Übungsaufgaben zur Vorlesung "Fixpunktsätze"

1. (a) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Man zeige: Es gibt eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A$, die dicht in A liegt.

   (b) Man nennt einen metrischen Raum X separabel, falls er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Zeigen Sie in Verallgemeinerung von (a): Jeder Teilraum Y eines separablen metrischen Raumes X ist wieder separabel.

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Konstruieren Sie eine stetige bzw. eine beliebig oft differenzierbare Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so daß für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $0 \le \varphi(x) \le 1$ sowie

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \Omega; \\ 0, & \text{falls } \operatorname{dist}(x, \Omega) \ge 1. \end{cases}$$

3. Sei $n \ge 2$. Man zeige: $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1(0)}$ ist zusammenhängend.

4. Sei $n \ge 2$, es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijektiv und stetig. Außerdem gelte $\lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = \infty$. Man zeige: $f(S^{n-1})$ zerlegt $\mathbb{R}^n$ in genau zwei disjunkte Gebiete, deren gemeinsamer Rand $f(S^{n-1})$ ist.

5. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, dessen glatter Rand $\partial\Omega$ durch die glatte reguläre einfach geschlossene Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)$ gegeben werde. Dabei sei der Durchlaufsinn von γ so gewählt, daß durch

$$\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}\,(y'(t), -x'(t))$$

   ein *äußeres* Einheitsnormalenfeld an $\partial\Omega$ in $z = \gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$ gegeben werde. Weiter seien f, g in einer Umgebung von $\overline{\Omega}$ definiert und stetig differenzierbar. Man definiert allgemein das Kurvenintegral

$$\int_\gamma (f\,dx + g\,dy) := \int_a^b \left(f(\gamma(t)) \cdot x'(t) + g(\gamma(t)) \cdot y'(t)\right)\,dt.$$

   Der Satz von Stokes lautet dann:

$$\int_\gamma (f\,dx + g\,dy) = \int_\Omega \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\right)\,d(x, y).$$

   (a) Leiten Sie den Satz von Stokes für den Spezialfall $\Omega = B_R(0)$ direkt aus dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung her.

   (b) Leiten Sie den allgemeinen Satz von Stokes aus dem Satz von Gauß her.

6. (a) Man bestimme den Abbildungsgrad $d(z \mapsto \bar{z}, B_R(0), 0)$.

   (b) Beweisen Sie den Fundamentalsatz der Algebra, indem Sie auf geeignetem $B_R(0)$ den Abbildungsgrad von $z \mapsto z^k$ bestimmen.

7. Gegeben sei ein Polynom n–ten Grades
$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0, \quad a_j \in \mathbb{C}.$$
Ist es möglich, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gilt:
$$|P(z)| < 1?$$

8. (a) Die Abbildung $u : \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar und habe in 0 ein strenges lokales Maximum bzw. Minimum bzw. Sattel, d. h. $\nabla u(0) = 0$ und Hess $u(0)$ negativ definit bzw. positiv definit bzw. indefinit.
Betrachte das Gradientenfeld $f(z) = u_x(z) + iu_y(z)$.
Man zeige: ind $(f, 0) = 1$ bzw. 1 bzw. -1.

   (b) Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, für ein geeignetes R gelte: für $|z| \geq R$ ist $u(x, y) = ax + by, \quad$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$.
Ferner habe u einen nichtdegenerierten kritischen Punkt wie in a). Man zeige: Dann hat u mindestens einen weiteren kritischen Punkt.

9. Anhand von einfachen Beispielen „prüfe“ man die Notwendigkeit der Bedingungen $\omega(r) = 0$ für $r \leq \delta$ und für $r \geq \varepsilon$.

10. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen.

    (a) Sei $x_0 \in \mathbb{R}, x_0 \notin \partial\Omega$. Man bestimme den Abbildungsgrad von $f = \sigma(Id - x_0), \quad \sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

    (b) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ bijektiv, $f^{-1} \in C^1$, $f \neq 0$ auf $\partial\Omega$.
Man bestimme $d(f, \Omega, 0)$ mit Hilfe der Transformationsformel.

11. Für hinreichend glattes $f, f|\partial\Omega \neq 0$, und glattes Ω definiere man $d(f, \Omega, 0)$ mit Hilfe eines Oberflächenintegrals und vergleiche mit der ursprünglichen Definition des Abbildungsgrades für Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

12. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, $0 \in \Omega, f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ sei stetig. Für alle $x \in \partial\Omega$ gelte:
$$f(x) \cdot x > 0.$$
Dann besitzt f in Ω eine Nullstelle.

13. Sei $f : [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \to \mathbb{R}^n$ stetig.
Es gelte für $i = 1, ..., n$, $x_j \in [a_j, b_j] \quad (j \neq i)$:
$$f_i(x_1, ..., x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, ..., x_n) \geq 0$$
und
$$f_i(x_1, ..., x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, ..., x_n) \leq 0.$$
Man zeige: f besitzt eine Nullstelle.

14. Sei Ω offen, beschränkt und konvex. Man zeige, daß der Brouwersche Fixpunktsatz auch auf $\overline{\Omega}$ gilt.

    Hinweis: Arbeiten Sie mit dem in der Veranstaltung vorgestellten Minkowski–Funktional.

    Zusatz: Was kann man sagen, wenn $K \neq \emptyset$ kompakt und konvex ist, aber nicht mehr notwendigerweise innere Punkte enthält, und $f : K \to K$ stetig ist?

15. Sei n ungerade, $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$ sei stetig.
Dann gibt es ein $\zeta \in S^{n-1}$ mit $f(\zeta) = \zeta$ oder $f(\zeta) = -\zeta$.

16. Sei $f : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}^n$ stetig, für alle $x \in \overline{B_1(0)}$ gelte $f(x) \neq 0$. Dann existieren Zahlen $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ und Punkte $\zeta_1, \zeta_2 \in S^{n-1}$ mit $f(\zeta_1) = \lambda_1\zeta_1$, $f(\zeta_2) = \lambda_2\zeta_2$.

17. (Satz von Borsuk-Ulam)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen und symmetrisch mit $0 \in \Omega$. Sei $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, $m < n$, stetig.
Dann existiert $\zeta \in \partial\Omega$ mit $f(\zeta) = f(-\zeta)$.

Beispiel: $n = 3, m = 2, \Omega =$ Erde $f(x) = \begin{pmatrix}\text{Temp.}\\ \text{Druck}\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ An zwei antipodalen Punkten auf der Erdoberfläche stimmen Druck und Temperatur überein.

18. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal injektiv, für $|x| \to \infty$ gelte $|f(x)| \to \infty$. Man zeige: $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

19. Sei $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $\varphi(x) \to -\infty$ für $|x| \to +\infty$ und $\nabla\varphi(x) \neq 0$ für $|x| \geq R, R > 0$ geeignet.
Man zeige, daß für alle $r \geq R$ gilt:

$$d(\nabla\varphi, B_r(0)) = (-1)^n.$$

Anleitung: Man arbeite auf Niveaumengen für φ.
Für geeignetes Ω und $x \in \overline{\Omega}$ betrachte man das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= \nabla\varphi(u(t,x)), \qquad t \geq 0, \\ u(0,x) &= x \end{aligned}$$

und zeige, daß für alle $t > 0$ gilt:

$$d(u(t,.) - Id, \Omega) = d(\nabla\varphi, \Omega).$$

Schließlich zeige man, daß für hinreichend große t und $x \in \partial\Omega$ der „Fluß“ $u(t,x)$ relativ klein zu $Id(x) = x$ ist.

20. Man überlege sich die Produktformel für den Abbildungsgrad mit Hilfe von Hilfssatz 3.7, dabei können die beteiligten Abbildungen und die auftretenden „Null-“Stellen als so regulär wie benötigt angenommen werden.

21. Sei $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, es gebe ein $\omega > 0$, so daß für alle $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ gilt: $f(t+\omega, x) = f(t,x)$. Ferner sei $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(x) \to -\infty$ für $|x| \to \infty$; es gebe ein $R > 0$, so daß für alle $|x| \geq R$ und $t \geq 0$ gilt:

$$\nabla\varphi(x) \cdot f(t,x) > 0.$$

Man zeige, daß die Differentialgleichung

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

eine ω-periodische Lösung besitzt.

22. (Satz von Jentzsch)
Sei $\emptyset \neq C^\circ \subset C \subset \mathbb{R}^n$ und C kompakt, für den Integralkern $K \in C^0(C \times C)$ gelte $K(x,y) > 0$ für alle $x, y \in C$.
Man zeige: Es gibt einen positiven Eigenwert $\lambda > 0$ und eine strikt positive Eigenfunktion $f \in C^0(C)$ von
$$\int_C K(x,y)f(y)dy = \lambda f(x).$$

23. Sei V ein Banachraum.
Man zeige: $M \subset V$ ist präkompakt $\Leftrightarrow$ $\overline{M}$ ist kompakt.

24. Sei V ein Banachraum, $F : V \to V$ sei eine stetige Abbildung, so daß für jede beschränkte Menge $B \subset V$ das Bild $F(B)$ präkompakt ist. Außerdem existiere eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft:
Ist $x \in V$ für ein $\tau \in [0,1]$ Lösung der Gleichung $x - \tau F(x) = 0$, so ist $\|x\| \leq K$. Dann gilt: F hat in V einen Fixpunkt.
(Methode der a-priori-Schranken.)
Hinweis: Mit Hilfe von F konstruiere man eine kompakte Abbildung $F : \overline{B_{K+1}(0)} \to \overline{B_{K+1}(0)}$.

25. Sei V ein Banachraum, $M \subset V$. Dann sind äquivalent:
   (i) M ist präkompakt.
   (ii) Zu jedem $\delta > 0$ existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ und n Punkte $x_{1,\dots,}x_n \in M$ mit $M \subset \bigcup_{j=1}^n B_\delta(x_j)$.

   Hinweis: Man verwende die Äquivalenz von Folgen- und Überdeckungskompaktheit.

26. Sei V ein Banachraum, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die keine (in V) konvergente Teilfolge besitzt. Dann gibt es ein $\delta > 0$ und eine Teilfolge $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$, so daß für alle $i \neq j$ gilt:
$$\|x_{k_i} - x_{k_j}\| \geq \delta.$$

27. Sei $\Omega \subset V$ offen; die Abbildung $F : \Omega \to V$ heißt in $x_0 \in \Omega$ (Fréchet-) differenzierbar, falls gilt:
Es gibt eine beschränkte lineare Abbildung $A : V \to V$, ein $\varepsilon > 0$ und eine Abbildung $R : B_\varepsilon(x_0) \to V$ mit $\lim_{x\to x_0} \frac{\|R(x)\|}{\|x-x_0\|} = 0$, so daß F in $B_\varepsilon(x_0)$ die Darstellung besitzt:
$$F(x) = F(x_0) + A(x - x_0) + R(x).$$
In diesem Fall heißt $A =: DF(x_0)$ das (Fréchet-) Differential von F im Punkte x_0.

   Man zeige: Ist $F : \Omega \to V$ kompakt und in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, so ist $DF(x_0)$ eine kompakte lineare Abbildung, bildet also beschränkte Mengen auf präkompakte ab.

28. Sei $V = c^0 =$ Menge aller reellen Nullfolgen $= \{x = (x_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} : x_\ell \in \mathbb{R}, \lim_{\ell\to\infty} x_\ell = 0\}$, zusammen mit $\|x\| := \|x\|_{c^0} = \max_{\ell\in\mathbb{N}} |x_\ell|$ wird V ein Banachraum (ohne Beweis). Sei $F : V \to V, F(x) = (x_\ell^2)_{\ell\in\mathbb{N}}$. Man zeige:
F ist an jeder Stelle $x \in V$ Fréchet–differenzierbar, und $DF(x)$ ist eine kompakte lineare Abbildung. Dagegen ist $F|\overline{B_1(0)}$ nicht kompakt.
D. h., die Umkehrung von Aufgabe 27 gilt nicht.

29. Sei $\Omega \subset V$ offen, $F : \Omega \to V$ sei kompakt und in $x_0 \in \Omega$ Fréchet-differenzierbar. Das Differential $Id - DF(x_0)$ sei injektiv. Ferner habe $Id - F$ in x_0 eine Nullstelle: $x_0 - F(x_0) = 0$. Man zeige: Die Nullstelle x_0 ist isoliert, und es gilt:

$$\text{ind}(Id - F, x_0) = \text{ind}(Id - DF(x_0), 0).$$

Hinweis: Aufgabe 27.

30. Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Aufgabe 29 gelte: V ist ein Hilbertraum , d. h. es gibt ein Skalarprodukt, so daß für alle $x \in V$ gilt: $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.

    Das Differential von F in x_0 sei selbstadjungiert – für alle $x, y \in V$ ist $\langle DF(x_0)x, y \rangle = \langle x, DF(x_0)y \rangle$ – und besitze in $(1, \infty)$ $N \in \mathbb{N}_0$ Eigenwerte $\lambda_1, \ldots \lambda_N$; jeder Eigenwert wird entsprechend seiner Vielfachheit aufgeführt.
    (Die endliche Anzahl in $(1, \infty)$ folgt bereits aus der Kompaktheit von $DF(x_0)$).

    Man zeige: $\quad \text{ind}(Id - F, x_0) = (-1)^N$.

31. Sei $\Omega \subset V$ offen, beschränkt, $0 \in \Omega$. Sei $F : \overline{\Omega} \to V$ kompakt und $d(Id - F, \Omega) \neq 1$. Man zeige: Dann hat F einen positiven Eigenwert, d. h. es gibt $x \in \Omega, x \neq 0, \lambda > 0$, so daß $F(x) = \lambda x$.

32. Sei $\Omega \subset V$ offen, beschränkt, $F : \overline{\Omega} \to V$ sei kompakt, $0 \notin (Id - F)(\partial\Omega)$, es gelte $d(Id - F, \Omega) \neq 0$. Die Abbildung $G : V \to V$ genüge der Lipschitz-Bedingung $\|G(x) - G(y)\| \leq K\|x - y\|$ für alle $x, y \in V$ mit einer geeigneten Konstanten $K > 0$. Man zeige: Es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß für jedes $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ die Gleichung

$$x = F(x) + \varepsilon G(x)$$

    eine Lösung $x \in \Omega$ besitzt.
    Anleitung: Man zeige für hinreichend kleine $|\varepsilon|$, daß

    - $Id - \varepsilon G$ ein Homöomorphismus von V ist (Banachscher Fixpunktsatz),
    - für $x \in V$ die Abbildung $[0, 1] \ni \tau \to (Id - \varepsilon\tau G)^{-1}(x)$ stetig ist,
    - daß $[0, 1] \times \overline{\Omega} \to V, H(\tau, x) = (Id - \varepsilon\tau G)^{-1}F(x)$ eine zulässige Homotopie ist.