \psi_j(x) = 1. \end{aligned}$$

Für $j = 1, \dots, N$ wählen wir $y_j \in f(x_j) \subset C$ und definieren

$$g_\varepsilon : C \rightarrow C, \quad g_\varepsilon(x) := \sum_{j=1}^N \psi_j(x) y_j.$$

Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz 6.3 hat jedes solche g_ε einen Fixpunkt:

$$\exists \xi_\varepsilon : \quad \xi_\varepsilon = g_\varepsilon(\xi_\varepsilon).$$

Für eine geeignete Folge $\varepsilon \searrow 0$ liefert die Kompaktheit von \mathcal{C} :

$$\exists \xi \in \mathcal{C} : \quad \xi_\varepsilon \rightarrow \xi \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Wir zeigen im Folgenden: $\xi \in f(\xi)$, d.h. ξ ist bereits der gesuchte Fixpunkt.

Sei $V_\rho = \bigcup_{y \in f(\xi)} B_\rho(y)$ die ρ -Umgebung von $f(\xi)$ bei zunächst festgehaltenem $\rho > 0$.

Behauptung: Es gibt ein $\delta > 0$ so, dass für alle $x \in \mathcal{C}$ mit $|x - \xi| < \delta$ gilt:

$$f(x) \subset V_\rho. \tag{7.1}$$

Beweis dazu: Andernfalls hätte man Folgen $x_k \in \mathcal{C}$, $x_k \rightarrow \xi$, $y_k \in f(x_k) \subset \mathcal{C}$, $y_k \notin V_\rho$. Da \mathcal{C} kompakt ist, kann man nach Auswahl einer Teilfolge $y_k \rightarrow y$ annehmen, $y \notin V_\rho \supset f(\xi)$ im Widerspruch zur Abgeschlossenheit von f .

Wir betrachten nun ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, so dass $\varepsilon < \delta$.

Behauptung: Für $x \in \mathcal{C}$ mit $|x - \xi| < \delta - \varepsilon$ gilt:

$$g_\varepsilon(x) \in V_\rho. \tag{7.2}$$

Beweis dazu: Definitionsgemäß gilt

$$g_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \psi_j(x) y_j = \sum_{\{j: |x-x_j| < \varepsilon\}} \psi_j(x) y_j.$$

Für x_j mit $|x - x_j| < \varepsilon$ ist $|\xi - x_j| \leq |\xi - x| + |x - x_j| < \delta - \varepsilon + \varepsilon = \delta$, d.h. $y_j \in f(x_j) \subset V_\rho$ nach (7.1). Da $f(\xi)$ und damit V_ρ konvex ist, folgt schließlich $g_\varepsilon(x) \in V_\rho$.

Mit Hilfe der beiden Zwischenbehauptungen kann der Beweis nun schnell zu Ende geführt werden. Für $\varepsilon \searrow 0$ gilt $\delta - \varepsilon \nearrow \delta$ und $|\xi_\varepsilon - \xi| \searrow 0$, also auf Grund von (7.2):

$$\xi_\varepsilon = g_\varepsilon(\xi_\varepsilon) \in V_\rho \subset \overline{V_\rho}.$$

und somit $\xi \in \overline{V_\rho}$; durch $\rho \searrow 0$ erhält man dann $\xi \in \bigcap_{\rho > 0} \overline{V_\rho} = \overline{f(\xi)} = f(\xi)$, denn f ist abgeschlossen. \square

Definition 7.3 (Grundkomponenten eines Wirtschaftssystems).

(a) n Güter: Aktion eines Wirtschaftssubjekts

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

dabei bedeutet

$x_j \geq 0$: Subjekt produziert Gut j in der Menge x_j .

$x_j \leq 0$: Subjekt konsumiert Gut j in der Menge $|x_j|$.

(b) *Preissystem*

$p = (p_1, \dots, p_n) \in \Sigma_{n-1}$, dem Einheitssimplex (vgl. Abschnitt 6).

Bemerkung. $p_i \geq 0$ ist die natürliche Bedingung, aber durch Einführung einer geeigneten „Währung“ kann normiert werden (Inflationsbereinigung).

$p \cdot x$ Wert der Aktion x unter p .

(c) *m Akteure*

$\phi \neq X^{(i)} \subset \mathbb{R}^n$ Aktionsbereich des Akteurs $i, i = 1, \dots, m$.

$\Phi^{(i)} : \Sigma_{n-1} \Rightarrow X^{(i)}, p \mapsto \Phi^{(i)}(p) \subset X^{(i)}$

Korrespondenz der von i unter p erwünschten Aktionen.

(d) *Gesamtaktion*

$\mathcal{X} = (x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) \in X^{(1)} \times \dots \times X^{(m)} \subset \mathbb{R}^{n \cdot m}$.

Zusammenfassung der Aktionen aller am Wirtschaftsgeschehen beteiligten Akteure (in einem Referenzzeitraum).

Definition 7.4. Eine Gesamtaktion $\mathcal{X} = (x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) \in X^{(1)} \times \dots \times X^{(m)}$ heißt

(a) *zulässig*, falls für alle Güter $j = 1, \dots, n$ gilt

$$\sum_{i=1}^m x_j^{(i)} \geq 0 \quad (\text{Produktion} \geq \text{Konsum});$$

(b) *allseits erwünscht* unter $p \in \Sigma_{n-1}$, falls für alle Akteure $i = 1, \dots, m$ gilt $x^{(i)} \in \Phi^{(i)}(p)$;

(c) *Gleichgewicht* unter p , falls \mathcal{X} zulässig und allseits erwünscht unter p ist.

Frage: Existieren Gleichgewichte? Genauer: Gibt es ein Preissystem $p \in \Sigma_{n-1}$ und eine Gesamtaktion \mathcal{X} , so dass \mathcal{X} Gleichgewicht unter p ist?

Beispiel 7.5. 2 Güter $j = 1, 2$; 2 Akteure $i = 1, 2$.

$j = 1$: „Konsumgut“

$j = 2$: „Rohstoff“

$i = 1$: „Produzent“

$$X^{(1)} = \{(t, -t) : 0 \leq t \leq 1\}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(p) &= \{x \in X^{(1)} : p \cdot x = \underbrace{\max_{u \in X^{(1)}} p \cdot u}_{(2p_1 - 1)t} \quad \text{„maximaler Profit“}\} \\ &= \begin{cases} (1, -1) & , \text{ falls } p_1 > \frac{1}{2}, \quad (p_1 > p_2) \\ (0, 0) & , \text{ falls } p_1 < \frac{1}{2}, \quad (p_1 < p_2) \\ X^{(1)} & , \text{ falls } p_1 = \frac{1}{2}, \quad (p_1 = p_2) \end{cases} \end{aligned}$$

$i = 2$: „Konsument“

$$\begin{aligned} X^{(2)} &= \left\{ (-t, 0) : 0 \leq t \leq \frac{1}{10} \right\} \\ \Phi^{(2)}(p) &= \left\{ x \in X^{(2)} : |p \cdot x| \leq \frac{1}{100} \right\} \\ &= \left\{ (-t, 0) : 0 \leq t \leq \frac{1}{10} \text{ und } 0 \leq p_1 t \leq \frac{1}{100} \right\} \end{aligned}$$

Für welche Preissysteme p existiert ein Gleichgewicht \mathcal{N} ?

- $p_1 > \frac{1}{2}$: Von $i = 1$ erwünscht $x^{(1)} = (1, -1)$, wegen $x^{(2)} = (-t, 0)$ ist Zulässigkeitsbedingung in zweiter Komponente verletzt: es gibt kein Gleichgewicht.
- $p_1 < \frac{1}{2}$: Dann ist $x^{(1)} = (0, 0)$, wegen „Zulässigkeit“ $x^{(2)} = (0, 0)$. Folglich ist $\mathcal{N} = \{(0, 0), (0, 0)\}$ ein Gleichgewicht.
- $p_1 = \frac{1}{2}$: Wieder ist $\mathcal{N} = \{(0, 0), (0, 0)\}$ ein Gleichgewicht.

Ein Grund für dieses enttäuschende Ergebnis liegt im Fehlen des Rohstofflieferanten. Im Fall $p_1 > \frac{1}{2}$ kann sogar auf Grund der „Profitgier“ des Produzenten nur dann ein Gleichgewicht erreicht werden, wenn ein hinreichend leistungsfähiger Rohstofflieferant auftritt, für den also die Aktion $(0, 1)$ unter $p_1 > \frac{1}{2}$ erwünscht ist.

Unter geeigneten Zusatzbedingungen an das Wirtschaftssystem soll die Existenz von Gleichgewichten gezeigt werden. Dazu dient

Satz 7.6 (Gale–Nikaido–Debreu, 1954–56). Sei $f : \Sigma_{n-1} \Rightarrow \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Korrespondenz mit folgenden Eigenschaften:

1. Für alle $p \in \Sigma_{n-1}$ ist $f(p)$ nicht leer und konvex.
2. f ist beschränkt, d.h. es gibt ein $R > 0$, so dass für alle $p \in \Sigma_{n-1}$ gilt: $f(p) \subset \overline{B_R(0)}$.
3. Für alle $p \in \Sigma_{n-1}$ und $y \in f(p)$ gilt: $p \cdot y \geq 0$

Dann existiert ein $p \in \Sigma_{n-1}$ und ein $z \in f(p)$ mit $z_j \geq 0$ für $j = 1, \dots, n$.

Beweis. Definiere $\Psi : \overline{B_R(0)} \Rightarrow \Sigma_{n-1}$

$$z \mapsto \Psi(z) = \left\{ p \in \Sigma_{n-1} : p \cdot z = \min_{q \in \Sigma_{n-1}} q \cdot z \right\} \quad \text{„schlechtester Preis“.}$$

Für jedes $z \in \overline{B_R(0)}$ ist $\Psi(z)$:

nicht leer: die stetige Funktion $q \mapsto q \cdot z$ nimmt auf dem Kompaktum Σ_{n-1} ihr Minimum an.

kompakt: $\Psi(z) \subset \Sigma_{n-1}$ ist abgeschlossen.

konvex: $p_1 \cdot z = p_2 \cdot z \Rightarrow (\tau p_1 + (1 - \tau)p_2) \cdot z = p_1 \cdot z$.

Schließlich ist Ψ abgeschlossen:

Seien $z_k \rightarrow z$ in $\overline{B_R(0)}$, $p_k \rightarrow p$ in Σ_{n-1} mit $p_k \in \Psi(z_k)$, d.h. für alle $q \in \Sigma_{n-1}$ ist

$$p_k \cdot z_k \leq q \cdot z_k$$

$$\Rightarrow \forall q \in \Sigma_{n-1} : p \cdot z \leq q \cdot z.$$

D.h. $p \in \Psi(z)$.

Definiere nun

$$F : \Sigma_{n-1} \times \overline{B_R(0)} \Rightarrow \Sigma_{n-1} \times \overline{B_R(0)}, \quad F(p, z) := \Psi(z) \times f(p).$$

Für alle (p, z) ist $F(p, z)$ nicht leer und konvex. Die Abgeschlossenheit von F folgt direkt aus der Abgeschlossenheit der Komponenten Ψ und f .

Nach dem Satz 6.2 von Kakutani hat F einen „Fixpunkt“, d.h. es gibt ein $p \in \Sigma_{n-1}$, $z \in \overline{B_R(0)}$ mit $p \in \Psi(z)$, $z \in f(p)$. Letzteres ist bereits der erste Teil der Behauptung. Aus $z \in f(p)$ folgt mit Hilfe von Bedingung (3) $p \cdot z \geq 0$. Aus $p \in \Psi(z)$ folgt $\forall q \in \Sigma_{n-1} : p \cdot z \leq q \cdot z$. Insgesamt erhalten wir: $\forall q \in \Sigma_{n-1} : q \cdot z \geq 0$.

Die Betrachtung der Einheitsvektoren $q = e_j$ ($j = 1, \dots, n$) ergibt daraus: $z_j \geq 0$ und damit den zweiten Teil der Behauptung. \square

Der vorhergehende Satz soll nun Anwendung auf die Existenz von Gleichgewichten in der Wirtschaftstheorie finden. Dazu ist mit Blick auf die obige Bedingung (3) zunächst noch eine weitere Eigenschaft zu definieren:

Definition 7.7. Ein Wirtschaftssystem heißt *global solide*, falls für alle $p \in \Sigma_{n-1}$ und für alle unter p allseits erwünschten Gesamtaktionen $\mathcal{X} = (x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$ gilt:

$$p \cdot \sum_{i=1}^m x^{(i)} \geq 0 \quad (\text{Wert der Gesamtaktion}).$$

Beispiel 7.8. Wir nehmen das Beispiel von oben wieder auf.

Sei $p = (p_1, p_2) = (p_1, 1 - p_1)$, $0 \leq p_1 \leq 1$, $\mathcal{X} = (x^{(1)}, x^{(2)})$ allseits erwünscht unter p , dann ist

$$x^{(1)} = \begin{cases} (1, -1), & \text{falls } p_1 > \frac{1}{2}, \\ (0, 0), & \text{falls } p_1 < \frac{1}{2}, \\ (t_1 - t_1) \text{ mit } t_1 \in [0, 1], & \text{falls } p_1 = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$x^{(2)} = (-t_2, 0), \quad 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{10}, \quad 0 \leq p_1 t_2 \leq \frac{1}{100};$$

$$x^{(1)} + x^{(2)} = \begin{cases} (1 - t_2, -1), & \text{falls } p_1 > \frac{1}{2}, \\ (-t_2, 0), & \text{falls } p_1 < \frac{1}{2}, \\ (t_1 - t_2, -t_1), & \text{falls } p_1 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Für $p_1 < \frac{1}{2}$ ist $p \cdot (x^{(1)} + x^{(2)}) = -t_2 p_1 < 0$ für $t_2 > 0$. D.h. dieses Wirtschaftssystem ist nicht global solide. (Man erreicht „stets ≥ 0 “ $\Leftrightarrow p_1 \geq \frac{101}{200}$.)

Satz 7.9. Für ein Wirtschaftssystem gelte:

1. Für $i = 1, \dots, m$ sind $X^{(i)}$ kompakt, $\Phi^{(i)} : \Sigma_{n-1} \Rightarrow X^{(i)}$ sind abgeschlossen, für alle $p \in \Sigma_{n-1}$ ist $\Phi^{(i)}(p)$ nicht leer und konvex.

2. Globale Solidität.

Dann gibt es ein Preissystem $p \in \Sigma_{n-1}$, so dass ein Gleichgewicht \mathcal{X} unter p existiert.

Beweis. Betrachte $f : \Sigma_{n-1} \Rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$f(p) = \sum_{i=1}^m \Phi^{(i)}(p) = \left\{ \sum_{i=1}^m x^{(i)} : x^{(i)} \in \Phi^{(i)}(p) \right\}.$$

Satz 7.6 liefert die Existenz eines $p \in \Sigma_{n-1}$ und von $x^{(i)} \in \Phi^{(i)}(p)$ mit

$$\left(\sum_{i=1}^m x^{(i)} \right)_j = \sum_{i=1}^m x_j^{(i)} \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n),$$

d.h. die Gesamtaktion

$$\mathcal{X} = (x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$$

ist allseits erwünscht und zulässig, also ein Gleichgewicht. □

8 Der Schaudersche Fixpunktsatz

Dieser Abschnitt ist das Bindeglied zu Kapitel III, in dem die Theorie des Brouwerschen Abbildungsgrades auf i.a. unendlichdimensionale und im Folgenden stets reelle Banachräume ausgedehnt werden soll. Kompaktheit hat bisher eine überragende Bedeutung gehabt, daran wird sich nichts ändern. Nachdem unendlichdimensionale Banachräume nicht lokalkompakt sind, wird die Kompaktheitslast künftig von den Abbildungen und nicht mehr von den Mengen (allein) zu tragen sein.

Definition 8.1. Sei V ein Banachraum. $M \subset V$ heißt *präkompakt*, falls jede Folge $(x_k) \subset M$ eine (in V) konvergente Teilfolge besitzt.

Es sei bemerkt, dass in einem Banachraum M genau dann präkompakt ist, wenn der Abschluss \overline{M} kompakt ist.

Zum Nachweis der Präkompaktheit in nichttrivialen Beispielen benötigt man häufig den

Satz 8.2 (Arzela–Ascoli). Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $M = \{f_k : K \rightarrow \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}\} \subset C^0(K, \mathbb{R})$ eine Menge von Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

1. Gleichmäßige Beschränktheit:

$$\exists C : \quad \forall k : \quad \|f_k\|_{C^0(K)} \leq C.$$

2. Gleichgradig gleichmäßige Stetigkeit:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle k und alle $x, x' \in K$ mit $|x - x'| \leq \delta$ gilt:

$$|f_k(x) - f_k(x')| \leq \varepsilon.$$

Dann ist M in $C^0(K, \mathbb{R})$ präkompakt, d.h. $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ besitzt eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Der Vollständigkeit halber beweisen wir diesen Satz im Anhang, s. Satz A.9

Definition 8.3. Sei V ein Banachraum, $M \subset V$. Die Abbildung $F : M \rightarrow V$ heißt *kompakt* oder *vollstetig*, falls gilt:

1. F ist stetig;
2. $F(M)$ ist präkompakt.

Beispiel 8.4. Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $V = C^0([a, b])$, für beliebiges $R > 0$ definiere

$$F : \underbrace{\overline{B_R(0)}}_V \rightarrow V, \quad F(f)(t) = \int_a^b K(t, s, f(s)) ds,$$

dabei sei $K \in C^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ vorausgesetzt.

Zur Stetigkeit von F : Seien $f_k, f \in \overline{B_R(0)}$, $f_k \rightarrow f$ gleichmäßig. Auf Grund der gleichmäßigen Stetigkeit von K auf $[a, b] \times [a, b] \times [-R, R]$ konvergiert $K(t, s, f_k(\cdot)) \rightarrow K(t, s, f(\cdot))$ gleichmäßig in (t, s) .

Zur Präkompaktheit von $F(\overline{B_R(0)})$: Dazu wiederum verwenden wir den Satz von Arzela–Ascoli:

- gleichmäßige Beschränktheit: Diese liegt auf der Hand.
- gleichgradig gleichmäßige Stetigkeit: Da K auf $[a, b] \times [a, b] \times [-R, R]$ gleichmäßig stetig ist, existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass aus $t, t' \in [a, b]$, $|t - t'| \leq \delta$, $s \in [a, b]$, $\rho \in [-R, R]$ folgt:

$$|K(t, s, \rho) - K(t', s, \rho)| \leq \varepsilon$$

Für alle $f \in \overline{B_R(0)}$ gilt also, falls $|t - t'| \leq \delta$:

$$|F(f)(t) - F(f)(t')| \leq \varepsilon |b - a|.$$

□

Beim Beweis des Schauderschen Fixpunktsatzes wollen wir ähnlich wie beim Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes vorgehen. Als wesentlich wird sich dabei herausstellen, dass sich kompakte Abbildungen gleichmäßig durch solche mit endlichdimensionalem Bildbereich approximieren lassen.

Hilfssatz 8.5. Sei $M \subset V$ präkompakt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es dann $n = n(\varepsilon)$ Punkte $x_1, \dots, x_n \in M$ und stetige Funktionen $\psi_j : M \rightarrow [0, 1]$ ($j = 1, \dots, n$) derart, dass für alle $x \in M$ gilt:

$$\sum_{j=1}^n \psi_j(x) = 1, \quad \left\| x - \underbrace{\sum_{j=1}^n \psi_j(x)x_j}_{\in \text{conv}(M)} \right\| \leq \varepsilon.$$

Beweis. Da \overline{M} kompakt ist, gibt es n Punkte $x_j \in M$, so dass

$$M \subset \bigcup_{j=1}^n B_\varepsilon(x_j).$$

Setze für $x \in M$:

$$\varphi_j(x) = \max\{\varepsilon - \|x - x_j\|, 0\},$$

dann ist φ_j stetig und $\varphi_j(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in M \cap B_\varepsilon(x_j)$; für jedes $x \in M$ ist wenigstens ein $\varphi_j(x) \neq 0$, d.h. $x \mapsto \sum_{j=1}^n \varphi_j(x)$ ($x \in M$) ist stetig in M sowie echt positiv. Also sind

$$\psi_j : M \rightarrow [0, 1], \quad \psi_j(x) := \frac{\varphi_j(x)}{\sum_{i=1}^n \varphi_i(x)}, \quad j = 1, \dots, n$$

stetig mit

$$\forall x \in M : \sum_{j=1}^n \psi_j(x) = 1$$

und

$$\psi_j(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in M \cap B_\varepsilon(x_j).$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{j=1}^n \psi_j(x)x_j \right\| &= \left\| \sum_{j=1}^n \psi_j(x)(x - x_j) \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \underbrace{\psi_j(x)}_{\neq 0 \text{ nur für } \|x-x_j\| < \varepsilon} \|x - x_j\| \leq \varepsilon \sum_{j=1}^n \psi_j(x) = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Hilfssatz 8.6. Sei $M \subset V$, $F : M \rightarrow V$ sei kompakt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es dann $n = n(\varepsilon)$ Elemente $y_1, \dots, y_n \in F(M)$ und n stetige Funktionen $f_j : M \rightarrow [0, 1]$, $j = 1, \dots, n$ derart, dass für alle $x \in M$ gilt:

$$\sum_{j=1}^n f_j(x) = 1, \quad \left\| F(x) - \sum_{j=1}^n f_j(x)y_j \right\| \leq \varepsilon.$$

Beweis. Da $F(M) \subset V$ präkompakt ist, existieren $y_1, \dots, y_n \in F(M)$ und $\psi_j : F(M) \rightarrow [0, 1]$ wie in Hilfssatz 8.5. Ersetze dort x durch y und setze ein: $y = F(x)$. Mit $f_j(x) = \psi_j(F(x))$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung 8.7. Für die stetige approximierende Abbildung $F_\varepsilon(x) := \sum_{j=1}^n f_j(x)y_j$ gilt:

- $F_\varepsilon : M \rightarrow \text{conv}(F(M))$,
- $F_\varepsilon(M)$ ist in einem endlichdimensionalen Teilraum von V enthalten.

Satz 8.8 (Schauderscher Fixpunktsatz, 1930). *Jede kompakte Abbildung $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ einer abgeschlossenen konvexen Teilmenge $(\emptyset \neq) \mathcal{C}$ eines reellen Banachraumes besitzt einen Fixpunkt, d.h. es gibt $\xi \in \mathcal{C}$ mit $F(\xi) = \xi$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle dazu $n \in \mathbb{N}, y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}, f_1, \dots, f_n : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ wie in Hilfssatz 8.6. Wie im Beweis des Brouwerschen Satzes lässt sich damit eine Abbildung definieren

$$g : \Sigma_{n-1} \rightarrow \Sigma_{n-1},$$

$$g_j(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = f_j \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \right).$$

Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz im Simplex, Hilfssatz 6.1, hat g einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $\Lambda^{(\varepsilon)} = (\lambda_1^{(\varepsilon)}, \dots, \lambda_n^{(\varepsilon)}) \in \Sigma_{n-1}$ mit

$$g(\Lambda^{(\varepsilon)}) = \Lambda^{(\varepsilon)}, \text{ d.h.}$$

$$\lambda_j^{(\varepsilon)} = f_j \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^{(\varepsilon)} y_i \right).$$

Mit der Setzung

$$\xi_\varepsilon := \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(\varepsilon)} y_j \in \mathcal{C}$$

hat man nach Hilfssatz 8.6

$$\varepsilon \geq \left\| F(\xi_\varepsilon) - \sum_{j=1}^n f_j(\xi_\varepsilon) y_j \right\| = \left\| F(\xi_\varepsilon) - \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(\varepsilon)} y_j \right\| \quad (*)$$

$$= \|F(\xi_\varepsilon) - \xi_\varepsilon\|.$$

Auf Grund der Kompaktheit von F gibt es eine Folge $\varepsilon \searrow 0$ und ein $\xi \in \mathcal{C}$ (diese Menge ist abgeschlossen!) mit $F(\xi_\varepsilon) \rightarrow \xi$. Die Ungleichung (*) ergibt $\xi_\varepsilon \rightarrow \xi \in \mathcal{C}$. Schließlich ist F stetig und folglich: $F(\xi_\varepsilon) \rightarrow F(\xi)$, und damit erhalten wir $F(\xi) = \xi$. \square

Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichungen

Satz 8.9 (Existenzsatz von Peano). *Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, ferner seien Anfangsdaten $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Dann existiert $h = h(t_0, x_0, f) > 0$ und eine stetig differenzierbare Lösung $x \in C^1([t_0 - h, t_0 + h], \mathbb{R})$ des Anfangswertproblems*

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad , \quad x(t_0) = x_0.$$

Beweis. Wähle irgendwelche Zahlen $a, b > 0$, setze

$$\begin{aligned} K &:= \max\{|f(t, x)| : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}, \\ h &:= \min\left\{a, \frac{b}{K}\right\}, \\ \mathcal{C} &:= \{x \in C^0([t_0 - h, t_0 + h]) : \text{für } |t - t_0| \leq h \text{ ist } |x(t) - x_0| \leq b\}, \end{aligned}$$

dabei handelt es sich um eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von

$$V = C^0([t_0 - h, t_0 + h]).$$

Für $x(\cdot) \in \mathcal{C}$, $|t - t_0| \leq h$ setze

$$F(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau,$$

offensichtlich ist:

$$|F(x)(t) - x_0| \leq |t - t_0| \cdot K \leq hK \leq b,$$

also

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}.$$

Zur Stetigkeit von F : wie im Beispiel oben.

Zur Präkompaktheit von $F(\mathcal{C})$: diese zeigt wieder der Satz von Arzela–Ascoli, dabei beachte man

$$|F(x)(t) - F(x)(t')| \leq K|t - t'|.$$

Der Schaudersche Fixpunktsatz liefert die Existenz eines $x(\cdot) \in \mathcal{C}$ mit

$$x(t) = F(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

□

Bemerkung. Unter der schwachen Voraussetzung der Stetigkeit von f geht die Eindeutigkeit und damit insbesondere die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten verloren.

Teil III

Der Leray–Schauder–Abbildungsgrad im Banachraum

9 Definition des Abbildungsgrades im Banachraum

Der Abbildungsgrad im Banachraum wird zu erklären sein auf der Klasse kompakter Störungen der Identität. Diese Klasse lässt sich nicht mehr wesentlich vergrößern, wenn die Eigenschaften des Abbildungsgrades erhalten bleiben sollen. Glücklicherweise ist sie aber auch groß genug für viele relevante Anwendungen in Mathematik und Physik, vorausgesetzt, man betrachtet beschränkte Grundgebiete.

9.1 Endlichdimensionale Banachräume

Hier ist im Wesentlichen die Unabhängigkeit von der Wahl der Basis zu zeigen. Dazu dient:

Hilfssatz 9.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, $f \in C^0, 0 \notin f(\partial\Omega)$. Weiter sei $\varphi \in GL(n), \Omega^* = \varphi^{-1}(\Omega), g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$. Dann gilt:

$$d(f, \Omega) = d(g, \Omega^*).$$

Beweis. Sei $f \in C^1, f_k \rightarrow f$ gleichmäßig auf $\bar{\Omega}, f_k|_{\partial\Omega} \neq 0$. Auf Grund des Lemmas von Sard lässt sich für jedes feste aber beliebige k erreichen: In Ω gibt es in $p \in \mathbb{N}_0$ paarweise verschiedene Lösungen x_1, \dots, x_p der Gleichung $f_k(x) = 0$, es ist $J_{f_k}(x_j) \neq 0, j = 1, \dots, p$. Damit hat man

$$d(f_k, \Omega) = \sum_{j=1}^p \operatorname{sgn} J_{f_k}(x_j).$$

Betrachte nun $g_k = \varphi^{-1} \circ f_k \circ \varphi$ auf $\Omega^*, g_k(x) = 0$ wird in Ω^* genau von $\varphi^{-1}(x_j), j = 1, \dots, p$ gelöst, und es ist

$$\begin{aligned} J_{g_k}(\varphi^{-1}(x_j)) &= \det(\varphi^{-1}) \cdot J_{f_k}(\varphi(\varphi^{-1}(x_j))) \cdot \det \varphi \\ &= J_{f_k}(x_j) \neq 0, \text{ also} \\ d(g_k, \Omega^*) &= \sum_{j=1}^p \operatorname{sgn} J_{g_k}(\varphi^{-1}(x_j)) = \sum_{j=1}^p \operatorname{sgn} J_{f_k}(x_j) = d(f_k, \Omega). \end{aligned}$$

Da auch $g_k \rightarrow g$ gleichmäßig in Ω^* konvergiert, folgt damit $d(f, \Omega) = d(g, \Omega^*)$. \square

Bemerkung. Der Beweis kann ebenso gut mit Hilfe der Transformationsformel und Satz 4.9 geführt werden.

Hilfssatz 9.2. Sei V ein reeller normierter Vektorraum, $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Ist $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ eine reguläre lineare Abbildung (d.h. invertierbar), dann sind ψ und ψ^{-1} stetig. Insbesondere ist V vollständig.

Beweis. Die Äquivalenz der Normen auf endlichdimensionalen Räumen, und genau das bedeutet dieser Hilfssatz, wird häufig in Analysis- oder Funktionalanalysisgrundkursen gezeigt.

Stetigkeit von ψ :

$$\|\psi(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \psi(e_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|\psi(e_i)\| \leq |x| \sqrt{\sum_{i=1}^n \|\psi(e_i)\|^2} = C|x|.$$

Da nun ψ stetig, ist $x \mapsto \|\psi(x)\|, \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und nimmt auf S^{n-1} ihr Minimum $\frac{1}{C} > 0$ an, denn ψ ist bijektiv.

$$\begin{aligned} \text{D.h. für } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}: & \quad \|\psi(\frac{x}{|x|})\| \geq \frac{1}{C}, \\ \text{für } x \in \mathbb{R}^n: & \quad |x| \leq \tilde{C} \|\psi(x)\|, \\ \text{für } y \in V, \text{ da } \psi \text{ bijektiv:} & \quad |\psi^{-1}(y)| \leq \tilde{C} \|y\|. \end{aligned}$$

□

Definition 9.3. Sei V ein Banachraum, $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Sei $\Omega \subset V$ beschränkt und offen, $f: \bar{\Omega} \rightarrow V$ sei stetig, $f|_{\partial\Omega} \neq 0$. Sei $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow V$ linear, bijektiv, $\Omega^* := \psi^{-1}(\Omega)$. Dann wird der *Abbildungsgrad* von f in Ω bezüglich 0 durch

$$d(f, \Omega) = d(\psi^{-1} \circ f \circ \psi, \Omega^*)$$

erklärt.

Bemerkung 9.4. Hilfssatz 9.2 zeigt die Stetigkeit von ψ, ψ^{-1} , Hilfssatz 9.1 die Unabhängigkeit von der Wahl von ψ . Ist nämlich $\tilde{\psi}: \mathbb{R}^n \rightarrow V$ bijektiv, linear, $\tilde{\Omega}^* = \tilde{\psi}^{-1}(\Omega)$, dann ist mit $\varphi = \psi^{-1} \circ \tilde{\psi}: \varphi^{-1}(\Omega^*) = \tilde{\Omega}^*$,

$$d(\psi^{-1} \circ f \circ \psi, \Omega^*) = d(\varphi^{-1} \circ \psi^{-1} \circ f \circ \psi \circ \varphi, \tilde{\Omega}^*) = d(\tilde{\psi}^{-1} \circ f \circ \tilde{\psi}, \tilde{\Omega}^*).$$

Es ist unmittelbar klar, dass sich alle Eigenschaften des Brouwerschen Abbildungsgrades auf den soeben definierten übertragen, insbesondere Homotopieinvarianz, Existenz von Nullstellen, Brouwerscher Fixpunktsatz (man beachte, dass die Linearität von ψ die Konvexität der betrachteten Mengen erhält), Indexformel,...

9.2 Identität – Abbildung mit endlichdimensionalem Wertebereich

Im Folgenden sei V stets ein beliebiger reeller Banachraum, $\emptyset \neq \Omega \subset V$ beschränkt und offen. Man betrachtet endlichdimensionale Teilräume $V' \subset V, 0 < \dim V' < \infty$ mit

$$\emptyset \neq \Omega \cap V' =: \Omega_{V'}. \tag{9.1}$$

Diese Bedingung lässt sich durch Hinzunahme eines Elementes von Ω zu V' stets erfüllen. In V' gilt dann in der Relativtopologie von V' :

$$\Omega_{V'} \text{ offen, } \partial\Omega_{V'} \subset \partial\Omega \cap V', \quad \overline{\Omega_{V'}} = \Omega_{V'} \cup \partial\Omega_{V'} \subset \bar{\Omega} \cap V'.$$

Zunächst sollen Abbildungen $Id - F : V \rightarrow V$ betrachtet werden, wobei

$$F : V \rightarrow V' \text{ stetig ist.} \quad (9.2)$$

Insbesondere hat F endlichdimensionalen Wertebereich.

Idee:

$$d(Id - F, \Omega) \stackrel{\text{def}}{=} d_V, (Id - F, \Omega_{V'}). \quad (9.3)$$

Allerdings ist V' durch die Bedingungen (9.1) und (9.2) nicht eindeutig festgelegt. Und bei dem dritten Definitionsschritt in 9.3 ist die Freiheit in der Wahl von V' ganz wesentlich: siehe dazu (9.7) unten. Die Unabhängigkeit der angestrebten Definition von der Wahl des endlichdimensionalen Teilraumes V' ist nachzuweisen. Dazu dient:

Hilfssatz 9.5. *Sei V ein Banachraum, $\Omega \subset V$ sei beschränkt und offen, $F : \bar{\Omega} \rightarrow V$ sei stetig mit endlichdimensionalem Bildbereich, $0 \notin (Id - F)(\partial\Omega)$. Seien $V', V'' \subset V$ Teilräume mit:*

1. $V \subset V'', 0 < \dim V' \leq \dim V'' < \infty$,
2. $V' \cap \Omega =: \Omega_{V'} \neq \emptyset$,
3. $F : V \rightarrow V'$.

Dann gilt:

$$d_{V'}(Id - F, \Omega_{V'}) = d_{V''}(Id - F, \Omega_{V''}).$$

Beweis. Wegen $\partial\Omega_{V'} \subset \partial\Omega \cap V', \partial\Omega_{V''} \subset \partial\Omega \cap V''$ (relative Ränder) sind die Abbildungsgrade wohldefiniert.

Sei $\dim V' = n \geq 1, \dim V'' = n + p$, o.B.d.A. $p \geq 1$.

Sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V' und $\{b_1, \dots, b_n, b_{n+1}, \dots, b_{n+p}\}$ eine Basis von V'' . Dann hat F für $x \in \bar{\Omega}$ die Darstellung $F(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)b_i$ mit stetigen Komponentenfunktionen $f_i : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$.

Wir betrachten die zu V', V'' gehörigen Koordinatenabbildungen

$$\psi^* : \mathbb{R}^n \rightarrow V' \quad , \quad \psi^*(x^*) = \sum_{i=1}^n x_i^* b_i, \quad \Omega^* = (\psi^*)^{-1}(\Omega_{V'}),$$

$$\psi^{**} : \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow V'' \quad , \quad \psi^{**}(x^{**}) = \sum_{i=1}^{n+p} x_i^{**} b_i, \quad \Omega^{**} = (\psi^{**})^{-1}(\Omega_{V''}).$$

Dabei gilt für $x^* \in \mathbb{R}^n$:

$$x^* \in \Omega^* \Leftrightarrow (x^*, 0) \in \Omega^{**}$$

sowie deshalb

$$\partial\Omega^* \times \{0\} \subset \partial\Omega^{**} \cap \mathbb{R}^n \times \{0\}.$$

Man betrachtet nun die Abbildung F in den Koordinaten ψ^* bzw. ψ^{**} :

$$f^* : \overline{\Omega^*} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f^*(x^*) := \begin{pmatrix} f_1^*(x^*) \\ \vdots \\ f_n^*(x^*) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f_1(\sum_{i=1}^n x_i^* b_i) \\ \vdots \\ f_n(\sum_{i=1}^n x_i^* b_i) \end{pmatrix},$$

$$f^{**} : \overline{\Omega^{**}} \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}, \quad f^{**}(x^{**}) := \begin{pmatrix} f_1^*(x^{**}) \\ \vdots \\ f_n^*(x^{**}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\sum_{i=1}^{n+p} x_i^{**} b_i) \\ \vdots \\ f_n(\sum_{i=1}^{n+p} x_i^{**} b_i) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

dabei gilt für $x^* \in \overline{\Omega^*}$: $f_i^*(x^*) = f_i^{**}(x^*, 0)$.

Es ist gemäß Definition 9.3:

$$d_{V'}(Id - F, \Omega_{V'}) = d(Id - f^*, \Omega^*); \quad d_{V''}(Id - F, \Omega_{V''}) = d(Id - f^{**}, \Omega^{**}). \quad (9.4)$$

Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass für $x^{**} \in \partial\Omega^{**}$

$$|(Id - f^{**})(x^{**})| > \varepsilon,$$

dann gilt auch für $x^* \in \partial\Omega^*$: $((x^*, 0) \in \partial\Omega^{**})$

$$|(Id - f^*)(x^*)| > \varepsilon.$$

Approximiere $f_1^{**}, \dots, f_n^{**}$ gleichmäßig auf $\overline{\Omega^{**}}$ durch $\tilde{g}_1^{**}, \dots, \tilde{g}_n^{**} \in C^1(\mathbb{R}^{n+p}, \mathbb{R})$,

so dass

$$\max_{\overline{\Omega^{**}}} |f^{**} - \tilde{g}^{**}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit $\tilde{g}_j^*(x^*) = \tilde{g}_j^{**}(x^*, 0)$ gilt dann auch

$$\max_{\overline{\Omega^*}} |f^* - \tilde{g}^*| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Auf Grund des Lemmas von Sard kann nun \tilde{g}^* durch einen kleinen Vektor $\gamma \in \mathbb{R}^n$, $|\gamma| < \frac{\varepsilon}{2}$ so modifiziert werden, dass für

$$g^* := \tilde{g}^* - \gamma$$

gilt:

$$(Id - g^*)(x^*) = 0$$

hat in Ω^* höchstens endlich viele Lösungen, für diese gilt:

$$J_{Id-g^*}(x^*) \neq 0.$$

Zudem ist

$$d(Id - g^*, \Omega^*) = d_{V'}(Id - F, \Omega_{V'}). \quad (9.5)$$

Für $g^{**} := \tilde{g}^{**} - \binom{\gamma}{0}$ gilt dann auch

$$d(Id - g^{**}, \Omega^*) = d_{V''}(Id - F, \Omega_{V''}); \quad (9.6)$$

und aus $x^{**} \in \Omega^{**}$,

$$(Id - g^{**})(x^{**}) = 0$$

folgt zunächst

$$x_{n+1}^{**} = \dots = x_{n+p}^{**} = 0 \text{ und mit } x^{**} = (x^*, 0)$$

auch $(Id - g^*)(x^*) = 0$, $x^* \in \Omega^*$.

D.h. die Nullstellen von $Id - g^*$ und $Id - g^{**}$ entsprechen einander. In diesen Nullstellen x^* bzw. x^{**} gilt nun:

$$\begin{aligned} J_{(Id-g^{**})}(x^*, 0) &= \det \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 - \frac{\partial g_1^{**}}{\partial x_1}(x^*, 0) & \dots & -\frac{\partial g_1^{**}}{\partial x_n}(x^*, 0) & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & * \\ -\frac{\partial g_n^{**}}{\partial x_1}(x^*, 0) & \dots & 1 - \frac{\partial g_n^{**}}{\partial x_n}(x^*, 0) & & & \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \\ &= \det \left(\begin{array}{ccc} 1 - \frac{\partial g_1^*}{\partial x_1}(x^*) & \dots & -\frac{\partial g_1^*}{\partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial g_n^*}{\partial x_1}(x^*) & \dots & 1 - \frac{\partial g_n^*}{\partial x_n}(x^*) \end{array} \right) = J_{(Id-g^*)}(x^*). \end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass zur Bestimmung von $\frac{\partial g_j^{**}}{\partial x_j}(x^*, 0)$ ($j = 1, \dots, n$) die Kenntnis von $x^* \mapsto g_i^{**}(x^*, 0) = g_i^*(x^*)$ ausreicht.

D.h., nach Hilfssatz 3.7 ist $d(Id - g^{**}, \Omega^{**}) = d(Id - g^*, \Omega^*)$, zusammen mit (9.5) und (9.6) ergibt das die Behauptung des Hilfssatzes. \square

Damit wird die folgende Definition sinnvoll:

Definition 9.6. Sei V ein Banachraum, $\Omega \subset V$ sei beschränkt und offen, $F : \overline{\Omega} \rightarrow V$ sei stetig mit endlichdimensionalem Bildbereich, $0 \notin (Id - F)(\partial\Omega)$.

Sei $V' \subset V$ ein Teilraum mit

1. $0 < \dim V' < \infty$,
2. $\Omega_{V'} := \Omega \cap V' \neq \emptyset$,
3. $F : \overline{\Omega} \rightarrow V'$.

Dann wird der *Abbildungsgrad* von $Id - F$ in Ω definiert durch:

$$d(Id - F, \Omega) := d_{V'} \left((Id - F)|_{\overline{\Omega}_{V'}}, \Omega_{V'} \right).$$

Bemerkung. Auch in diesem Schritt übertragen sich die Fundamenteigenschaften des Abbildungsgrades in offensichtlicher Weise.

9.3 Identität – kompakt

Idee: Laut Hilfssatz 8.6 können kompakte Abbildungen $F : V \rightarrow V$ durch solche mit endlichdimensionalem Wertebereich approximiert werden. Wie gut die Approximation zu sein hat, damit man auf Definition 9.6 aus dem vorhergehenden Teil zurückgreifen kann, klärt der folgende Hilfssatz.

Hilfssatz 9.7. *Sei $A \subset V$ abgeschlossen, $F : A \rightarrow V$ sei kompakt. Für $x \in A$ gelte $(Id - F)(x) \neq 0$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in A$ gilt:*

$$\|(Id - F)(x)\| \geq \varepsilon.$$

Beweis. Annahme, die Behauptung sei falsch, dann existiert also eine Folge $x_k \in A$ mit $(Id - F)(x_k) = x_k - F(x_k) \rightarrow 0$.

Da F kompakt ist, konvergiert nach Auswahl einer Teilfolge $F(x_k) \rightarrow y, y \in V$ geeignet, mithin auch $x_k \rightarrow x, x \in V$ geeignet. Es ist $0 = x - y$, und da F stetig ist, $0 = x - F(x) = (Id - F)(x)$. Da A abgeschlossen ist, ergibt sich noch $x \in A$ und damit ein Widerspruch. \square

Definition 9.8. Sei $\Omega \subset V$ beschränkt und offen, $F : \bar{\Omega} \rightarrow V$ sei kompakt, ferner gelte $0 \notin (Id - F)(\partial\Omega)$. Eine Abbildung $G : \bar{\Omega} \rightarrow V$ heißt *zulässige Approximation* von F , falls gilt:

1. G ist stetig,
2. es gibt einen endlichdimensionalen Teilraum $V' \subset V$ mit $G : \bar{\Omega} \rightarrow V'$ und $\Omega_{V'} = \Omega \cap V' \neq \emptyset$,
3. $\sup_{x \in \bar{\Omega}} \|F(x) - G(x)\| < \inf_{x \in \partial\Omega} \|(Id - F)(x)\|$.

Bemerkung. Auf Grund der Hilfssätze 9.7 und 8.6 existieren stets zulässige Approximationen.

Dass der Abbildungsgrad für kompakte Störungen der Identität mit Hilfe zulässiger Approximationen wohl-definiert werden kann, zeigt der folgende Hilfssatz.

Hilfssatz 9.9. *Sei $\Omega \subset V$ beschränkt und offen, $F : \bar{\Omega} \rightarrow V$ sei kompakt, ferner gelte $0 \notin (Id - F)(\partial\Omega)$. Sind $G, H : \bar{\Omega} \rightarrow V$ zwei zulässige Approximationen von F , so gilt:*

$$d(Id - G, \Omega) = d(Id - H, \Omega).$$

Beweis. Zunächst ist offensichtlich $0 \notin (Id - G)(\partial\Omega), 0 \notin (Id - H)(\partial\Omega)$. Auf Grund von Hilfssatz 9.5 lässt sich ein endlichdimensionaler Teilraum $V' \subset V$ finden, so dass

$$G : \bar{\Omega} \rightarrow V', \quad H : \bar{\Omega} \rightarrow V', \quad \Omega_{V'} := \Omega \cap V' \neq \emptyset$$

und

$$\begin{aligned} d(Id - G, \Omega) &= d_{V'}(Id - G, \Omega_{V'}), \\ d(Id - H, \Omega) &= d_{V'}(Id - H, \Omega_{V'}). \end{aligned} \tag{9.7}$$

Wir betrachten die Homotopie $h : [0, 1] \times \bar{\Omega}_{V'} \rightarrow V'$,

$$h(\tau, x) = x - (\tau G(x) - (1 - \tau)H(x)), \text{ stetig in } (\tau, x).$$

Für $x \in \partial_{V'}\Omega_{V'} \subset \partial\Omega \cap V'$ gilt

$$\begin{aligned} \|h(\tau, x)\| &= \|(Id - F)(x) + \tau(F - G)(x) + (1 - \tau)(F - H)(x)\| \\ &\geq \inf_{x \in \partial\Omega_{V'}} \|(Id - F)(x)\| - \tau \sup_{x \in \partial\Omega_{V'}} \|(F - G)(x)\| - (1 - \tau) \sup_{x \in \partial\Omega_{V'}} \|(F - H)(x)\| \\ &\geq \inf_{x \in \partial\Omega} \|(Id - F)(x)\| - \tau \sup_{x \in \bar{\Omega}} \|(F - G)(x)\| - (1 - \tau) \sup_{x \in \bar{\Omega}} \|(F - H)(x)\| > 0 \end{aligned}$$

auf Grund der Zulässigkeitsbedingung an G und H .

Die Homotopieinvarianz des endlichdimensionalen Abbildungsgrades liefert

$$d_{V'}(Id - G, \Omega_{V'}) = d_{V'}(Id - H, \Omega_{V'})$$

und deshalb zusammen mit (9.7) die Behauptung. \square

Definition 9.10. Sei $\Omega \subset V$ beschränkt und offen, $F : \bar{\Omega} \rightarrow V$ sei kompakt, ferner gelte $0 \notin (Id - F)(\partial\Omega)$. Es sei $G : \bar{\Omega} \rightarrow V$ eine zulässige Approximation von F im Sinne von Definition 9.8. Dann heißt

$$d(Id - F, \Omega) := d(Id - G, \Omega)$$

Leray–Schauder–(Abbildungs–) Grad von $Id - F$ in Ω bezüglich 0.

Schließlich setzt man für $z \in V, z \notin (Id - F)(\partial\Omega)$

$$d(Id - F, \Omega, z) := d(Id - F)(\cdot) - z, \Omega).$$

Beispiel 9.11. Sei V unendlichdimensional, $z \in V, z \notin \partial\Omega$, dabei $\Omega \subset V$ beschränkt und offen. $F : \bar{\Omega} \rightarrow V, F(x) = z$.

1. Fall: $z \in \Omega$. Wähle

$$y = \begin{cases} z, & \text{falls } z \neq 0, \\ \text{beliebig in } \Omega \setminus \{0\}, & \text{falls } z = 0; \end{cases}$$

$V' = \text{Span}(y), \quad \Omega_{V'} = \{\lambda y : \lambda \in \mathbb{R}, \lambda y \in \Omega\}$, dann ist $z = \varepsilon y$ mit

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{falls } z \neq 0, \\ 0, & \text{falls } z = 0. \end{cases}$$

$(Id - F)(\lambda y) = \lambda y - \varepsilon y = (\lambda - \varepsilon)y$. Dabei ist $\varepsilon y \in \Omega_{V'}$, durch Betrachtung von $\lambda \mapsto \lambda - \varepsilon$ auf $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda y \in \Omega_{V'}\} \ni \varepsilon$ erhält man

$$d(Id - F, \Omega) = 1.$$

2. Fall: $z \notin \bar{\Omega}$. Wähle

$$y_1 \begin{cases} = z, & \text{falls } z \neq 0, \\ \notin \bar{\Omega} \text{ beliebig,} & \text{falls } z = 0, \end{cases}$$

weiter sei $y_2 \in \Omega \setminus \{0\}$ so, dass y_1, y_2 linear unabhängig sind.

Sei ε wie oben definiert, wieder ist $z = \varepsilon y_1$. Wir betrachten

$$V' = \text{Span}(y_1, y_2), \quad \Omega_{V'} = \{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in \Omega\}, \quad z = \varepsilon y_1 \notin \bar{\Omega}_{V'}.$$

Wegen

$$(Id - F)(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 - \varepsilon y_1$$

ist dann

$$0 = d_{V'}(Id - F, \Omega_{V'}) = d(Id - F, \Omega).$$

\square

Fundamenteigenschaften des Leray–Schauder–Grades

Satz 9.12. Sei $\Omega \subset V$ beschränkt und offen, $F : \overline{\Omega} \rightarrow V$ sei kompakt, $0 \notin (Id - F)(\partial\Omega)$. Außerdem sei $d(Id - F, \Omega) \neq 0$. Dann hat $Id - F$ eine Nullstelle in Ω , d.h. es existiert ein $\xi \in \Omega$, so dass $\xi - F(\xi) = 0$.

Beweis. Sei $G_n : \overline{\Omega} \rightarrow V$ eine Folge zulässiger Approximationen mit

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} \|F(x) - G_n(x)\| \leq \frac{1}{n}.$$

Nach Definition von Zulässigkeit ist $d(Id - G_n, \Omega) = d(Id - F, \Omega) \neq 0$, also existieren auf Grund des entsprechenden endlichdimensionalen Resultats (s. Satz 2.9) $\xi_n \in \Omega$, die die Gleichung $\xi_n - G_n(\xi_n) = 0$ lösen. Folglich ist

$$\|F(\xi_n) - \xi_n\| \leq \frac{1}{n}. \quad (9.8)$$

Da F kompakt ist, konvergiert nach Auswahl einer Teilfolge $F(\xi_n)$ gegen ein geeignetes $\eta \in V$, mithin $\xi_n \rightarrow \xi \in \overline{\Omega}$. Da F stetig: $\eta = F(\xi)$, und wegen (9.8): $F(\xi) = \xi$ oder $(Id - F)(\xi) = 0$. Nach Voraussetzung ist $\xi \notin \partial\Omega$, also $\xi \in \Omega$. \square

Zur Invarianz gegenüber „kompakten Homotopien“ :

Satz 9.13. Sei $\Omega \subset V$ beschränkt und offen, $H : [0, 1] \times \overline{\Omega} \rightarrow V$ sei kompakt, für jedes $\tau \in [0, 1]$ gelte: $0 \notin (Id - H(\tau, \cdot))(\partial\Omega)$. Dann ist die Abbildung $[0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}, \tau \mapsto d(Id - H(\tau, \cdot), \Omega)$ konstant.

Beweis. Die im Folgenden benötigten Resultate über in τ und σ simultan kompakte Operatoren ergeben sich als direkte Verallgemeinerungen der zitierten Hilfssätze. Wegen Hilfssatz 9.7 existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für $(\tau, x) \in [0, 1] \times \partial\Omega$ gilt: $\|x - H(\tau, x)\| \geq \varepsilon$. Auf Grund von Hilfssatz 8.6 existieren ein endlichdimensionaler Teilraum $V' \subset V$ mit $\Omega_{V'} = \Omega \cap V' \neq \emptyset$ und eine stetige Abbildung $G : [0, 1] \times \overline{\Omega} \rightarrow V'$, so dass für alle $(\tau, x) \in [0, 1] \times \overline{\Omega}$ gilt: $\|G(\tau, x) - H(\tau, x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$; d.h. für jedes $\tau \in [0, 1]$ ist $G(\tau, \cdot)$ eine zulässige Approximation für $H(\tau, \cdot)$. Definitionsgemäß ist also $d(Id - H(\tau, \cdot), \Omega) = d(Id - G)(\tau, \cdot), \Omega) = d_{V'}(Id - G(\tau, \cdot), \Omega_{V'})$.

Die Konstanz der letzteren Funktion in τ und damit die Behauptung folgt aus der Homotopieinvarianz des Abbildungsgrades auf endlichdimensionalen Banachräumen. Man beachte, dass auf $\partial\Omega$ und damit insbesondere auf $\partial_{V'}\Omega_{V'} \subset V' \cap \partial\Omega$ gilt: $\|Id - G(\tau, \cdot)\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. \square

Bemerkung 9.14. (a) Sind $F, G : \overline{\Omega} \rightarrow V$ kompakt, so erhält man durch die konvexe Kombination $H(\tau, x) = \tau F(x) + (1 - \tau)G(x)$ eine „kompakte“ Homotopie.

(b) Sei $H : [0, 1] \times \overline{\Omega} \rightarrow V$ eine Abbildung mit den Eigenschaften:

1. für jedes $\tau \in [0, 1]$ ist $H(\tau, \cdot)$ kompakt;
2. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $\tau, \tau' \in [0, 1]$ mit $|\tau - \tau'| \leq \delta$ gilt:

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} \|H(\tau, x) - H(\tau', x)\| \leq \varepsilon.$$

Dann ist $H(\cdot, \cdot)$ eine „kompakte Homotopie“ im Sinne von Satz 9.13.

Beweis. Die Stetigkeit liegt auf der Hand.

Zur Kompaktheit: Sei $(\tau_k, x_k) \in [0, 1] \times \bar{\Omega}$. Nach Auswahl einer Teilfolge gilt: $\tau_k \rightarrow \tau$, nach nochmaliger Auswahl $H(\tau, x_k) \rightarrow y \in V$. Sei $\varepsilon > 0$, bestimme dazu δ gemäß (2) und k_0 so dass für $k \geq k_0$ gilt: $\|H(\tau, x_k) - y\| \leq \varepsilon$.

Indem man k_0 gegebenenfalls vergrößert, ist für $k \geq k_0$: $|\tau_k - \tau| \leq \delta$, also $\|H(\tau_k, x) - H(\tau, x)\| \leq \varepsilon$ für alle $x \in \bar{\Omega}$. Insgesamt folgt:

$$\|H(\tau_k, x_k) - y\| \leq \|H(\tau_k, x_k) - H(\tau, x_k)\| + \|H(\tau, x_k) - y\| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

□

Hilfssatz 9.15. Sei $A \subset V$ abgeschlossen, $F : A \rightarrow V$ sei kompakt. Dann ist $(Id - F)(A)$ abgeschlossen.

Beweis. Sei $y_k = (Id - F)(x_k)$, $x_k \in A$, $y_k \rightarrow y$ in V . Nach Auswahl einer Teilfolge konvergiert $F(x_k) \rightarrow \eta$ mit einem geeigneten η , folglich auch $x_k \rightarrow \xi := y + \eta$. Es ist $\xi \in A$, denn A ist abgeschlossen. Es folgt $F(\xi) = \eta$, $(Id - F)(\xi) = \xi - \eta = y$, d.h. $y \in (Id - F)(A)$. □

Definition 9.16. Sei $\Omega \subset V$ beschränkt und offen, $F : \bar{\Omega} \rightarrow V$ sei kompakt. Sei K eine Wegzusammenhangskomponente von $V \setminus (Id - F)(\partial\Omega)$. Dann setzen wir

$$d(Id - F, \Omega, K) := d(Id - F, \Omega, z)$$

für ein beliebig ausgewähltes $z \in K$.

Bemerkung. Der Homotopiesatz zeigt die Wohldefiniertheit. Da $(Id - F)(\bar{\Omega})$ beschränkt ist, gibt es genau eine unbeschränkte Komponente K_∞ von $V \setminus (Id - F)(\partial\Omega)$. Wir können dabei o.B.d.A. von $\dim V = \infty$ ausgehen. Es ist $d(Id - F, \Omega, K_\infty) = 0$.

Zum Abschluss notieren wir noch den Indexsatz. Die notwendigen Vorarbeiten – Verkleinerung auf Ω_0 , wo $Id - F \neq 0$ auf $\bar{\Omega} \setminus \Omega_0$, Additivität bzgl. des Grundgebietes – werden durch Betrachtung zulässiger Approximationen aus dem endlichdimensionalen Analogon erschlossen. Daraus ergibt sich unmittelbar die Wohldefiniertheit des Index und der Indexsatz:

Definition 9.17. Sei $x_0 \in V$, U eine Umgebung von x_0 , $F : U \rightarrow V$ sei kompakt. Ferner sei $(Id - F)(x_0) = 0$, und mit einem geeigneten $\rho > 0$ gelte $(Id - F)(x) \neq 0$ für alle $x \in B_\rho(x_0) \setminus \{x_0\}$. Dann definieren wir den *Index* der isolierten Nullstelle x_0 von $(Id - F)$ durch

$$\text{ind}(Id - f, x_0) := d(Id - F, \Omega, 0),$$

wobei die offene Menge $\Omega \subset V$ unter der Bedingung $x_0 \in \Omega \subset \bar{\Omega} \subset B_\rho(x_0)$ beliebig gewählt werden kann.

Satz 9.18 (Indexsatz). Sei $\Omega \subset V$ beschränkt und offen, $F : \bar{\Omega} \rightarrow V$ sei kompakt, für $x \in \partial\Omega$ gelte: $(Id - F)(x) \neq 0$. Die Gleichung $(Id - F)(x) = 0$ besitze in Ω genau $p \in \mathbb{N}_0$ paarweise verschiedene Lösungen x_1, \dots, x_p . Dann gilt:

$$d(Id - F, \Omega) = \sum_{j=1}^p \text{ind}(Id - F, x_j).$$

Für Beispiele zur Indexberechnung etwa mit Hilfe des Differentials bei differenzierbaren Abbildungen in Verallgemeinerung von Satz 3.6 sei auf die Übungen verwiesen.

10 Der Produktsatz, Anwendungen auf die Topologie in Banachräumen

Auch in diesem Paragraphen bezeichnet V stets einen reellen Banachraum.

Der Produktsatz lässt sich bequemer für in ganz V erklärte kompakte Abbildungen formulieren. Dass dieses keine Einschränkung bedeutet, wird ein entsprechender Fortsetzungssatz zeigen:

Sei $F : \bar{\Omega} \rightarrow V$ kompakt, dann existiert eine kompakte Abbildung $\hat{F} : V \rightarrow V$ mit $\hat{F}|_{\bar{\Omega}} = F$. Dieser maßgeschneiderte und nicht der möglichst allgemeine und entsprechend aufwändigere Fortsetzungssatz (von Dugundji) soll im Folgenden in mehreren Schritten bewiesen werden.

Grundlegend ist die Beobachtung, dass Banachräume *normal* sind:

Hilfssatz 10.1. Seien $A_1, A_2 \subset V$ abgeschlossen, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ mit $a_1 < a_2$. Dann gibt es eine stetige Funktion $f : V \rightarrow [a_1, a_2]$ mit

$$f(x) = \begin{cases} a_1, & \text{falls } x \in A_1; \\ a_2, & \text{falls } x \in A_2. \end{cases}$$

Beweis. Es bezeichne $d_i(x) := \text{dist}(x, A_i) = \inf\{\|y - x\| : y \in A_i\}$. Diese Abstandsfunktionen $d_i : V \rightarrow [0, \infty)$ sind stetig, und es gilt $d_i(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A_i$ (die A_i sind abgeschlossen). Da A_1, A_2 disjunkt sind, gilt stets $d_1(x) + d_2(x) > 0$. Folglich leistet

$$f : V \rightarrow [a_1, a_2], \quad f(x) := \frac{a_1 d_2(x) + a_2 d_1(x)}{d_1(x) + d_2(x)}$$

das Gewünschte. □

Es folgt der Fortsetzungssatz von Tietze in Banachräumen. Eine wörtliche Übertragung des Beweises scheitert an der i.a. fehlenden Separabilität von V .

Hilfssatz 10.2. Sei $A \subset V$ abgeschlossen, seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Es sei $f : A \rightarrow [a, b]$ stetig. Dann existiert ein stetiges $\hat{f} : V \rightarrow [a, b]$ mit $\hat{f}|_A = f$, d.h. eine stetige Fortsetzung von f nach V .

Beweis. O.B.d.A. sei $a = -1, b = 1$. Konstruiere induktiv stetige Funktionen mit:

$$\begin{cases} f_k : V \rightarrow \mathbb{R}, & |f_k(x)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^k & (x \in V); \\ g_k : A \rightarrow \mathbb{R}, & |g_k(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k & (x \in A); \\ \text{für } x \in A \text{ ist } f(x) = \left(\sum_{j=0}^k f_j(x)\right) + g_k(x). \end{cases} \quad (10.1)$$

$k = 0$: Setze $f_0 = 0$ und $g_0 = f$.

$k \rightarrow k + 1$: Seien $f_0, \dots, f_k, g_0, \dots, g_k$ mit der Eigenschaft (10.1) bereits konstruiert.

Wir bestimmen gemäß Hilfssatz 10.1 zunächst ein stetiges $f_{k+1} : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_{k+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k, & \text{falls } x \in A \text{ und } g_k(x) \geq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k, \\ -\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k, & \text{falls } x \in A \text{ und } g_k(x) \leq -\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k, \end{cases}$$

$$|f_{k+1}(x)| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}, \quad x \in V.$$

Für $x \in A$ setzen wir nun $g_{k+1}(x) := g_k(x) - f_{k+1}(x)$.

Da $|g_k(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k$, gilt:

- falls $g_k(x) \geq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k$: $0 \leq g_{k+1}(x) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$;
- falls $g_k(x) \leq -\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k$: $0 \geq g_{k+1}(x) \geq -\left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k = -\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$;
- für die übrigen $x \in A$:
 $|g_{k+1}(x)| \leq |g_k(x)| + |f_{k+1}(x)| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$.

Also ist insgesamt für $x \in A$: $|g_{k+1}(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$.

Schließlich ist nach Setzung von g_{k+1} für $x \in A$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sum_{j=0}^k f_j(x) \right) + g_k(x) = \left(\sum_{j=0}^k f_j(x) \right) + f_{k+1}(x) + g_{k+1}(x) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{k+1} f_j(x) \right) + g_{k+1}(x). \end{aligned}$$

Man definiert nun für $x \in V$:

$$\hat{f}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x).$$

Auf Grund von $\|f_j\|_{C^0} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^k$, $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^k < \infty$ und des Weierstraßschen Konvergenzsatzes ist $\hat{f} : V \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Wegen $\sup_{x \in A} |g_k(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k$ und (10.1) gilt für $x \in A$:

$$\hat{f}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x) = f(x).$$

Schließlich gilt für alle $x \in V$:

$$|f(x)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x)| = \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)| \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^j = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

□

Der Beweis des angestrebten Fortsetzungssatzes wird so geführt werden, dass wir zunächst endlichdimensional approximieren, dann fortsetzen und mit Hilfe dieser approximativen Fortsetzungen dann insgesamt eine Fortsetzung konstruieren.

Hilfssatz 10.3. Sei $A \subset V$ abgeschlossen, $F : A \rightarrow V$ sei kompakt. Es bezeichne $\mathcal{C} := \text{conv}(F(A))$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Abbildung $G : V \rightarrow \mathcal{C} \subset V$, so dass für alle $x \in A$ gilt:

$$\|F(x) - G(x)\| \leq \varepsilon.$$

Beweis. Wir können ohne Einschränkung $F \neq 0$ annehmen. Nach Hilfssatz 8.6 existieren $n = n(\varepsilon)$ Elemente $y_1, \dots, y_n \in F(A)$ und n stetige Funktionen $f_j : A \rightarrow [0, 1]$ mit $\sum_{j=1}^n f_j(x) = 1$ ($x \in A$) und

$$\left\| \sum_{j=1}^n f_j(x) y_j - F(x) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Diese Komponentenfunktionen werden fortgesetzt: es existieren stetige $\hat{f}_j : V \rightarrow [0, 1]$, so dass $\hat{f}_j|_A = f_j$, $j = 1, \dots, n$.

Für $\delta > 0$ und $x \in V$ setze

$$G_\delta(x) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\hat{f}_j(x) + \delta}{\sum_{i=1}^n (\hat{f}_i(x) + \delta)} \right) y_j, \quad x \in V.$$

Sicher gilt für alle $x \in V$: $G_\delta(x) \in \text{conv}(F(A))$. G_δ ist offensichtlich stetig, $G_\delta(V)$ ist in einem endlichdimensionalen Würfel enthalten, folglich ist G_δ kompakt.

Wählt man schließlich $\delta \leq \frac{1}{4n \max\{\|y_1\|, \dots, \|y_n\|\}} \varepsilon$, so gilt für $x \in A$:

$$\begin{aligned} \|F(x) - G_\delta(x)\| &\leq \left\| \sum_{j=1}^n \left(f_j(x) - \frac{f_j(x) + \delta}{1 + n\delta} \right) y_j \right\| + \left\| F(x) - \sum_{j=1}^n f_j(x) y_j \right\| \\ &\leq \max\{\|y_1\|, \dots, \|y_n\|\} \left(\sum_{j=1}^n \frac{n\delta f_j(x) + \delta}{1 + \underbrace{n\delta}_{\geq 0}} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \max\{\|y_1\|, \dots, \|y_n\|\} \cdot 2n\delta + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit leistet $G := G_\delta$ das Gewünschte. □

Satz 10.4. Sei $\emptyset \neq A \subset V$ abgeschlossen, $F : A \rightarrow V$ sei kompakt. Es bezeichne $\mathcal{C} = \text{conv}(F(A))$. Dann gibt es eine kompakte Abbildung $\hat{F} : V \rightarrow \mathcal{C} \subset V$ mit $\hat{F}|_A = F$.

Beweis. Gemäß Hilfssatz 10.3 gibt es eine Folge kompakter Abbildungen $G_n : V \rightarrow \mathcal{C}$ ($n \in \mathbb{N}$), so dass für alle $x \in A$ gilt:

$$\|G_n(x) - F(x)\| \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Die Idee: Kompaktheit bleibt unter gleichmäßiger Konvergenz erhalten (Davon überzeugt man sich auch in der nichtlinearen Situation durch ein Diagonalverfahren und das Cauchy Kriterium).

Problem: Konvergenz außerhalb von A .

Ausweg: Modifikation der Folge (G_n).

Dazu betrachten wir

$$\varphi_n : [0, \infty) \rightarrow [0, 1], \varphi_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2^n}, \\ 2 - 2^n t, & \text{falls } \frac{1}{2^n} \leq t \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \\ 0, & \text{falls } t \geq \frac{1}{2^{n-1}}, \end{cases}$$

als stückweise lineare Funktion ist φ_n sicher stetig.

Wir setzen $F_1 := G_1$ und rekursiv für $x \in V, n \geq 2$:

$$F_n(x) := F_{n-1}(x) - \varphi_{n-1}(\|G_n(x) - F_{n-1}(x)\|) (G_n(x) - F_{n-1}(x)).$$

Induktiv zeigt man:

- $F_n(x) \in \mathcal{C}$ als Konvexkombination von $G_n(x)$ und $F_{n-1}(x)$,
- $F_n : V \rightarrow \mathcal{C}$ ist kompakt, denn F_{n-1} und G_n sind kompakt, für $\varphi_{n-1}(\dots)$ wird nur die Stetigkeit benötigt;
- für $x \in A$ ist $F_n(x) = G_n(x)$, denn

$$\begin{aligned} \|G_n(x) - G_{n-1}(x)\| &\leq \|G_n(x) - F(x)\| + \|F(x) - G_{n-1}(x)\| \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ hier ist } \varphi_{n-1} = 1. \end{aligned}$$

Schließlich ist für alle $x \in V, n \geq 2$

$$\begin{aligned} \|F_n(x) - F_{n-1}(x)\| &\leq \varphi_{n-1}(\|G_n(x) - F_{n-1}(x)\|) \|G_n(x) - F_{n-1}(x)\| \\ &\leq \sup_{t \geq 0} (t \varphi_{n-1}(t)) \leq \frac{1}{2^{n-2}} \cdot 1 = \frac{1}{2^{n-2}}. \end{aligned}$$

Damit ist $F_n = \sum_{j=2}^n (F_j - F_{j-1}) + F_1$ in V gleichmäßig absolut konvergent gegen ein kompaktes

$\hat{F} : V \rightarrow \mathcal{C}$. Für $x \in A$ ist:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= G_n(x), \\ \Rightarrow \|F_n(x) - F(x)\| &\leq \frac{1}{2^{n+1}}, \\ \Rightarrow \hat{F}(x) &= F(x). \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Satz 10.4 erlaubt einen Alternativbeweis des Schauderschen Fixpunktsatzes: Diesen zunächst mit Hilfe des Abbildungsgrades auf Kugeln zeigen; dann $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ (ohne Einschränkung kann man \mathcal{C} wegen der Kompaktheit von F als beschränkt annehmen) zu einem $\hat{F} : \overline{B_R(0)} \rightarrow \mathcal{C} \subset \overline{B_R(0)}$ fortsetzen.

Satz 10.5 (Produktsatz im Banachraum). Sei $\Omega \subset V$ beschränkt und offen. Seien $F, G : V \rightarrow V$ kompakt. Ferner seien $E \subset V$ abgeschlossen mit $(Id - F)(\partial\Omega) \subset E$ und $z \in V$ mit $(Id - G)(E) \not\ni z$. Dann gilt:

Die Anzahl $n = n(z, G) \in \mathbb{N}_0$ der beschränkten Zusammenhangskomponenten K_i von $V \setminus E$, die Nullstellen y der Gleichung $(Id - G)(y) - z = 0$ enthalten, ist endlich, und es gilt

$$d((Id - G) \circ (Id - F), \Omega, z) = \sum_{i=1}^n d(Id - F, \Omega, K_i) d(Id - G, K_i, z).$$

Bemerkung 10.6. (a) Bei nichtseparablen Banachräumen muss man i.a. mit überabzählbar vielen Komponenten von $V \setminus E$ rechnen. Das bedeutet, dass die gesamte Kompaktheitslast allein die Abbildung zu tragen hat.

(b) Ist $n = 0$, d.h. $(Id - G)(y) \neq z$ auf $V \setminus E$ und folglich auf V , so ist für alle $x \in \overline{\Omega}$:

$$(Id - G) \circ (Id - F)(x) \neq z, \\ \text{d.h. } d((Id - G) \circ (Id - F), \Omega, z) = 0.$$

(c) Die Komposition ist auch wieder von der Gestalt „Identität – kompakt“, denn:

$$(Id - G) \circ (Id - F) = Id \circ (Id - F) - G \circ (Id - F) \\ = Id - \underbrace{(F + G \circ (Id - F))}_{\text{kompakt}}.$$

Beweis von Satz 10.5, Anfang; Nachweis der Endlichkeit von $n(z, G)$.

Angenommen, es gibt eine Folge $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Komponenten von $V \setminus E$ und Punkte $y_i \in K_i$ mit $(Id - G)(y_i) = z$. Nach Auswahl einer Teilfolge kann man annehmen, dass $G(y_i) \rightarrow \zeta$, also $y_i \rightarrow y_0, \zeta = G(y_0), (Id - G)(y_0) = z$. Demnach gibt es eine Komponente $K_{i_0} \ni y_0$, und K_{i_0} enthält fast alle Glieder (y_i) im Widerspruch zu deren Konstruktion.

Beim Beweis von Satz 10.5 werden Einschränkungen auf endlichdimensionale Teilräume eine zentrale Rolle spielen. Zusammenhang bleibt bei solchen Prozeduren i.a. nicht erhalten. Deshalb ist das folgende technische Lemma hilfreich („Vergrößern und Zusammenfassen der K_i “):

Hilfssatz 10.7 („Umformungslemma“). Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 10.5 gelte: Seien $\emptyset \neq H_\ell \subset V - (Id - F)(\partial\Omega)$ ($\ell = 1, \dots, p$) paarweise disjunkte offene Mengen mit den Eigenschaften:

$$\partial H_\ell \subset E; \text{ für } y \notin \bigcup_{\ell=1}^p H_\ell \text{ ist } (Id - G)(y) \neq z; \\ H_\ell \ni y \mapsto d(Id - F, \Omega, y) \text{ ist konstant.}$$

Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^n d(Id - F, \Omega, K_i) d(Id - G, K_i, z) = \sum_{\ell=1}^p d(Id - F, \Omega, y_\ell) d(Id - G, H_\ell, z),$$

wobei $y_\ell \in H_\ell$ beliebig gewählt wird.

Beweis. Jedes K_i ist in genau einem H_ℓ enthalten: Wegen $Id - G \neq z$ außerhalb $\bigcup H_\ell$ findet man zu jedem i ein ℓ mit $K_i \cap H_\ell \neq \emptyset$. Aus $\partial H_\ell \subset E$, d.h. $\partial H_\ell \cap K_i = \emptyset$ und dem Wegzusammenhang folgt $K_i \subset H_\ell$. Nun benutzt man die Konstanz von $y \mapsto d(Id - F, \Omega, y)$ auf H_ℓ , klammert entsprechende Terme aus, verwendet bei $d(Id - G, K_i, z)$ die Additivität in K_i und die Invarianz gegen Hinzufügen z -Stellen-freier Bereiche. \square

Es ergibt sich eine unmittelbare

Folgerung. Ohne Einschränkung kann Satz 10.5 mit $E = (Id - F)(\partial\Omega)$ gezeigt werden.

Wie sich das Einsetzen zulässiger Approximationen F_k für F in $(Id - G)$ auswirkt, klärt der folgende

Hilfssatz 10.8. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 10.5 mit $E = (Id - F)(\partial\Omega)$ erfüllt. Ferner sei $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Abbildungen $F_k : V \rightarrow V$ mit jeweils endlichdimensionalem Wertebereich und*

$$\sup_{x \in V} \|F_k(x) - F(x)\| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass für $k \geq k_0$ gilt:

1. $x \in \partial\Omega \Rightarrow \|(Id - G) \circ (Id - F_k)(x) - z\| \geq \varepsilon$,
2. $d((Id - G) \circ (Id - F), \Omega, z) = d((Id - G) \circ (Id - F_k), \Omega, z)$.

Beweis. Zu (1): Widerspruchsannahme:

Es gibt eine Indexteilfolge $(k_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ und Punkte

$$x_\ell \in \partial\Omega \text{ mit } \lim_{\ell \rightarrow \infty} (Id - G) \circ (Id - F_{k_\ell})(x_\ell) = z. \quad (10.2)$$

Auf Grund der Kompaktheitsannahmen kann man sukzessive nach jeweiliger Auswahl einer Teilfolge schließen: $F_{k_\ell}(x_\ell)$ konvergiert, dabei benutzt man die Kompaktheit von F und die gleichmäßige Konvergenz der F_k ;

$G(x_\ell - F_{k_\ell}(x_\ell))$ konvergiert;

verwende nun (10.2): x_ℓ konvergiert schließlich ebenfalls, etwa $x_\ell \rightarrow \xi \in \partial\Omega$ (abgeschlossen).

Auf Grund der Stetigkeitsannahmen folgt

$$(Id - G) \circ (Id - F)(\xi) = z$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

Zu (2): O.B.d.A. gelte: $G(V)$ ist endlichdimensional, denn wegen (1) und des Satzes von Rouché lässt sich G endlichdimensional so approximieren, dass beide Seiten in (2) mit den ursprünglichen übereinstimmen.

Indem man $\varepsilon > 0$ aus (1) ggfs. verkleinert und k_0 aus (1) ggfs. vergrößert, kann man erreichen, dass für alle $k \geq k_0$ gilt:

$$\inf_{x \in \partial\Omega} \|(Id - G) \circ (Id - F_k)(x) - z\| \geq \varepsilon,$$

$$\sup_{x \in V} \|F_k(x) - F(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Man betrachte einen endlichdimensionalen Teilraum $V' \subset V$ mit $1 \leq \dim V' < \infty$, $\Omega \cap V' \neq \emptyset$, $G(V) \subset V'$, $F_{k_0}(V) \subset V'$.

Auf $\overline{\Omega_{V'}} = \overline{\Omega \cap V'}$ konvergiert $G \circ (Id - F_k)$ gleichmäßig gegen $G \circ (Id - F)$.

Beweis dazu: Widerspruchsannahme:

Es gibt ein $\delta > 0$, eine streng monoton wachsende Indexfolge $k_\ell \in \mathbb{N}$ und eine Folge $x_\ell \in \overline{\Omega \cap V'}$ mit

$$\|G \circ (Id - F_{k_\ell})(x_\ell) - G \circ (Id - F)(x_\ell)\| \geq \delta. \quad (10.3)$$

Da $\overline{\Omega \cap V'}$ kompakt ist, hat man nach Auswahl einer Teilfolge:

$$\begin{aligned} x_\ell &\rightarrow \xi \in \overline{\Omega \cap V'}, \\ F_{k_\ell}(x_\ell) &\rightarrow F(\xi) \text{ (Stetigkeit von } F \text{ und gleichmäßige Konvergenz)} \\ \dots &\Rightarrow \text{ linke Seite in (10.3)} \rightarrow 0 (\ell \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

Widerspruch!

Somit gilt für hinreichend große k :

$$\begin{aligned} d((Id - G) \circ (Id - F_k), \Omega, z) &= d((Id - F_k) - G \circ (Id - F_k), \Omega, z) \\ &= d((Id - F_{k_0}) - G \circ (Id - F_k), \Omega, z) && \text{(Satz von Rouché)} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} d_{V'}((Id - F_{k_0}) - G \circ (Id - F_k), \Omega_{V'}, z) && \text{(„endlichdimensionales Bild“)} \\ &= d_{V'}((Id - F_{k_0}) - G \circ (Id - F), \Omega_{V'}, z) \\ &\hspace{10em} \text{(gleichmäßige Konvergenz des zweiten Terms, s.o.)} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} d((Id - F_{k_0}) - G \circ (Id - F), \Omega, z) \\ &= d((Id - F) - G \circ (Id - F), \Omega, z) && \text{(Satz von Rouché)} \\ &= d((Id - G) \circ (Id - F), \Omega, z). \end{aligned}$$

□

Beweis des Produktsatzes, Fortsetzung.

1. Schritt. Zusätzlich gelte, dass F und G endlichdimensionale Wertebereiche haben. O.B.d.A. sei $E = (Id - G) \circ (Id - F)(\partial\Omega)$ sowie $n > 0$. Für $i = 1, \dots, n$ bestimmen wir $y_i \in K_i$ mit $(Id - G)(y_i) = z$. Man betrachtet nun einen endlichdimensionalen Teilraum $V' \subset V$ mit

$$\begin{aligned} 1 &\leq \dim V' < \infty, \\ \Omega_{V'} &:= \Omega \cap V' \neq \emptyset, \\ F(V) &\subset V', G(V) \subset V', \\ z \in V' \quad , \quad y_i &\in V' \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Dann gilt $(Id - G) \circ (Id - F) = Id - \tilde{F}$ mit einer stetigen Abbildung $\tilde{F} : V \rightarrow V'$, denn:

$$(Id - G) \circ (Id - F)(x) = x - (F(x) + G \circ (Id - F)(x)).$$

Deshalb ist definitionsgemäß

$$d((Id - G) \circ (Id - F), \Omega, z) = d_{V'}((Id - G) \circ (Id - F), \Omega_{V'}, z),$$

und für den rechten Term soll der endlichdimensionale Produktsatz angewandt werden.

Zunächst gilt für

$$E' := (Id - F)(\partial\Omega) \cap V' \supset (Id - F)(\partial_{V'}\Omega_{V'}),$$

denn $\partial_{V'}\Omega_{V'} \subset \partial\Omega \cap V' \Rightarrow (Id - F)(\partial_{V'}\Omega_{V'}) \subset (Id - F)(\partial\Omega) \cap (Id - F)(V') \subset (Id - F)(\partial\Omega) \cap V' = E'$.

Seien K'_1, \dots, K'_q die Komponenten von $V' \setminus E'$, die Punkte y mit $(Id - G)(y) = z$ enthalten. Dann liefert der endlichdimensionale Produktsatz:

$$\begin{aligned} d((Id - G) \circ (Id - F), \Omega, z) &= d_{V'}((Id - G) \circ (Id - F), \Omega_{V'}, z) \\ &= \sum_{j=1}^q d_{V'}((Id - F), \Omega_{V'}, K'_j) \cdot d_{V'}((Id - G), K'_j, z). \end{aligned}$$

Wir wenden nun in V' das Umformungslemma an mit

$$\begin{aligned} H_i &= K_i \cap V' \quad (i = 1, \dots, n), \text{ dabei gilt} \\ H_i &\neq \emptyset, \text{ denn } y_i \in K_i \cap V', \\ \partial H_i &= \partial_{V'}(K_i \cap V') \subset \partial K_i \cap V' \subset (Id - F)(\partial\Omega) \cap V' = E'; \\ \text{für } y \in V' \setminus \bigcup_{i=1}^n H_i &\text{ ist } (Id - G)(y) \neq z, \text{ denn } y \notin \bigcup_{i=1}^n K_i; \\ H_i \ni y &\mapsto d_{V'}(Id - F, \Omega_{V'}, y) = d(Id - F, \Omega, y) \text{ ist konstant.} \end{aligned}$$

Also liefert Hilfssatz 10.8 weiter

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^q d_{V'}((Id - F), \Omega_{V'}, K'_j) d_{V'}((Id - G), K'_j, z) \\ &= \sum_{i=1}^n d_{V'}(Id - F, \Omega_{V'}, y_i) d_{V'}(Id - G, K_i \cap V', z) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n d(Id - F, \Omega, y_i) d(Id - G, K_i, z) \\ &= \sum_{i=1}^n d(Id - F, \Omega, K_i) d(Id - G, K_i, z); \end{aligned}$$

das ist die Behauptung in diesem speziellen Fall.

2. Schritt. Seien nun F, G allgemein wie in Satz 10.5. Auf Grund von Hilfssatz 10.8 lassen sich Folgen $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}, (G_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von stetigen Abbildungen $F_k : V \rightarrow V, G_k : V \rightarrow V$ mit jeweils endlichdimensionalem Wertebereich finden derart, dass gilt:

- $\sup_{x \in V} \|F_k(x) - F(x)\| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$
für $k \geq 1, x \in \partial\Omega$ und geeignetes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\|(Id - G) \circ (Id - F_k)(x) - z\| \geq 2\varepsilon.$$

- $\sup_{x \in V} \|G_k(x) - G(x)\| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$
für $k, \ell \geq 1, x \in \partial\Omega$ gilt:

$$\|(Id - G_\ell) \circ (Id - F_k)(x) - z\| \geq \varepsilon \quad (10.4)$$

- $d((Id - G) \circ (Id - F), \Omega, z) = d((Id - G_k) \circ (Id - F_k), \Omega, z), \quad k \geq 1.$

Wir setzen

$$E^* := \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} (Id - F_k)(\partial\Omega) \cup (Id - F)(\partial\Omega)},$$

E^* ist abgeschlossen und beschränkt. Auf Grund von (10.4) gilt

$$z \notin (Id - G)(E^*), z \notin (Id - G_k)(E^*) \quad (k \geq 1).$$

Seien nun K_1^*, \dots, K_r^* diejenigen Komponenten von $V \setminus E^*$, die Lösungen $y_j \in K_j^*$ von $(Id - G)(y_j) = z$ enthalten.

Da $V \setminus \bigcup_{j=1}^r K_j^*$ abgeschlossen ist, gibt es nach Hilfssatz 9.7 ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in V \setminus \bigcup_{j=1}^r K_j^*$ gilt:

$$\|(Id - G)(x) - z\| \geq \delta > 0.$$

Deshalb existiert ein k_0 , so dass für $k \geq k_0$ und $x \in V \setminus \bigcup_{j=1}^r K_j^*$ gilt:

$$(Id - G_k)(x) \neq z. \quad (10.5)$$

Wir wenden nun das Ergebnis des 1. Schrittes auf (F_k, G_k) für $k \geq k_0$ an. Wegen (10.5) können dabei r und K_1^*, \dots, K_r^* unabhängig von k gewählt werden:

$$\begin{aligned} d((Id - G) \circ (Id - F), \Omega, z) &= d((Id - G_k) \circ (Id - F_k), \Omega, z) \\ &= \sum_{j=1}^r d(Id - F_k, \Omega, K_j^*) d(Id - G_k, K_j^*, z) \\ &= \sum_{j=1}^r d(Id - F, \Omega, K_j^*) d(Id - G, K_j^*, z) \\ &= \sum_{j=1}^n d(Id - F, \Omega, K_j) d(Id - G, K_j, z). \end{aligned} \quad (\text{Umformungslemma})$$

□

Satz 10.9 (Jordan–Brouwer). *Seien $A, A^* \subset V$ zwei beschränkte abgeschlossene Mengen, $F : A \rightarrow V$ sei eine kompakte Abbildung derart, dass $(Id - F) : A \rightarrow A^*$ ein Homöomorphismus ist. Dann ist die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $V \setminus A$ und von $V \setminus A^*$ gleich.*

Beweis. Die Umkehrabbildung $(Id - F)^{-1} : A^* \rightarrow A$ ist auch von der Form $Id - G$ mit einer kompakten Abbildung $G : A^* \rightarrow V$: Dazu setze man $G(x) = x - (Id - F)^{-1}x$, $x \in A^*$ und betrachte $x_k \in A^*$, $y_k \in V$ mit $y_k = G(x_k)$,

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - (Id - F)^{-1}(x_k) \\ \Leftrightarrow (Id - F)^{-1}(x_k) &= x_k - y_k \\ \Leftrightarrow y_k &= -F(x_k - y_k). \end{aligned}$$

Da F kompakt ist, besitzt (y_k) also eine konvergente Teilfolge.

Wir setzen nun $Id - F : A \rightarrow A^*$ bzw. $Id - G : A^* \rightarrow A$ gemäß Satz 10.4 auf den gesamten Banachraum fort. Dann folgt die Behauptung wie im endlichdimensionalen Fall aus dem Produktsatz. \square

Unser letztes Ziel ist der Beweis des Offenheitssatzes. Als Nebenprodukt und unmittelbare Folgerung erhält man daraus die Fredholmsche Alternative für kompakte *lineare* Operatoren.

Zur Stetigkeit der Umkehrabbildung kann man für kompakte Störungen der Identität ähnlich wie in \mathbb{R}^n zeigen:

Hilfssatz 10.10. *Sei $A \subset V$ abgeschlossen, $F : A \rightarrow V$ sei kompakt und derart, dass $(Id - F) : A \rightarrow V$ injektiv ist. Dann gilt: $A' := (Id - F)(A)$ ist abgeschlossen und $(Id - F) : A \rightarrow A'$ ist ein Homöomorphismus.*

Beweis. Die Abgeschlossenheit von A' folgt direkt aus Hilfssatz 9.15.

Zur Stetigkeit von $(Id - F)^{-1}$: Seien $y_k, y \in A'$, $\lim y_k = y$; $x_k, x \in A$ mit $(Id - F)(x_k) = y_k$, $(Id - F)(x) = y$. Es ist zu zeigen: Dann ist $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$.

Annahme, es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass für unendlich viele k gilt: $\|x - x_k\| \geq \varepsilon$. Auf Grund der Kompaktheit von F existiert eine Teilfolge $(x_{k_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ mit: $x_{k_\ell} \not\rightarrow x$, wohingegen $F(x_{k_\ell})$ konvergiert. Folglich hat man wegen der Konvergenz der $(y_k)_k$ auch $x_{k_\ell} \rightarrow \hat{x} \neq x$. Also gilt:

$$y = \lim_{\ell \rightarrow \infty} y_{k_\ell} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} (Id - F)(x_{k_\ell}) = (Id - F)(\hat{x}).$$

Wegen der Injektivität ergibt sich daraus $x = \hat{x}$ und damit ein Widerspruch. \square

Satz 10.11. *Sei $z \in V, U$ eine Umgebung von $z, F : U \rightarrow V$ sei eine kompakte Abbildung derart, dass $Id - F$ injektiv ist. Dann gilt:*

$$\text{ind}((Id - F)(\cdot) - (Id - F)(z), z) = \pm 1.$$

Beweis. O.B.d.A. sei $(Id - F)(z) = 0$. Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $S := \partial B_\varepsilon(z) \subset U$. Dann sind S und $S^* := (Id - F)(S)$ zwei zueinander homöomorphe abgeschlossene beschränkte Mengen (s. Hilfssatz 10.10). Nach Satz 10.9 von Jordan - Brouwer zerlegt S^* den Banachraum V in genau zwei Zusammenhangskomponenten, eine beschränkte Komponente K_1 und eine unbeschränkte Komponente K_2 . Nach dem Produktsatz ist

$$\begin{aligned} 1 = d(Id, B_\varepsilon(z), z) &= d(Id - F, B_\varepsilon(z), K_1) \cdot d((Id - F)^{-1}, K_1, z) \\ \stackrel{\text{Ganzzahligkeit}}{\Rightarrow} \pm 1 &= d(Id - F, B_\varepsilon(z), K_1). \end{aligned}$$

Es bleibt $0 \in K_1$ zu zeigen. Wähle dazu $\eta \in K_1$, finde auf Grund des Nichtverschwindens des Abbildungsgrades dazu $\xi \in B_\varepsilon(z)$ mit $(Id - F)(\xi) = \eta$.

Verbinde ξ und z : $\xi_t = t\xi + (1 - t)z, t \in [0, 1]$.

Für $\eta_t := (Id - F)(\xi_t)$ gilt auf Grund der Injektivität

$$\eta_t \notin S^*, \eta_1 = (Id - F)(\xi) = \eta \in K_1.$$

Also ist auch $K_1 \ni \eta_0 = (Id - F)(z) = 0$. □

Satz 10.12 (Gebietsinvarianz). *Sei $\Omega \subset V$ ein Gebiet, $F : \Omega \rightarrow V$ sei eine kompakte Abbildung derart, dass $(Id - F)$ lokal injektiv ist. Dann ist auch $\Omega^* := (Id - F)(\Omega)$ ein Gebiet.*

Beweis. Der (Weg-) Zusammenhang ist offensichtlich, die Offenheit folgt aus Satz 10.11. □

Satz 10.13 (Fredholmsche Alternative, „injektiv \Rightarrow surjektiv“-Teil).

Sei $F : V \rightarrow V$ ein linearer kompakter Operator, d.h. für jede beschränkte Menge $M \subset V$ ist $F(M)$ präkompakt. Außerdem habe die Gleichung

$$(Id - F)(x) = 0$$

nur die triviale Lösung. Dann besitzt die Gleichung

$$(Id - F)(x) = y$$

für jedes $y \in V$ genau eine Lösung.

Beweis. Nach Satz 10.12 ist $(Id - F)(B_1(0))$ offen, und diese Menge enthält die 0. Es gibt also ein $\varepsilon > 0$, so dass $(Id - F)(B_1(0)) \supset B_\varepsilon(0)$. Die Linearität liefert $(Id - F)(B_R(0)) \supset B_{\varepsilon R}(0)$, und mit $R \rightarrow \infty$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung 10.14. Verlässt man die Klasse „Identität - kompakt“, werden die Sätze von der Gebietsinvarianz und von Jordan–Brouwer und die Fredholmsche Alternative falsch, womit auch eine wesentliche Ausdehnung des Abbildungsgrades über diese Klasse hinaus als unrealistisch erscheint.

Von Ersterem kann man sich mit Hilfe des Schiebe-Operators in ℓ^2 überzeugen.

Teil IV

Anhang

A Wichtige „Hilfs-“ Sätze

Diese Vorlesung ist so aufgebaut, dass sie mit Kenntnissen aus einem Analysis-Grundkurs verstanden werden kann. Im Folgenden werden einige Sätze zusammengestellt, die in diesem Sinne vielleicht nicht oder nicht in dieser Form vorausgesetzt werden können.

A.1 Weierstraßscher Approximationssatz

In der Theorie des Abbildungsgrades haben wir Vieles zunächst für C^1 -Abbildungen definiert und bewiesen. Allerdings ist der Abbildungsgrad ein topologisches Instrument, und in diesem Zusammenhang sind ausschließlich stetige Abbildungen zu betrachten. Dieser Übergang wird mit Hilfe eines Dichtheits- oder Approximationssatzes bewältigt. Für unsere Zwecke beweisen wir den Weierstraßschen Approximationssatz in einer Fassung für stetige und einer für stetig differenzierbare Funktionen. Dazu halten wir zunächst fest:

Hilfssatz A.1. Der „Glättungskern“

$$\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(x) := \begin{cases} c_n \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & , \quad |x| < 1, \\ 0 & , \quad |x| \geq 1, \end{cases}$$

ist beliebig oft stetig differenzierbar. Dabei ist c_n so gewählt, das $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = 1$.

Beweis. Betrachte zunächst

$$\tilde{\psi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{\psi}(y) = \begin{cases} c_n \exp\left(-\frac{1}{y}\right) & , \quad y > 0, \\ 0 & , \quad y \leq 0. \end{cases}$$

Man zeigt, dass für $k \in \mathbb{N}_0$ ein Polynom P_{2k} vom Grade $\leq 2k$ existiert, so dass für $y > 0$ gilt:

$$\tilde{\psi}^{(k)}(y) = P_{2k}\left(\frac{1}{y}\right) \exp\left(-\frac{1}{y}\right).$$

Das schnelle Abfallen der Exponentialfunktion zeigt die stetige Fortsetzbarkeit und damit (induktiv in k) auch die stetige Differenzierbarkeit von $\tilde{\psi}$ in ganz \mathbb{R} . Nun ist aber $\psi(x) = \tilde{\psi}(1 - |x|^2)$. \square

Man bezeichnet übrigens die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger mit $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Also:

$$\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Die Idee, wie stetige Funktionen durch beliebig glatte approximiert werden können, besteht nun im „Weichzeichnen“; statt $f(0)$ betrachtet man einen „glatten“ Mittelwert von f in einer

Umgebung von 0.

$$f(0) \text{ wird approximiert durch } \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) f(y) dy$$

oder fokussiert auf eine Kugel mit Radius $h > 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &\approx \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi\left(\frac{y}{h}\right) f(y) dy \\ f(x) &\approx \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi\left(\frac{y}{h}\right) f(y+x) dy \\ &= \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\psi\left(\frac{1}{h}(z-x)\right)}_{\text{gerade}} f(z) dz \\ &= \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi\left(\frac{1}{h}(x-y)\right) f(y) dy. \end{aligned}$$

Definition A.2. Für die stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir für $h > 0$ mit

$$(f)_h(x) := \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi\left(\frac{1}{h}(x-y)\right) f(y) dy$$

die *Faltung* von f mit dem *Glättungskern* ψ und *Glättungsradius* h .

Wegen der Theorie parameterabhängige Integrale ist $(f)_h$ beliebig oft differenzierbar.

Satz A.3 (Weierstraßscher Approximationssatz I). *Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann konvergiert $(f)_h$ für $h \searrow 0$ auf jedem Kompaktum gleichmäßig gegen f .*

Beweis. Sei $R > 0$ beliebig. Für $|x| \leq R$ und $h \leq 1$ kann man das Integrationsgebiet auf $|y| \leq R+1$ beschränken. Dort ist f gleichmäßig stetig.

Wegen $\frac{1}{h^n} \int \psi\left(\frac{1}{h}(x-y)\right) = 1$ hat man nun für $|x| \leq R$:

$$\begin{aligned} f(x) - (f)_h(x) &= \frac{1}{h^n} \int_{|y| \leq R+1} \psi\left(\frac{1}{h}(x-y)\right) (f(x) - f(y)) dy \\ &= \frac{1}{h^n} \int_{\substack{|y| \leq R+1 \\ |x-y| \leq h}} \underbrace{\psi\left(\frac{1}{h}(x-y)\right)}_{\neq 0 \text{ nur für } \frac{1}{h}|y-x| \leq 1} (f(x) - f(y)) dy. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, wähle zunächst $h_0 > 0$ so, dass

$$|x-y| \leq h_0, |x|, |y| \leq R+1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Zusammen mit der Normierungsbedingung ergibt das für alle $h \leq h_0$:

$$\forall |x| \leq R : \quad |f(x) - (f)_h(x)| \leq \varepsilon.$$

□

Wir wollen nun zeigen, dass bei k -mal stetig differenzierbaren Funktionen $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ auch die k -ten Ableitungen von $(f)_h$ lokal gleichmäßig gegen die von f konvergieren.

Dazu dient:

Hilfssatz A.4. Sei $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, dann gilt für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$ und alle $h > 0$:

$$(D^\alpha f)_h(x) = (D^\alpha(f)_h)(x).$$

Beweis. Zunächst ist partiell zu integrieren; man beachte dabei, dass der Glättungskern $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ im Unendlichen Nullrandwerte besitzt. Die Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation wird durch die Theorie parameterabhängiger Integrale und wiederum die Eigenschaft $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gewährleistet. Dabei kann man annehmen, dass x in beliebig großen, aber beschränkten Mengen variiert.

$$\begin{aligned} (D^\alpha f)_h(x) &= \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi\left(\frac{1}{h}(x-y)\right) (D_y^\alpha f)(y) dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^n} D_y^\alpha \left(\psi\left(\frac{1}{h}(x-y)\right) \right) f(y) dy \\ &= \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\alpha \psi\left(\frac{1}{h}(x-y)\right) f(y) dy = D_x^\alpha \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi\left(\frac{1}{h}(x-y)\right) f(y) dy \\ &= (D^\alpha(f)_h)(x). \end{aligned}$$

□

Damit haben wir gezeigt: Unterwirft man $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ dem Glättungsprozedere, so sind die α -ten Ableitungen der Approximation die mit demselben Verfahren entstehenden Approximationen der α -ten Ableitung, und es gilt:

Satz A.5 (Weierstraßscher Approximationssatz II). Sei $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$. Dann konvergiert $(f)_h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ für $h \searrow 0$ auf jedem Kompaktum in der C^k -Norm gleichmäßig gegen f .

Man überlege sich, dass man nun mit diesen Techniken zu beliebigem beschränkten Gebiet Ω und dem um den Abstand 1 verkleinerten Komplement $\Omega_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, \Omega) > 1\}$ ein $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ findet mit

$$0 \leq \varphi \leq 1 \quad , \quad \varphi = \begin{cases} 1, & \text{in } \Omega, \\ 0, & \text{in } \Omega_1. \end{cases}$$

A.2 Fortsetzungssatz von Tietze

Wir haben wiederholt benutzt, dass jedes $f|_{\partial\Omega}$ auch als $f|_{\bar{\Omega}}$ oder sogar $f|_{\mathbb{R}^n}$ aufgefasst werden kann. Dieses zeigt der

Satz A.6 (Fortsetzungssatz von Tietze). Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $g : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei stetig. Dann existiert eine auf \mathbb{R}^n erklärte stetige Fortsetzung h von g , d. h. $h|_A = g$.

Beweis. Wir betrachten g und h komponentenweise, d.h. o.B.d.A. sei $m = 1$. Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset A$ dicht. Die Existenz einer solchen Folge ist allgemein in Teilräumen separabler metrischer

Räume gewährleistet. Der Beweis dieser Tatsache sei dem Leser zur Übung überlassen. Mit Hilfe dieser Folge kann man nun definieren:

$$h(x) := \begin{cases} g(x) & , \quad \text{falls } x \in A, \\ \frac{\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \rho(x, a_k) g(a_k)}{\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \rho(x, a_k)} & , \quad \text{falls } x \notin A, \end{cases}$$

wobei für $x \notin A$: $\rho(x, a) := \max\left(2 - \frac{|x-a|}{\text{dist}(x, A)}, 0\right)$. Bei festem $x \notin A$ werden also nur die a_k mit

$$|x - a_k| \leq 2 \text{dist}(x, A),$$

insbesondere solche aus einem kompakten Bereich, berücksichtigt. Bei festem $x \notin A$ sind folglich in den von 0 verschiedenen Reihengliedern alle g -Werte gleichmäßig beschränkt, so dass h wohldefiniert ist.

Entsprechend gilt: In $\mathbb{R}^n \setminus A$ sind die Reihen absolut lokal gleichmäßig konvergent, die $\rho(\cdot, a_k)$ sind stetig, der Nenner ist ungleich 0, d.h. h ist in $A^0 \cup (\mathbb{R}^n \setminus A)$ stetig. Es bleibt zu zeigen: h ist auch auf ∂A stetig.

Es bezeichne für $x \notin A$:

$$\lambda_k(x) = \frac{2^{-k} \rho(x, a_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \rho(x, a_i)},$$

dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(x) = 1$ und

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & , \quad x \in A, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(x) g(a_k) & , \quad x \notin A. \end{cases}$$

Sei nun $x \in \partial A, \varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ so, dass für alle $z' \in A$ mit $|z' - x| \leq 3\delta$ gilt: $|g(x) - g(z')| \leq \varepsilon$. Für alle $x' \in \mathbb{R}^n \setminus A$ mit $|x - x'| \leq \delta$ gilt nun:

$$\begin{aligned} |h(x) - h(x')| &= \left| g(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(x') g(a_k) \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(x') (g(x) - g(a_k)) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(x') \sup_{\{\tilde{k}: |x' - a_{\tilde{k}}| < 2 \text{dist}(x', A)\}} |g(x) - g(a_{\tilde{k}})| \\ &\leq \sup_{\{\tilde{k}: |x' - a_{\tilde{k}}| \leq 2\delta\}} |g(x) - g(a_{\tilde{k}})| \leq \sup_{\{\tilde{k}: |x - a_{\tilde{k}}| \leq 3\delta\}} |g(x) - g(a_{\tilde{k}})| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Für $x' \in A$ mit $|x - x'| \leq \delta$ gilt ohnehin $|h(x) - h(x')| = |g(x) - g(x')| \leq \varepsilon$. □

Indem man diesen Fortsetzungssatz, die davor diskutierte Abschneidefunktion φ und den Weierstraßschen Approximationssatz kombiniert, erhält man u.a.:

Ist $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig, $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so existiert eine Folge $f_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, die auf A gleichmäßig gegen f konvergiert.

A.3 Das Lemma von Sard

Wir beginnen mit einer technischen Abschätzung des Bildmaßes von Würfeln, die singuläre Punkte der Abbildung f enthalten.

Hilfssatz A.7. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ in der Umgebung des Würfels $W = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq a_i + h, i = 1, \dots, n\}$ stetig differenzierbar. Mit geeigneten Zahlen M, ε gelte auf W

$$|f_{x_i}| \leq M, \quad |f_{x_i}(x) - f_{x_i}(x')| \leq \varepsilon.$$

Schließlich existiere ein $\xi \in W$ mit $J_f(\xi) = 0$. Dann gilt für den äußeren Jordan-Inhalt (bzw. das Lebesgue-Maß) der Bildmenge die Abschätzung

$$|f(W)| \leq C(M, n) \cdot h^n \cdot \varepsilon.$$

Beweis. Man beachte, dass $W^* := f(W)$ kompakt und folglich Lebesgue-messbar ist. Sei $x \in W$ beliebig. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt mit geeigneten Zwischenstellen ξ_i^* auf der Verbindungsgeraden von ξ und x :

$$f_i(x) - f_i(\xi) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi_i^*) \cdot (x_j - \xi_j),$$

also

$$f(x) - f(\xi) = Df(\xi) \cdot (x - \xi) + B(x)$$

mit $B_i(x) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\xi_i^*) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi) \right) (x_j - \xi_j)$.

Die Voraussetzung über die Kleinheit der Schwankung der Ableitungen von f zeigt für diesen Fehlerterm:

$$|B(x)| \leq C_1(n) \cdot \varepsilon \cdot h. \quad (\text{A.1})$$

Außerdem gilt

$$|f(x) - f(\xi)| \leq C_2(M, n) \cdot h. \quad (\text{A.2})$$

Da nach Voraussetzung $Df(\xi)$ singular ist, existiert ein $z_1 \in \mathbb{R}^n$ mit $|z_1| = 1$ und $Df(\xi)^t \cdot z_1 = 0$. Wir ergänzen diesen Vektor zu einer Orthonormalbasis $\{z_1, \dots, z_n\}$. Für alle $x \in W$ gilt dann:

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot (f(x) - f(\xi))| &= |z_1 \cdot (Df(\xi) \cdot (x - \xi)) + z_1 \cdot B(x)| \\ &\leq |(Df(\xi)^t \cdot z_1) \cdot (x - \xi)| + |B(x)| \\ &\leq |B(x)| \leq C_1(n) \cdot \varepsilon \cdot h; \\ |z_j \cdot (f(x) - f(\xi))| &\leq C_2(M, n) \cdot h \quad (j = 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Es folgt:

$$f(W) \subset \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} |z_1 \cdot (y - f(\xi))| \leq C_1(n) \cdot \varepsilon \cdot h, \\ \text{für } j = 2, \dots, n : |z_j \cdot (y - f(\xi))| \leq C_2(M, n) \cdot h \end{array} \right\} =: W^{**}.$$

Wir verwenden nun die Bewegungsinvarianz des Jordan-Inhalts (bzw. des Lebesgue-Maßes):

$$\begin{aligned} |W^{**}| &= |\{y \in \mathbb{R}^n : |z_1 \cdot y| \leq C_1(n) \cdot \varepsilon \cdot h, |z_j \cdot y| \leq C_2(M, n) \cdot h \ (j = 2, \dots, n)\}| \\ &= |\{y \in \mathbb{R}^n : |y_1| \leq C_1(n) \cdot \varepsilon \cdot h, |y_j| \leq C_2(M, n) \cdot h \ (j = 2, \dots, n)\}| \\ &= 2^n \cdot C_1(n) \cdot \varepsilon \cdot h \cdot (C_2(M, n)h)^{n-1} = C(M, n) \cdot h^n \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Satz A.8 (Lemma von Sard). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Ferner sei $F \subset \Omega$ kompakt und $F^* := \{y : y = f(x) \text{ für ein } x \in F \text{ mit } J_f(x) = 0\}$. Dann ist F^* eine (Jordan-) Nullmenge.*

Beweis. Wegen der Heine–Borelschen Überdeckungseigenschaft existieren endlich viele kompakte achsenparallele Würfel $\hat{W}_j \subset \Omega, F \subset \bigcup \hat{W}_j$. Wir betrachten einen solchen Würfel $W = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq a_i + h\} \subset \Omega$ und zeigen:

$$W^* = \{y \in \mathbb{R}^n : \text{es gibt ein } x \in W \text{ mit } y = f(x), J_f(x) = 0\}$$

ist eine (Jordan-) Nullmenge.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da Df auf W gleichmäßig stetig ist, ist $|f_{x_i}|_W| \leq M$, und es existiert ein $\delta > 0$, so dass aus $x, x' \in W, |x - x'| \leq \delta$ folgt:

$$|f_{x_i}(x) - f_{x_i}(x')| \leq \frac{\varepsilon}{\underbrace{C(M, n)}_{\text{dieselbe Konstante wie in Hilfssatz A.7}} \cdot h^n}.$$

dieselbe Konstante wie in Hilfssatz A.7

Sei N so groß gewählt, dass $\frac{h}{N} \leq \frac{\delta}{\sqrt{n}}$, und W werde in N^n kompakte Würfel W_j ($j = 1, \dots, N^n$) mit Kantenlänge $\frac{h}{N}$ „zerlegt“, so dass deren Inneres paarweise disjunkt ist. Sei

$$I = \{j : \exists x \in W_j, \text{ so dass } J_f(x) = 0\}.$$

Damit erhalten wir

$$W^* \subset \bigcup_{j \in I} f(W_j) \tag{A.3}$$

und weiter nach Hilfssatz A.7:

$$\begin{aligned} |f(W_j)| &\leq C(M, n) \cdot \left(\frac{h}{N}\right)^n \cdot \frac{\varepsilon}{C(M, n) \cdot h^n} = \frac{\varepsilon}{N^n}, \\ \sum_{j \in I} |f(W_j)| &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Mit (A.3) folgt die Behauptung. □

A.4 Der Satz von Arzela–Ascoli

Dieser Satz ist ein wesentliches Hilfsmittel, um Teilmengen von Funktionenräumen als (relativ) kompakt zu erkennen und damit fundamental für die Anwendung der funktionalanalytischen Resultate in konkreten Beispielen.

Satz A.9 (Arzela–Ascoli). Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $M = \{f_k : K \rightarrow \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}\} \subset C^0(K, \mathbb{R})$ eine Menge von Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

1. Gleichmäßige Beschränktheit:

$$\exists C : \quad \forall k : \quad \|f_k\|_{C^0(K)} \leq C.$$

2. Gleichgradig gleichmäßige Stetigkeit:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle k und alle $x, x' \in K$ mit $|x - x'| \leq \delta$ gilt:

$$|f_k(x) - f_k(x')| \leq \varepsilon.$$

Dann ist M in $C^0(K, \mathbb{R})$ präkompakt, d.h. $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ besitzt eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Beweis. Der Beweis wird zeigen, dass die Kompaktheit des Urbildbereichs K und die Lokal-kompaktheit des Wertebereichs \mathbb{R} (\rightarrow Bolzano–Weierstraß) eine absolut wesentliche Rolle spielen.

Zunächst wird eine geeignete dichte Teilmenge $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von K konstruiert, so dass man bei vorgegebenem Maximalradius $\delta > 0$ mit endlich vielen δ -Kugeln um x_j bereits K überdeckt: Zu $\delta_i = \frac{1}{i}, i \in \mathbb{N}$, findet man wegen der Kompaktheit von K sukzessive Punkte $x_{j_{i-1}+1}, \dots, x_{j_i} \in$

K mit $\bigcup_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} B_{\delta_i}(x_j) \supset K$.

Insbesondere findet man zu jedem $\delta > 0$ ein $j_\delta \in \mathbb{N}$, so dass

$$\bigcup_{j=1}^{j_\delta} B_\delta(x_j) \supset K. \tag{A.4}$$

Wir konstruieren nun mit Hilfe des Cantorschen Diagonalverfahrens eine Teilfolge $(f_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$, die in allen Punkten $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

Wegen der gleichmäßigen Beschränktheit von $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und des Satzes von Bolzano-Weierstraß findet man:

- eine Teilfolge $(f_{k_{1,i}})_{i \in \mathbb{N}}$, die in x_1 konvergiert,
- davon wiederum eine Teilfolge $(f_{k_{2,i}})_{i \in \mathbb{N}}$, die in x_2 konvergiert,
- \vdots
- davon wiederum eine Teilfolge $(f_{k_{j,i}})_{i \in \mathbb{N}}$, die in x_j konvergiert,
- \vdots

Setze $k_i = k_{i,i}$, nach Konstruktion ist dann f_{k_i} in jedem Punkt $x_j, j \in \mathbb{N}$ der dichten Teilmenge konvergent.

Mit Hilfe der gleichmäßig gleichgradigen Stetigkeit soll nun gezeigt werden, dass $(f_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ tatsächlich auf ganz K eine gleichmäßige Cauchy-Folge ist. Die Behauptung folgt dann mit der Vollständigkeit von $V = C^0(K)$.

Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben, bestimme hierzu $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so dass für alle $x, x' \in K$ mit $|x - x'| \leq \delta$ und für alle k gilt:

$$|f_k(x) - f_k(x')| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (\text{A.5})$$

Zu diesem δ wähle $j_\delta \in \mathbb{N}$, so dass (A.4) gilt. Schließlich findet man $i_0 = i_0(\varepsilon, j_\delta) \in \mathbb{N}$, so dass für $i, \ell \geq i_0$ und $j = 1, \dots, j_\delta$ gilt:

$$|f_{k_i}(x_j) - f_{k_\ell}(x_j)| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (\text{A.6})$$

Sei nun $x \in K$ beliebig. Auf Grund von (A.4) findet man $x_j, j \in \{1, \dots, j_\delta\}$ mit $x \in B_\delta(x_j)$. Für $i, \ell \geq i_0$ gilt nun:

$$|f_{k_i}(x) - f_{k_\ell}(x)| \leq \underbrace{|f_{k_i}(x) - f_{k_i}(x_j)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ nach (A.5)}} + \underbrace{|f_{k_i}(x_j) - f_{k_\ell}(x_j)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ nach (A.6)}} + \underbrace{|f_{k_\ell}(x_j) - f_{k_\ell}(x)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ nach (A.5)}} \leq \varepsilon,$$

d.h., für $i, \ell \geq i_0$:

$$\|f_{k_i} - f_{k_\ell}\|_{C^0(K)} \leq \varepsilon.$$

□

Literatur

- [AH] Paul Alexandroff, Heinz Hopf, *Topologie*, Berlin: Springer-Verlag, 1935.
- [A] Herbert Amann, *Ordinary differential equations. An introduction to nonlinear analysis*, Berlin etc.: de Gruyter, 1990.
- [BB] Melvyn S. Berger, Marion S. Berger, *Perspectives in nonlinearity. An introduction to nonlinear analysis*, Mathematics Lecture Note Series, New York, Amsterdam: W.A. Benjamin, 1968.
- [Br] Luitzen Egbertus Jan Brouwer, Beweis der Invarianz der Dimensionszahl, *Math. Ann.* **70**, 305–313 (1911).
- [CH] Shui-Nee Chow, Jack K. Hale, *Methods of bifurcation theory*, New York etc.: Springer-Verlag, 1982.
- [Deb] Gerard Debreu, Market equilibrium, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **42**, 876–878 (1956).
- [Dei] Klaus Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Berlin etc.: Springer-Verlag, 1985.
- [Ga] David Gale, The law of supply and demand, *Math. Scand.* **3**, 155–169 (1955).
- [GT] David Gilbarg, Neil S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, second edition, Berlin etc.: Springer-Verlag, 1983.
- [He] Erhard Heinz, An elementary analytic theory of the degree of mapping in n -dimensional space, *J. Math. Mech.* **8**, 231–247 (1959).
- [LSU] Olga A. Ladyzhenskaya, Vsevolod Solonnikov, Nina N. Uraltseva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Providence: American Mathematical Society (AMS), 1968.
- [LU] Olga A. Ladyzhenskaya, Nina N. Uraltseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, New York etc.: Academic Press, 1968.
- [LS] Jean Leray, Jules Schauder, Topologie et equations fonctionnelles, *Ann. Ecole Norm.*, III. Sér. **51**, 45–78 (1934).
- [Ma] Karl Heinz Mayer, *Algebraische Topologie*, Basel etc.: Birkhäuser-Verlag, 1989.
- [Ni] Hukukane Nikaido, Note on the general economic equilibrium for nonlinear production functions, *Econometrica* **22**, 49–53 (1954).
- [Sch] Juliusz Schauder, Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, *Studia Math.* **2**, 171–180 (1930).
- [Wa] Wolfgang Walter, *Analysis 2*, 4. Auflage, Berlin etc.: Springer-Verlag, 1995.
- [Zei1] Eberhard Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications, I: Fixed-point theorems*, New York etc.: Springer-Verlag, 1986.
- [Zei4] Eberhard Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications, IV: Applications to mathematical physics*, New York etc.: Springer-Verlag, 1988.

Index

- Abbildung
 - kompakte, 48
 - offene, 28
 - Ordnung, 21
 - ungerade, 26, 28
 - vollstetige, 48
- Abbildungsgrad, 6
 - Additivität, 23
 - Banachraum, Leray–Schauder, 52, 58
 - Ganzzahligkeit, 25, 26
 - Homotopieinvarianz, 10, 20, 59
 - in \mathbb{C} , 8, 10, 12
 - in \mathbb{R}^n , 18, 20, 30
 - allgemeine Definition, 32
 - Produktsatz, 35, 65
- abgeschlossen, Korrespondenz, 42
- algebraische Topologie, 5
- Analysis
 - lineare, 5
 - nichtlineare, 5
- Approximation, zulässige, 57
- Approximationssatz von Weierstraß, 73, 74
- Arzela–Ascoli, 47, 78
- Borsuk, 26
- Brouwer, 22, 37, 69
- Brouwerscher Fixpunktsatz
 - in \mathbb{C} , 11
 - konvexe Mengen, 40
 - Kugeln, 21
 - Simplex, 39
- Differentialform, Linienintegral, 7
- Differentialgleichungen
 - gewöhnliche, 4
 - Existenzsatz von Peano, 50
 - periodische Lösungen, 41
 - partielle, 4
- Divergenzstruktur, Jacobi–Determinante, 16
- Fixpunkt, 4
- Fixpunktsatz
 - Brouwer
 - in \mathbb{C} , 11
 - konvexe Mengen, 40
 - Kugeln, 21
 - Simplex, 39
 - Kakutani, 42
 - Schauder, 50
- Fortsetzungssatz
 - Banachraum, 63
 - Tietze, 74
- Fredholmsche Alternative, 71
- Frobenius, 40
- Fundamentalsatz der Algebra, 11
- Ganzzahligkeit des Abbildungsgrades, 25, 26
- Gebietsinvarianz
 - Banachraum, 71
 - in \mathbb{R}^n , 28
- gewöhnliche Differentialgleichungen, 4
 - Existenzsatz von Peano, 50
 - periodische Lösungen, 41
- Glättungskern, 72
- Gleichgewicht, 5, 42, 44, 47
- gleichgradige gleichmäßige Stetigkeit, 48, 78
- Greenscher Operator, 4
- Homotopieinvarianz
 - Banachraum, 59
 - in \mathbb{C} , 10
 - in \mathbb{R}^n , 20
- Igelsatz, 22
- Index einer Nullstelle, 13, 23, 60
- Indexsatz
 - Banachraum, 60
 - in \mathbb{C} , 13
 - in \mathbb{R}^n , 23
- Invarianz
 - der Dimension, 28
 - des Gebietes, 28, 71
- Jacobi–Determinante, 15, 24–26, 76, 77
 - Divergenzstruktur, 16
- Jordan, 37, 69
 - Kurvensatz, 36
- Kakutani, Fixpunktsatz, 42
- kompakt
 - Abbildung, 48

Homotopie, 59
 Komponente, 29
 Korrespondenz, 42
 abgeschlossene, 42
 Kurvensatz, Jordanscher, 36

 Lemma von Sard, 25, 77
 Leray, 35
 Leray–Schauder–Abbildungsgrad, 52, 58
 lineare Analysis, 5
 Linienintegral einer Differentialform, 7
 Lösungsoperator, 4

 Matrix mit positiven Koeffizienten, 40

 nichtlineare Analysis, 5
 Nichtretraktionssatz, 41
 Nullstelle, 4
 Index, 23, 60
 Nullstellensatz
 Banachraum, 59
 in \mathbb{C} , 11
 in \mathbb{R}^n , 21

 Ordnung einer Abbildung, 21

 partielle Differentialgleichungen, 4
 Peano, 50
 Poincaré, 22
 präkompakt, 47
 Produktsatz
 Banachraum, 65
 von Leray, in \mathbb{R}^n , 35
 Punkt, singulärer, 25

 Rouché, 11, 21

 Sardesches Lemma, 25, 77
 Satz
 Arzela–Ascoli, 47, 78
 Borsuk, 26
 Brouwerscher Fixpunktsatz
 in \mathbb{C} , 11
 konvexe Mengen, 40
 Kugeln, 21
 Simplex, 39
 Fixpunktsatz von Kakutani, 42
 Fortsetzungssatz
 Banachraum, 63
 Tietze, 74
 Fredholmsche Alternative, 71
 Frobenius, 40
 Fundamentalsatz der Algebra, 11
 Gale–Nikaido–Debreu, 45
 Gebietsinvarianz
 Banachraum, 71
 in \mathbb{R}^n , 28
 Homotopieinvarianz
 Banachraum, 59
 in \mathbb{C} , 10
 in \mathbb{R}^n , 20
 Igelsatz, 22
 Indexsatz
 Banachraum, 60
 in \mathbb{C} , 13
 in \mathbb{R}^n , 23
 Invarianz der Dimension, 28
 Jordan–Brouwer
 Banachraum, 69
 in \mathbb{R}^n , 37
 Jordanscher Kurvensatz, 36
 Lemma von Sard, 25, 77
 Nichtretraktionssatz, 41
 Nullstellensatz
 Banachraum, 59
 in \mathbb{C} , 11
 in \mathbb{R}^n , 21
 offene Abbildung, 28
 Peano, 50
 Poincaré–Brouwer, 22
 Produktsatz
 Banachraum, 65
 von Leray, in \mathbb{R}^n , 35
 Rouché
 in \mathbb{C} , 11
 in \mathbb{R}^n , 21
 Schauderscher Fixpunktsatz, 50
 7ε -Lemma, 19
 Transformationsformel
 klassische, 33
 verallgemeinerte, 30
 Weierstraßscher Approximationssatz, 73, 74
 Schauderscher Fixpunktsatz, 50
 singulärer Punkt/Wert, 25

 Tietze, 74

Topologie, 28
 algebraische, 5
Transformationsformel
 klassische, 33
 verallgemeinerte, 30

Umformungslemma, 65
ungerade, 26, 28

vollstetig, 48

Weierstraßscher Approximationssatz, 73, 74
Wert, singulärer, 25
Windungszahl, 6
Wirtschaftssystem, 43
 Aktion
 erwünschte, 44
 Wert, 44
 Gesamtaktion, 44
 allseits erwünschte, 44
 zulässige, 44
 Gleichgewicht, 44, 47
 global solides, 46
 Preissystem, 44
Wirtschaftstheorie, 5, 42

zulässige Approximation, 57
Zusammenhangskomponente, 29
Zwischenwertsatz, 6