

Polyharmonische  
Dirichletprobleme:  
Positivität,  
kritische Exponenten  
und  
kritische Dimensionen

Habilitationsschrift,  
zur Erlangung  
des Grades Dr. rer. nat. habil.,  
der Fakultät  
für Mathematik und Physik  
der Universität Bayreuth  
vorgelegt von  
Hans-Christoph Grunau

29. Mai 1996

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
0.1	Positivitätseigenschaften . . . . .	3
0.2	Semilineare Eigenwertprobleme . . . . .	5
0.3	Erklärung, Danksagung . . . . .	8
<b>1</b>	<b>Positivitätseigenschaften</b>	<b>10</b>
1.1	Beliebige Raumdimension . . . . .	11
1.1.1	Abschätzungen für die Greensche Funktion . . . . .	12
1.1.2	Ein 3-G-Theorem . . . . .	21
1.1.3	Das Störungsergebnis . . . . .	29
1.1.4	Verhalten der Resolvente, Nichtpositivität beim parabolischen Anfangsrandwertproblem . . . . .	32
1.1.5	Einfluß nichtnegativer Randdaten . . . . .	37
1.2	Resultate für zwei Raumdimensionen . . . . .	47
1.2.1	Störungen des Gebiets . . . . .	49
1.2.2	Störungen des Hauptteils . . . . .	52
1.3	Lokales Maximumprinzip für Differentialungleichungen . . . . .	56
<b>2</b>	<b>Semilineare Eigenwertprobleme: Existenzresultate</b>	<b>60</b>
2.1	Positive Lösungen: "Grundzustände" . . . . .	61
2.1.1	Subkritisches Wachstum . . . . .	62
2.1.2	Kritisches Wachstum . . . . .	64
2.2	Existenz von Lösungen jenseits des ersten Eigenwertes . . . . .	71
<b>3</b>	<b>Semilineare Eigenwertprobleme: Nicht-Existenz-Resultate</b>	<b>82</b>
3.1	Eine Vermutung von Pucci und Serrin, I: Nichtexistenz positiver radial- symmetrischer Lösungen . . . . .	83
3.2	Eine Vermutung von Pucci und Serrin, II: Nichtexistenz radialsymme- trischer Lösungen, Kritische Dimensionen . . . . .	86
3.2.1	Beweis von Satz 3.2, Teil 1 . . . . .	87
3.2.2	Einige Hilfssätze . . . . .	89
3.2.3	Beweis von Satz 3.2, Teil 2 . . . . .	95
3.2.4	Gewichtete Einbettungs- und Interpolationsungleichungen . . . . .	103
3.2.5	Beweis von Satz 3.2, Teil 3 . . . . .	107
3.2.6	Grundsätzliche Schwierigkeiten beim Nachweis weiterer kriti- scher Dimensionen . . . . .	114
3.3	Bemerkungen zum Grenzfall $\lambda = 0$ . . . . .	117
	<b>Bezeichnungen</b>	<b>123</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>125</b>

## 0 Einleitung

Gegenstand dieser Arbeit sind Dirichletprobleme höherer Ordnung:

$$(1) \quad \begin{cases} (-\Delta)^m u + f(x, u, \dots, D^{2m-1}u) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^j u|_{\partial\Omega} = \varphi_j & \text{für } j = 0, \dots, m-1. \end{cases}$$

Dabei ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  stets ein ausreichend glattes, beschränktes Gebiet mit äußerer Einheitsnormale  $\nu$ ;  $n, m \in \mathbb{N}$ . Ferner bezeichnet  $\alpha$  im folgenden stets einen Multiindex der Länge  $n$  mit  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ ,  $D^\alpha = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{\alpha_i}$ ,  $D^j u = (D^\alpha u)|_{|\alpha|=j}$ . Wir werden uns im wesentlichen auf den polyharmonischen Hauptteil  $(-\Delta)^m$  beschränken, nur in Kapitel 1.2 werden auch allgemeinere Hauptteile untersucht. Die Abhängigkeit von  $f$  von den Termen niedriger Ordnung kann linear oder nichtlinear sein, nichtlineare Abhängigkeit werden wir hier jedoch nur von der Lösung  $u$  selbst zulassen.

Mitunter verhalten sich solche Probleme höherer Ordnung ( $m > 1$ ) ganz ähnlich wie solche zweiter Ordnung, häufig jedoch sind Verallgemeinerungen von  $m = 1$  auf  $m > 1$  schwierig, nur eingeschränkt richtig, noch nicht gelungen oder sogar im allgemeinen falsch.

So sind zum Beispiel im linearen Fall  $C^{2m,\alpha}$ - und  $W^{2m,p}$ -Abschätzungen gegen die  $C^0$ - bzw. die  $L^1$ -Norm weitgehend parallel zu  $m = 1$  möglich, s. [ADN]. Maximumabschätzungen gegen die Daten allein sind dagegen nicht so elementar und nicht in derselben Schärfe herzuleiten wie bei Gleichungen zweiter Ordnung. Ob ein Randwertproblem solche Maximumabschätzungen überhaupt gestattet, läßt sich nicht mehr so einfach allein am Vorzeichen eines Koeffizienten ablesen. Dazu s. [Ag]. Starke Maximumprinzipien, wie man sie von Gleichungen zweiter Ordnung kennt, sind offensichtlich falsch; Vergleichsprinzipien wurden bislang nur ansatzweise erforscht.

Anhand einiger Problemstellungen sollen in der vorliegenden Arbeit Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen einander entsprechenden Gleichungen zweiter und höherer Ordnung etwas genauer beleuchtet werden. Dadurch wird zum einen deutlich, in welchem Maße Hilfsmittel, etwa hinsichtlich linearer Differentialgleichungen, zur Behandlung von nichtlinearen Problemen höherer Ordnung, die offenbar in jüngerer Zeit zunehmend Beachtung finden ([Nit], [Sim]), überhaupt noch zur Verfügung stehen. Zum anderen ergibt sich auch ein besseres Verständnis für die Resultate bei Gleichungen zweiter Ordnung: Wann reicht allein die elliptische Struktur der Probleme und wann sind die weitergehenden Besonderheiten der Ordnung zwei nötig? Außerdem erfährt durch die Untersuchung der Abhängigkeit von  $m$  manches Phänomen eine schlüssige Interpretation.

Es sei noch bemerkt, daß außer der Vorgabe der Dirichletdaten (1.b) noch eine Fülle anderer Randwertvorgaben möglich ist. Bei der Plattengleichung  $\Delta^2 u = f$  in  $\Omega$  beispielsweise werden betrachtet:  $u|_{\partial\Omega}$  und  $\Delta u|_{\partial\Omega}$  (Navierproblem, "aufliegende Platte"),  $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega}$  und  $\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega}$  (Neumannproblem),  $\Delta u|_{\partial\Omega}$  und  $\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega}$  ("freie" Platte). Dabei gestatten Navier- und Neumannproblem eine "sinnvolle" Umformulierung in Randwertprobleme für elliptische Systeme zweiter Ordnung; die Vorgabe von  $\Delta u|_{\partial\Omega}$

und  $\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}|_{\partial \Omega}$  genügt nicht der “complementing condition” bzgl.  $\Delta^2$  von Agmon, Douglis, Nirenberg [ADN] und hat bisher wenig Interesse gefunden. Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf Dirichletprobleme, weil sie

- einerseits eine naheliegende anschauliche Interpretation gestatten (“eingespannte Platte”) und weil
- andererseits bei ihnen Probleme und Phänomene von Gleichungen höherer Ordnung in “Reinform” studiert werden können.

Für Resultate zu “Nicht-Dirichletproblemen” verweisen wir auf die Literatur, s. z.B. [CFM], [JN], [Mi], [MS], [PV], [Sor], [Vo1], [Vo2].

## 0.1 Positivitätseigenschaften

Starke Maximumprinzipien, wie sie von elliptischen Gleichungen zweiter Ordnung her vertraut sind, sind für Gleichungen höherer Ordnung ganz offensichtlich falsch, wie die polyharmonische Funktion  $x \mapsto -|x|^2$  zeigt. Bei der Überlegung, auf welche Art Maximumprinzipien auf Gleichungen höherer Ordnung übertragen werden können, macht es dagegen Sinn zu fragen, ob festes Vorzeichen von Daten im Randwertproblem (1) sich in festem Vorzeichen der Lösung  $u$  niederschlägt. In Kapitel 1 werden folglich Positivitätseigenschaften (Vergleichsprinzipien) für Dirichletprobleme höherer Ordnung untersucht. Zur Erläuterung betrachten wir einen wichtigen Prototyp, der bereits alle wesentlichen Schwierigkeiten aufweist; die lineare Plattengleichung:

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta^2 u = f(x) \text{ in } \Omega, \\ u|_{\partial \Omega} = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial \Omega} = 0. \end{cases}$$

Dabei ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  die Form der horizontal eingespannten Platte,  $f$  die dazu senkrechte, auf die Platte wirkende Kraft(-dichte) und  $u$  die Auslenkung aus der Ruhelage. Es sei bemerkt, daß allein schon die Vorgabe der “Dirichlet”-Randwerte die scheinbare Struktur der Gleichung als Produkt zweier Operatoren zweiter Ordnung vollkommen zerstört.

Unter Zuhilfenahme physikalischer Intuition könnte man, ähnlich wie schon 1901 Boggio [Bo1] oder 1908 Hadamard [H2], vermuten, daß in allen “sinnvollen” konvexen Gebieten  $\Omega$  eine ausschließlich nach oben gerichtete Kraft (d.h.  $0 \neq f \geq 0$ ) eine nur nach oben verformte Platte nach sich zieht (d.h.  $u > 0$ ). Diese Vermutung läßt sich auch so formulieren, daß die zum Problem (2) gehörige Greensche Funktion in  $\Omega \times \Omega$  positiv ist. Beweisen konnte Boggio [Bo2] seine Vermutung in Kugeln  $B$  durch explizite Angabe der Greenschen Funktion, dabei konnte er auch allgemeine Potenzen  $(-\Delta)^m$  und Raumdimensionen  $B \subset \mathbb{R}^n$  behandeln.

Für alle anderen Gebiete blieb diese Vermutung bis 1949 ungeklärt, als von Duffin [Du] ein erstes Gegenbeispiel angegeben wurde. Aus der Fülle weiterer Gegenbeispiele

[Cof], [CD], [Ga1], [KKM], [Loe], [Osh], [ST], [Sz] seien nur zwei besonders schöne herausgegriffen. Garabedian [Ga1], s. auch [Ga2, S. 275], fand 1951, daß die Greensche Funktion zu (2) ihr Vorzeichen bereits in Ellipsen wechselt, deren Verhältnis der Halbachsen ungefähr 2 beträgt. Coffman und Duffin [CD] konnten 1980 ein entsprechendes Resultat für Rechtecke und insbesondere Quadrate erzielen.

Diese Beispiele lassen die Frage offen, ob möglicherweise die Kugel das einzige Gebiet mit positiver Greenscher Funktion ist. Das ist jedoch nicht der Fall, wie in Kapitel 1.2 gezeigt wird: In Gebieten, die in einem zu präzisierenden Sinne einer Kugel nahe sind, besitzt Problem (2) die positivitätserhaltende Eigenschaft:  $0 \not\equiv f \geq 0 \Rightarrow u > 0$ . Dieses Resultat wird dort auch allgemeiner für kleine (lineare) Störungen des Operators  $(-\Delta)^m$  einschließlich der führenden Koeffizienten gezeigt.

Kapitel 1.1 behandelt Vergleichsprinzipien in beliebigen Raumdimensionen. Da dort nicht die ganze Bandbreite starker Hilfsmittel zweidimensionaler Theorie (z.B. konforme Abbildungen, Reduktion auf Normalform) zur Verfügung steht, sind die erzielten Resultate auch schwächer: Für allgemeines  $n$  können nur noch Störungen niedriger Ordnung von  $((-\Delta)^m, B)$  behandelt werden. D.h., es wird Positivität für Dirichletprobleme:

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u + \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} b_\alpha(x) D^\alpha u = f & \text{in } B, \\ D^\alpha u|_{\partial B} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m-1, \end{cases}$$

mit “kleinen” Koeffizienten  $b_\alpha$  gezeigt. Ungeachtet der technisch bedingten Beschränkung auf die Kugel  $B \subset \mathbb{R}^n$  sind wir jedoch der Überzeugung, daß in  $\mathbb{R}^n$ , ähnlich wie in  $\mathbb{R}^2$ , die positivitätserhaltende Eigenschaft der Randwertprobleme auch bei kleinen Störungen des Gebiets (und der führenden Koeffizienten) erhalten bleibt.

Die “globalen” Vergleichssätze für kleine Störungen von  $(-\Delta)^m$  werden in Kapitel 1.3 verwendet, um ein “lokales” Maximumprinzip für Operatoren

$$Lu = (-\Delta)^m u + \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} b_\alpha(x) D^\alpha u$$

zu zeigen, wobei die Koeffizienten  $b_\alpha$  nur mehr qualitativen, nicht aber quantitativen Voraussetzungen unterworfen werden. Für beliebige kompakte Teilmengen  $K \subset \Omega$  wird gezeigt, daß aus der Gültigkeit der Differentialungleichung

$$Lu \leq f$$

bei beliebig gewähltem  $q > n/2m$ ,  $q \geq 1$  bereits die einseitige Maximumabschätzung folgt:

$$\sup_K u \leq C(\text{dist}(K, \partial\Omega), b_\alpha, q, n, m) \{ \|f^+\|_{L^q} + \|u\|_{W^{m-1,1}} \}.$$

Die niedrige Ordnung der Norm von  $u$  auf der rechten Seite ist der Verwendung der Greenschen Funktion zu *Dirichletrandwerten* zu verdanken.

Die im Kapitel 1 bereitgestellten Positivitätsresultate lassen sich in verschiedener Weise auf semilineare Randwertprobleme anwenden, dazu siehe Folgerung 1.31, die Sätze 2.4 und 2.5 sowie den folgenden Abschnitt dieser Einleitung.

## 0.2 Semilineare Eigenwertprobleme

Das semilineare elliptische Eigenwertproblem zweiter Ordnung

$$(3) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{p-1}u, & u \neq 0 \text{ in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein glattes beschränktes Gebiet,  $n \geq 3$ ,  $1 < p \leq (n+2)/(n-2)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , gehört sicher zu den in den letzten Jahren am häufigsten untersuchten Differentialgleichungen, s. z.B. [BrN], [R], [CFP], [AS], [FJ] [CSS], [Sol], [ABP], [Cor], [BenC], u.v.a., s.a. die Überblicksmonographie von Struwe [Str4]. Lösungen von (3) werden z.B. als kritische Punkte des Variationsfunktionals

$$(4) \quad E_\lambda(u) = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2} u^2 - \frac{1}{p+1} |u|^{p+1} \right\} dx$$

gewonnen. Von besonderem Interesse ist “kritisches” Wachstum  $p = s := (n+2)/(n-2)$ . In diesem Fall ist die Einbettung  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$  zwar noch stetig, aber nicht mehr kompakt; das Funktional  $E_\lambda$  in (4) erfüllt keine “globale Palais-Smale-Bedingung” mehr.

Viele wichtige Probleme aus Physik und Geometrie haben kritisches Wachstum, z.B. Yang-Mills-Funktionale auf 4-Mannigfaltigkeiten, Euler-Lagrange-Gleichungen für harmonische Abbildungen, das Yamabe-Problem oder die  $H$ -Flächen-Gleichung. Gleichung (3) ist die einfachste Gleichung mit kritischem Wachstum. Sie ist deshalb so eingehend studiert worden, weil sie nicht nur große formale Ähnlichkeit mit der Yamabe-Gleichung aufweist, sondern weil viele grundsätzliche Schwierigkeiten und Phänomene von Gleichungen mit kritischem Wachstum an ihr exemplarisch studiert werden können. Die fundamentale Arbeit [BrN] von Brezis und Nirenberg über das Problem (3) nimmt einerseits auf sehr klare Weise Methoden auf, die z.B. im Zusammenhang mit dem Yamabe-Problem entwickelt worden sind ([Tr], [Au], [Sn]). Andererseits steht sie am Anfang einer Reihe von Arbeiten z.B. über “große Lösungen” der  $H$ -Flächen-Gleichung [BrC], [Str1], [Str2], [Str3], [Ste], [J1], [J2]. Insgesamt wurde schließlich ein klares Verständnis der (lokalen) Kompaktheitseigenschaften von Variationsfunktionalen mit kritischem Wachstum erreicht.

Von besonderem Interesse sind die nach den trivialen “einfachsten” Lösungen, die positiven Lösungen, auch “Grundzustände” genannt. Manche Resultate, wie etwa Vielfachheitsaussagen für positive Lösungen, hängen ganz wesentlich von Geometrie und Topologie der Gebiete  $\Omega$  ab. Dieser Aspekt soll aber in der vorliegenden Arbeit vollkommen unbeachtet bleiben, es werden nur “einfache” Gebiete betrachtet. Insbesondere beschränken wir uns für den Rest der Einleitung auf die Einheitskugel  $\Omega = B$ . Denn entsprechend den Erläuterungen oben in Kapitel 0.1 ist die Frage nach positiven Lösungen in komplizierten Gebieten bei Gleichungen von höherer Ordnung als 2 mit den derzeit zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln nicht zu beantworten oder u.U. nicht einmal mehr sachgemäß.

Bei subkritischem  $p$ , d.h.  $p < s$ , existieren positive Lösungen zu (3) für  $\lambda < \Lambda_{1,1}$ , dabei ist  $\Lambda_{1,1}$  der erste positive Eigenwert von  $-\Delta = (-\Delta)^1$  in  $B$  unter homogenen Dirichletrandbedingungen. Hinsichtlich Lösungen ohne festes Vorzeichen gilt sogar, daß für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  unendlich viele nichttriviale Lösungen existieren, dazu siehe [Str4, chapt. II, Theorem 6.6].

Der kritische Fall ist wesentlich interessanter: Nichttriviale Lösungen können gemäß einem Resultat von Pohožaev [Poh] höchstens für  $\lambda > 0$ , positive Lösungen höchstens für  $\lambda \in (0, \Lambda_{1,1})$  existieren. Wie Brezis und Nirenberg [BrN] entdeckt haben, ist jedoch das Lösungsverhalten von (3) wesentlich subtiler; es hängt nämlich von der Raumdimension  $n$  ab. Ist  $n \geq 4$ , so existieren positive Lösungen genau für  $\lambda \in (0, \Lambda_{1,1})$ , im Fall  $n = 3$  jedoch genau für  $\lambda \in (\frac{1}{4}\Lambda_{1,1}, \Lambda_{1,1})$ . Hier sei bemerkt, daß positive Lösungen von (3) einem Resultat von Gidas, Ni und Nirenberg [GNN] zufolge immer radialsymmetrisch sind (beachte  $\Omega = B$ ) und gemäß Arbeiten von Ni, Nussbaum [NN], Zhang Lique [Zg], Srikanth [Sri], Adimurthi, Yadava [AY2] u.a. auch eindeutig bestimmt sind.

Auch hinsichtlich der Existenz (beliebiger) nichttrivialer Lösungen hängen die Resultate von der Raumdimension  $n$  ab. Die Arbeit [CFP] von Capozzi, Fortunato und Palmieri zeigt (auch für beliebiges  $\Omega$ ), daß im Falle  $n \geq 5$  für jedes  $\lambda > 0$ , im Falle  $n = 4$  für jedes  $\lambda > 0$ , welches nicht Eigenwert von  $-\Delta$  ist, mindestens eine nichttriviale Lösung von (3) existiert, während Fortunato und Jannelli [FJ] unter Ausnutzung der Symmetrie von  $\Omega = B$  für  $n \geq 4$  sogar unendlich viele *unsymmetrische* Lösungen konstruieren können. Für  $n = 3$  dagegen scheint bisher die Existenz nichttrivialer Lösungen nur in Linksumgebungen von Eigenwerten  $\lambda \in (\Lambda_{1,j} - \lambda_0, \Lambda_{1,j})$  bekannt zu sein [CFS]; dabei ist  $\Lambda_{1,j}$  der  $j$ -te Dirichlet-Eigenwert von  $-\Delta$  in  $B$  und  $\lambda_0 < \Lambda_{1,1}$  eine feste positive Zahl. Aufgrund der Eigenwertasymptotik gemäß Weyl und Courant  $\Lambda_{1,j} \sim Cj^{2/n}$  können sich diese Intervalle für große  $j$  überlappen. Für  $\lambda \in (0, \frac{1}{4}\Lambda_{1,1})$  jedoch existieren gemäß [BrN] nicht einmal nichttriviale radialsymmetrische Lösungen, ob für  $\lambda$  nahe 0 wirklich nur die triviale Lösung  $u \equiv 0$  existiert, ist meines Wissens noch ungeklärt.

Ist man nur an radialsymmetrischen Lösungen interessiert, ergibt sich eine weitere Differenzierung bezüglich der Raumdimension: für  $n \geq 7$  haben Cerami, Solimini und Struwe [CSS], [Sol] für jedes  $\lambda > 0$  die Existenz unendlich vieler radialsymmetrischer Lösungen gezeigt. Dagegen gibt es im Falle  $n = 4, 5, 6$  Zahlen  $\Lambda = \Lambda(n) > 0$ , so daß auf  $(0, \Lambda(n))$  keine radialsymmetrische Lösung mit Vorzeichenwechsel existiert. D.h., mit Blick auf das oben erwähnte Eindeutigkeitsresultat gibt es für  $\lambda \in (0, \Lambda(n))$ ,  $n = 4, 5, 6$ , genau ein Paar radialsymmetrischer Lösungen zu (3).

Im Sinne der Bemerkungen zu Beginn der Einleitung, s. S. 2, wollen wir in den Kapiteln 2 und 3 der vorliegenden Arbeit der Frage nachgehen, ob oder in welcher Form die oben skizzierten Resultate Verallgemeinerungen auf das semilineare polyharmonische Modell-Dirichletproblem:

$$(5) \quad \begin{cases} (-\Delta)^m u = \lambda u + |u|^{s-1}u, & u \neq 0 & \text{in } B, \\ D^\alpha u|_{\partial B} = 0 & & \text{für } |\alpha| \leq m-1, \end{cases}$$

besitzen. Dabei ist  $s = (n + 2m)/(n - 2m)$  wieder der kritische Exponent,  $B \subset \mathbb{R}^n$  die Einheitskugel,  $n > 2m$ . Es ist zu beachten, daß für  $m > 1$  im Gegensatz zu  $m = 1$ , s. [GNN], (noch ?) nicht geklärt ist, ob Positivität von  $u$  (in  $B$ ) die Radialsymmetrie impliziert.

Das Pohožaev-Resultat ist von Pucci und Serrin [PS1] verallgemeinert worden: für  $\lambda < 0$  hat das Dirichletproblem (5) nur die triviale Lösung  $u \equiv 0$ . Hier ist bereits ein weiterer großer Unterschied zwischen Gleichungen zweiter und höherer Ordnung zu erkennen: Der Fall  $\lambda = 0$  bleibt in [PS1] offen. Für diesen Fall sind bislang nur Teilresultate bekannt. Soranzo [Sor] (für  $m = 2$  s.a. [Osw]) hat bemerkt, daß man mittels der verallgemeinerten Pohožaev-Identität [PS1] und der Positivität der Greenschen Funktion [Bo2] die Nichtexistenz positiver Lösungen zeigen kann. Durch die Verwendung komplizierterer Testfunktionen können wir bei Gleichungen niedriger Ordnung,  $m = 2, 3$ , auch die Existenz radialsymmetrischer Lösungen ausschließen, s. Kapitel 3.3.

Hinsichtlich der Existenz positiver radialsymmetrischer Lösungen von (5) wird in Kapitel 2.1.2 ein in mancher Hinsicht zu [BrN, Theoreme 1.1 und 1.2] analoges Resultat hergeleitet; allerdings ist die Positivität hier ein wesentlich heikleres Problem als im Fall  $m = 1$ , dazu s.a. den Abschnitt 2.1.1. Positive radialsymmetrische Lösungen existieren für

- $\lambda \in (0, \Lambda_{m,1})$ , falls  $n \geq 4m$ ,
- $\lambda \in (\bar{\Lambda}, \Lambda_{m,1})$  mit gewissen Zahlen  $\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}(n, m) \in (0, \Lambda_{m,1})$ , falls  $n = 2m + 1, \dots, 4m - 1$ .

Dabei bezeichnet  $\Lambda_{m,1}$  den ersten Dirichlet-Eigenwert von  $(-\Delta)^m$  in  $B$ .

Im Vertrauen auf die Verallgemeinerungsfähigkeit der von Brezis und Nirenberg [BrN] entwickelten Methoden äußern Pucci und Serrin bereits 1990 [PS3] die Überzeugung, daß ein solches Existenzresultat richtig sei. In dieser Arbeit beschäftigen sie sich mit der Frage, in wie weit dieses Existenzresultat scharf ist. Insbesondere interessiert sie dabei das Verhalten der Dimensionen  $n = 2m + 1, \dots, 4m - 1$ . Sie vermuten, daß es für diese Dimensionen positive Zahlen  $\tilde{\Lambda} > 0$  gibt, so daß für  $\lambda \leq \tilde{\Lambda}$  *keine* positiven radialsymmetrischen Lösungen von (5) existieren. Diese Vermutung wird in Kapitel 3.1 bewiesen. Eine optimale Bestimmung dieser Zahlen  $\bar{\Lambda}$  und  $\tilde{\Lambda}$ , für die dann vermutlich  $\bar{\Lambda} = \tilde{\Lambda}$  gilt, ist noch nicht gelungen.

In der bereits erwähnten Arbeit [PS3] werfen Pucci und Serrin außerdem die ungleich schwerer zu entscheidende Frage auf, ob sich das oben beschriebene pathologische Lösungsverhalten der Dimensionen  $n = 2m + 1, \dots, 4m - 1$  auch auf die Klasse beliebiger nichttrivialer radialsymmetrischer Lösungen erstreckt. Sie haben dafür den Begriff der kritischen Dimension eingeführt ([PS3]):

**Definition 0.1.** Die Dimension  $n$  heißt **kritisch** bezüglich des Randwertproblems (5), falls es eine positive Zahl  $\Lambda > 0$  gibt derart, daß

$$\lambda > \Lambda$$



eine notwendige Bedingung für die Existenz nichttrivialer radialsymmetrischer Lösungen von (5) ist.

Sie vermuten, daß in diesem Sinne  $n = 2m + 1, \dots, 4m - 1$  genau die kritischen Dimensionen sind, zeigen diese Vermutung für  $m = 2$  und weisen  $n = 2m + 1$  für alle  $m$  als kritisch nach.

In Kapitel 3.2 der vorliegenden Arbeit werden weitere kritische Dimensionen bestimmt:  $n = 2m+1, 2m+2, 2m+3, 2m+4, 2m+5$ , falls  $m \geq 3$ , und  $n = 9, \dots, 15$  im Falle  $m = 4$ . Trotz der großen rechnerischen Komplexität dieses Problems scheitert ein voller Beweis der Pucci-Serrin-Vermutung derzeit weniger an rechnerisch-kombinatorischen Problemen, sondern vielmehr daran, daß die verwendeten Testfunktionen für große  $n$  zu schwache Informationen liefern.

In Kapitel 2.2 schließlich wird gezeigt, daß das Existenzresultat von Capozzi, Fortunato, Palmieri [CFP] eine natürliche Verallgemeinerung auf den Fall höherer Ordnung findet: Ist  $n > (\sqrt{8} + 2)m$ , so besitzt (5) für alle  $\lambda > 0$  mindestens eine nichttriviale Lösung; entsprechendes gilt für  $n \geq 4m$ , sofern  $\lambda$  nicht Eigenwert von  $(-\Delta)^m$  ist. Für  $2m < n < 4m$  können wir Existenz analog zum Fall  $m = 1, n = 3$ , nur in “Linksumgebungen” von Eigenwerten zeigen. Im subkritischen Fall hat man wieder die Existenz unendlich vieler Lösungen, s. die Bemerkung auf S. 76.

Einige der oben erwähnten Resultate für Gleichungen zweiter Ordnung können auch in dieser Arbeit nicht verallgemeinert werden wie z.B.:

- Zusammenhang zwischen Positivität und Radialsymmetrie,
- Existenz positiver Lösungen in nicht kugelförmigen Gebieten,
- Existenz unendlich vieler Lösungen von (5) für ausreichend hohe Raumdimensionen,
- Nichtexistenzresultate für vorzeichenwechselnde radialsymmetrische Lösungen von (5).

Zusammenfassend läßt sich festhalten, daß sich die Theorie von Gleichungen höherer Ordnung dort einigermaßen problemlos entwickeln läßt, wo “nur” Variationstechniken,  $L^p$ - oder  $C^\alpha$ -Abschätzungen, klassische Fixpunktsätze, u.ä. benötigt werden.

Wesentliche Schwierigkeiten treten dort auf, wo qualitative Eigenschaften von Lösungen (Vorzeichen, Symmetrie, Anzahl von Knotenhyperflächen, usw.) eine Rolle spielen.

### 0.3 Erklärung, Danksagung

Wesentliche Teile von Kapitel 1, insbesondere die Sätze 1.1 und 1.26, entstammen der Zusammenarbeit mit Guido Sweers, Delft. Ein Teilresultat aus Kapitel 3.2 entstand aufgrund einer Anregung von F. Bernis, Madrid. Teile dieser Habilitationsschrift basieren auf den Arbeiten [BerG], [Gr2], [Gr3], [GS1], [GS2], [GS3].

Dank schulde ich meinen Kollegen Dr. R. Kaiser, Dr. B. Schmitt, Prof. M. Wiegner und vor allem meinem Betreuer, Herrn Prof. W. von Wahl, für zahlreiche Diskussionen und eine anregende Arbeitsatmosphäre. Darüber hinaus möchte ich mich bei Herrn von Wahl für die geduldige Förderung meiner mathematischen Entwicklung bedanken.

Schließlich wäre diese Schrift ohne die Unterstützung meiner Familie nicht zustande gekommen. Meiner Frau Brigitte danke ich für den nötigen zeitlichen Freiraum und die “psychologische Betreuung”, meinen älteren Töchtern Sina und Katharina dafür, daß sie so manche Anspannung ihres Vaters (in der Regel) geduldig und mit Humor ertragen haben und mich mit ihrer kindlichen Lebensfreude immer wieder aufgemuntert haben. Meiner jüngsten Tochter Friederike danke ich dafür, daß sie einfach da ist und mir immer wieder zeigt, daß es auch neben der Mathematik viel Spannendes zu erleben gibt.

# 1 Positivitätseigenschaften

Wir untersuchen Positivitätseigenschaften linearer elliptischer Dirichletprobleme beliebiger Ordnung der Art:

$$(6) \quad \begin{cases} Lu := \left( - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right)^m u + \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} b_\alpha(x) D^\alpha u = f & \text{in } \Omega, \\ D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m-1. \end{cases}$$

Die Frage, unter welchen Voraussetzungen an den Operator  $L$  und an das beschränkte glatte Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  Nichtnegativität der rechten Seite  $0 \neq f \geq 0$  Positivität der Lösung  $u > 0$  nach sich zieht, sich das Randwertproblem (6) also **stark positivitätserhaltend** verhält, ist eine sinnvolle Suche nach Analoga für Gleichungen beliebiger Ordnung zu den bei Gleichungen zweiter Ordnung wohlbekannten Maximumprinzipien. Neben dem eigenständigen Interesse, das solche Positivitätsaussagen z.B. für das Verständnis der Plattengleichung (2) genießen, sind sie vor allem für die Theorie nichtlinearer Gleichungen von Bedeutung, wie viele Resultate für Gleichungen zweiter Ordnung eindrucksvoll belegen, dazu s. z.B. [GT, Part II].

Nun können wir, wie die in der Einleitung genannten Beispiele zeigen, gar nicht mit einem umfassenden Positivitätsresultat für Problem (6) rechnen. Dennoch lassen bereits die im folgenden unter recht einschränkenden Voraussetzungen hergeleiteten Ergebnisse Anwendungen auf nichtlineare Gleichungen zu, dazu s. Kapitel 1.3, 2.1 und 3.1.

Ein wesentliches Problem beim Studium von (6) besteht darin, daß allein schon durch Vorgabe der Dirichletrandwerte (6.b) eine mögliche Struktur der Gleichung (6.a) als System elliptischer Gleichungen zweiter Ordnung völlig zerschlagen wird. Bemerkenswerterweise jedoch, und das gilt auch für die Resultate dieser Arbeit, beziehen sich alle Positivitätsaussagen für Dirichletprobleme höherer Ordnung, positiver wie negativer Art, auf Operatoren, deren Hauptteil  $m$ -te Potenz eines Operators zweiter Ordnung, in der Regel sogar  $(-\Delta)^m$ , ist.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, sind bisher vor allem Gegenbeispiele publiziert worden, die die von Boggio [Bo1] und Hadamard [H2] für Spezialfälle von (6) formulierte Positivitätsvermutung hinsichtlich ihrer Gültigkeit für allgemeine Gebiete  $\Omega$  widerlegen.

Das meines Wissens bisher am weitesten reichende positive Resultat wurde bereits 1905 von Boggio [Bo2] erzielt: er betrachtet Potenzen  $(-\Delta)^m$  des Laplace-Operators in der Einheitskugel  $B \subset \mathbb{R}^n$ ; d.h. in (6) ist  $a_{ij} = \delta_{ij}$ ,  $b_\alpha = 0$  und  $\Omega = B$  zu setzen. Boggio berechnet explizit die zugehörige Greensche Funktion  $G_{m,n}$  und weist deren Positivität  $G_{m,n}(x, y) > 0$  für  $x, y \in B$ ,  $x \neq y$ , nach. Als Folgerung erhält man die stark positivitätserhaltende Eigenschaft:  $0 \neq f \geq 0 \Rightarrow u > 0$ .

Das Resultat von Boggio legt zusammen mit den Gegenbeispielen die Vermutung nahe, daß "kleine" Störungen des Prototyps  $L = (-\Delta)^m$ ,  $\Omega = B$ , den Beweis der positivitätserhaltenden Eigenschaft gestatten. Die Fortschritte, die in der vorliegenden

Arbeit dargestellt werden, zielen genau in diese Richtung. In allgemeinen Raumdimensionen  $n$ , s. Kapitel 1.1, müssen wir uns zwar weiterhin auf die Kugel  $\Omega = B$  und den Hauptteil  $(-\Delta)^m$ , d.h.  $a_{ij} = \delta_{ij}$  in (6), beschränken, können aber bereits kleine Störungen niederer Ordnung zulassen:  $\|b_\alpha\|_{C^0(\bar{B})} \leq \varepsilon_0$  mit einem geeigneten  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m, n) > 0$ . Dieses Resultat beruht auf einer präzisen Charakterisierung der von Boggio konstruierten Greenschen Funktion  $G_{m,n}$  von  $(-\Delta)^m$  in  $B \times B$  und ihrer Ableitungen sowie darauf aufbauenden Abschätzungen für iterierte Greensche Funktionen. Als entscheidend wird sich dabei das quantitative Verhalten von  $G_{m,n}$  "nahe"  $\partial B \times \partial B$  erweisen.

Im Falle zweier Raumdimensionen werden wir in Kapitel 1.2 mit Hilfe der dort zur Verfügung stehenden Abbildungstheorie das Positivitätsergebnis auch auf kleine Störungen  $\Omega$  der Einheitskugel  $B$  sowie  $a_{ij}$  der führenden Koeffizienten  $\delta_{ij}$  ausdehnen.

Im Abschnitt 1.3 schließlich leiten wir lokale Maximumabschätzungen für Ungleichungen von der Art (6) her und geben Anwendungen auf semilineare Randwertprobleme.

Genauso interessant, wie der Frage nachzugehen, ob Nichtnegativität der rechten Seite  $f$  die Positivität der Lösung  $u$  impliziert, ist es zu untersuchen, welchen Einfluß inhomogene Randdaten auf das Vorzeichen der Lösung haben. Man könnte etwa vermuten, daß in dem Beispiel

$$(7) \quad \begin{cases} \Delta^2 u = 0 & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u|_{\partial\Omega} = \psi, & -\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = \varphi, \end{cases}$$

die Nichtnegativität der Randwerte

$$\psi \geq 0, \quad \varphi \geq 0,$$

die Nichtnegativität der Lösung  $u \geq 0$  impliziert. Dieses Problem ist jedoch noch wesentlich komplexer als die Untersuchung des Vorzeichens der Greenschen Funktion: Die Vermutung hinsichtlich des Einflusses von  $\psi$  ist für hohe Raumdimensionen  $n > 4$  sogar für  $\Omega = B$  und  $L = \Delta^2$  falsch! Nur bei homogener Vorgabe der Randdaten niederer Ordnung, d.h. im Beispiel (7)  $\psi = 0$ , wirkt sich das Randdatum höchster Ordnung, d.h. im Beispiel  $\varphi \geq 0$ , in  $\Omega = B$  allgemein in dem vermuteten Sinne aus. Dieses Verhalten kann für die gleichen Typen von Randwertproblemen gezeigt werden, für die auch der Positivitätsnachweis der Greenschen Funktion gelingt, dazu siehe den Abschnitt 1.1.5 und die Bemerkung am Ende von Kapitel 1.2 auf S. 55. Die Rolle des Randdatums  $\psi$  in (7) bei Störungen von  $\Delta^2$  in kleinen Raumdimensionen wird in Satz 1.25 beleuchtet.

## 1.1 Beliebige Raumdimension

Wir betrachten das Randwertproblem

$$(8) \quad \begin{cases} Lu := (-\Delta)^m u + \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} b_\alpha(x) D^\alpha u = f & \text{in } B \subset \mathbb{R}^n, \\ D^\alpha u|_{\partial B} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m-1, \end{cases}$$

mit stetigen Koeffizientenfunktionen  $b_\alpha \in C^0(\overline{B})$ . Das zentrale Resultat dieses Abschnitts lautet; die  $L^p$ -Lösungstheorie übernehmen wir dabei von [ADN]:

**Satz 1.1.** *Es gibt ein  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m, n) > 0$  derart, daß gilt:*

*Erfüllen die Koeffizientenfunktionen  $b_\alpha \in C^0(\overline{B})$  die Kleinheitsbedingung  $\|b_\alpha\|_{C^0(\overline{B})} \leq \varepsilon_0$  für alle  $|\alpha| \leq 2m - 1$ , so besitzt das Dirichletproblem (8) zu jedem  $f \in L^p(B)$ ,  $1 < p < \infty$ , eine Lösung  $u \in W^{2m,p}(B) \cap W_0^{m,p}(B)$ . Ist darüber hinaus  $0 \neq f \geq 0$ , so ist die Lösung sogar strikt positiv:*

$$u > 0 \text{ in } B.$$

Dieser Satz ist auch die Grundlage für die weiterreichenden Resultate in zwei Raumdimensionen.

Der Beweis dieses Satzes verwendet ganz wesentlich die explizite Kenntnis der Greenschen Funktion  $G_{m,n}$  von  $(-\Delta)^m$  in  $B \times B$  unter homogenen Dirichletrandbedingungen (8.b). Die Greensche Funktion erfüllt sogenannte 3-G-Theoreme; wir werden nämlich in Abschnitt 1.1.2 für alle  $x, y \in B$ ,  $x \neq y$ , und alle Multiindizes  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq 2m - 1$  zeigen:

$$(9) \quad \frac{\int_B G_{m,n}(x, z) |D_z^\alpha G_{m,n}(z, y)| dz}{G_{m,n}(x, y)} \leq C$$

mit einer nur von  $m, n$  und  $\alpha$  abhängigen Konstanten  $C = C(m, n, \alpha)$ . Die für dieses 3-G-Theorem benötigten Abschätzungen der Greenschen Funktion werden im nun folgenden Abschnitt 1.1.1 bereitgestellt. Da in (9) die Greensche Funktion im Nenner auftritt, ist es erforderlich,  $G_{m,n}$  nach unten (bis auf Konstanten) durch denselben Term wie nach oben abzuschätzen. Für die Ableitungen der Greenschen Funktion reichen dagegen einseitige Abschätzungen.

Mit Hilfe des 3-G-Theorems (9) und einer Neumannschen Reihe können wir im Abschnitt 1.1.3 den Beweis von Satz 1.1 erbringen. Im Kapitel 1.1.4 schließlich wird der Spezialfall  $Lu = (-\Delta)^m u + bu$  untersucht, in dem einerseits weitergehende Aussagen über die Struktur der Menge von Koeffizienten  $b$  möglich sind, für die (8) positivitätserhaltend ist, und in dem andererseits im Falle  $m \geq 2$  die Notwendigkeit einer Kleinheitsbedingung an  $b$  gezeigt wird.

3-G-Theoreme wie in (9) wurden bei Gleichungen zweiter Ordnung ( $m = 1$ ) in anderem Zusammenhang von Ancona [An], Cranston, Fabes, Zhao [CFZ], [Zo] und Hueber, Sieveking [HuS] entdeckt. Die Relevanz dieser Resultate für Positivitätsaussagen bei nichtkooperativen elliptischen Systemen zweiter Ordnung wurde u.a. von Mitidieri und Sweers [Swe1], [Swe2], [MS] bemerkt.

### 1.1.1 Abschätzungen für die Greensche Funktion

Im folgenden bezeichnet  $G_{m,n}$  stets die Greensche Funktion zu  $(-\Delta)^m$  unter Dirichletrandbedingungen in der Einheitskugel  $B \subset \mathbb{R}^n$  und  $\mathcal{G}_{m,n} : L^p(B) \rightarrow W^{2m,p}(B) \cap$

$W_0^{m,p}(B)$ ,  $(\mathcal{G}_{m,n}f)(x) = \int_B G_{m,n}(x,y)f(y) dy$ , den dazugehörigen Greenschen Operator. Die  $L^p$ -Abbildungseigenschaften werden etwa in [ADN] bewiesen.

Sämtliche Resultate dieses Kapitels bauen auf der expliziten Kenntnis der Greenschen Funktion  $G_{m,n}$  auf:

**Hilfssatz 1.2 (Boggio).**

$$(10) \quad G_{m,n}(x,y) = k_{m,n} |x-y|^{2m-n} \int_1^{\frac{|x|y - \frac{x}{|x|}}{|x-y|}} (v^2 - 1)^{m-1} v^{1-n} dv;$$

dabei ist  $k_{m,n} > 0$  eine positive (wohlbekannte) Konstante.

Boggio hat diese Formel, die in der Zwischenzeit weitgehend in Vergessenheit geraten ist, bereits 1905 in [Bo2, p. 126] entdeckt. Da in (10) die obere Integrationsgrenze wegen

$$(11) \quad \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|^2 - |x-y|^2 = (1 - |x|^2)(1 - |y|^2) > 0$$

echt größer als 1 ist, läßt sich die Positivität der Greenschen Funktion  $G_{m,n}$  unmittelbar ablesen. Die ausintegrierte Form der Greenschen Funktion lautet beispielsweise für den biharmonischen Operator, d.h.  $m = 2$ :

$$G_{2,n}(x,y) = c_n \begin{cases} |x-y|^3 + \frac{1}{2} \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|^3 - \frac{3}{2} \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right| |x-y|^2 & \text{für } n = 1, \\ 2|x-y|^2 \left( \log|x-y| - \log \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right| \right) + \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|^2 - |x-y|^2 & \text{für } n = 2, \\ -|x-y| + \frac{1}{2} \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right| + \frac{1}{2} \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|^{-1} |x-y|^2 & \text{für } n = 3, \\ -2 \log|x-y| + 2 \log \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right| - 1 + \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|^{-2} |x-y|^2 & \text{für } n = 4, \\ |x-y|^{4-n} - \frac{n-2}{2} \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|^{4-n} + \frac{n-4}{2} \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|^{2-n} |x-y|^2 & \text{für } n > 4; \end{cases}$$

wobei

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2|n-4| |n-2| \omega_n}, & \text{falls } n \neq 2 \text{ und } n \neq 4, \\ \frac{1}{8\omega_n}, & \text{falls } n = 2 \text{ oder } n = 4. \end{cases}$$

Um eine übersichtlichere Darstellung der teilweise recht komplizierten Abschätzungen zu ermöglichen, führen wir einige abkürzende Bezeichnungen ein.

**Definition 1.1.** a) Für  $x, y \in B$  bezeichnet:

$$(12) \quad d(x) := 1 - |x|,$$

$$(13) \quad [XY] := [YX] := \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right| = \left| |y|x - \frac{y}{|y|} \right|.$$

b) Sei  $N \subset \mathbb{R}^k$ ,  $f, g : N \rightarrow [0, \infty]$ . Wir bezeichnen  $f$  und  $g$  als **äquivalent**,

$$(14) \quad f \sim g,$$

falls es eine Konstante  $C > 0$  derart gibt, daß für alle  $t \in N$  gilt:

$$\frac{1}{C}f(t) \leq g(t) \leq Cf(t).$$

Ferner nennen wir  $f$  **majorisierbar** durch  $g$ ,

$$(15) \quad f \preceq g,$$

falls mit einer Konstanten  $C > 0$  für alle  $t \in N$  gilt:

$$f(t) \leq Cg(t).$$

Den Term  $[XY] = |x| \left| y - \frac{x}{|x|^2} \right|$  nennt man auch *Spiegelladungsterm*, weil  $[XY]^{-1}$  in  $\mathbb{R}^3$  bei festem  $x \in B$  als Potential der im "Spiegelpunkt"  $\frac{1}{|x|} \cdot \frac{x}{|x|}$  befindlichen "Ladung"  $\frac{1}{|x|}$  interpretiert werden kann.  $d(x)$  ist der Abstand von  $x \in B$  zum Rand  $\partial B$ .

Im folgenden sollen Abschätzungen der Greenschen Funktion und ihrer Ableitungen hergeleitet werden, die einen Beweis des 3-G-Theorems (9) erlauben werden. Dabei wird sich eine einzige Fallunterscheidung, die im folgenden Hilfssatz charakterisiert wird, gleichzeitig als unerläßlich und ausreichend erweisen.

**Hilfssatz 1.3.** Im Falle  $|x - y| \geq \frac{1}{2}[XY]$  gilt:

$$(16) \quad d(x)d(y) \leq 3|x - y|^2,$$

$$(17) \quad \max\{d(x), d(y)\} \leq 3|x - y|.$$

Im Falle  $|x - y| \leq \frac{1}{2}[XY]$  gilt:

$$(18) \quad \frac{3}{4}|x - y|^2 \leq \frac{3}{16}[XY]^2 \leq d(x)d(y),$$

$$(19) \quad \frac{1}{4}d(x) \leq d(y) \leq 4d(x),$$

$$(20) \quad |x - y| \leq 3 \min\{d(x), d(y)\},$$

$$(21) \quad [XY] \leq 5 \min\{d(x), d(y)\}.$$

Für alle  $x, y \in B$  gilt schließlich:

$$(22) \quad d(x) \leq [XY], \quad d(y) \leq [XY].$$

Im ersten Fall sind also  $x$  und  $y$  weiter von einander entfernt als vom Rand, im zweiten Fall ist es genau umgekehrt.

**Beweis.** a) Sei  $|x - y| \geq \frac{1}{2}[XY]$ . Dann folgt:

$$d(x)d(y) \leq (1 - |x|^2)(1 - |y|^2) = [XY]^2 - |x - y|^2 \leq 3|x - y|^2,$$

also (16). Die Abschätzung (17) folgt aus

$$\begin{aligned} d(x)^2 &\leq d(x)(d(y) + |x - y|) \leq 3|x - y|^2 + |x - y|d(x) \\ &\leq 4|x - y|^2 + \frac{1}{4}d(x)^2 \\ \Rightarrow d(x)^2 &\leq \frac{16}{3}|x - y|^2, \end{aligned}$$

sowie einer entsprechenden Abschätzung für  $y$ .

b) Sei nun  $|x - y| \leq \frac{1}{2}[XY]$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned} d(x)d(y) &\geq \frac{1}{4}(1 - |x|^2)(1 - |y|^2) = \frac{1}{4}([XY]^2 - |x - y|^2) \\ &\geq \frac{3}{16}[XY]^2 \geq \frac{3}{4}|x - y|^2, \end{aligned}$$

also (18). Die Abschätzung (19) folgt aus

$$\begin{aligned} d(y) &\leq d(x) + |x - y| \leq d(x) + \left(\frac{4}{3}d(x)d(y)\right)^{1/2} \leq \left(1 + \frac{2}{3}\right)d(x) + \frac{1}{2}d(y) \\ \Rightarrow d(y) &\leq \frac{10}{3}d(x), \end{aligned}$$

sowie derselben Rechnung mit vertauschten Rollen von  $x$  und  $y$ . (20) und (21) sind nun offensichtlich.

c) Für alle  $x, y \in B$  gilt schließlich:

$$\begin{aligned} [XY]^2 = \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|^2 &\geq 1 - 2|x| \cdot |y| + |x|^2|y|^2 = (1 - |x| \cdot |y|)^2 \\ &\geq (1 - |x|)^2 = d(x)^2, \\ \text{bzw.} &\geq (1 - |y|)^2 = d(y)^2, \end{aligned}$$

also (22). ■

Damit stehen alle Hilfsmittel bereit, um die grundlegenden Abschätzungen für die Greensche Funktion und ihre Ableitungen formulieren und interpretieren zu können.



**Satz 1.4 (Zweiseitige Abschätzungen der Greenschen Funktion).**

Auf  $B \times B$  gilt:

$$(23) \quad G_{m,n}(x, y) \sim \begin{cases} |x - y|^{2m-n} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^m d(y)^m}{|x - y|^{2m}} \right\}, & \text{falls } n > 2m; \\ \log \left( 1 + \frac{d(x)^m d(y)^m}{|x - y|^{2m}} \right), & \text{falls } n = 2m; \\ d(x)^{m-\frac{n}{2}} d(y)^{m-\frac{n}{2}} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(y)^{\frac{n}{2}}}{|x - y|^n} \right\}, & \text{falls } n < 2m. \end{cases}$$

**Satz 1.5 (Abschätzungen der Ableitungen der Greenschen Funktion).**

Sei  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  ein Multiindex. Dann gilt auf  $B \times B$ ,

a) falls  $|\alpha| \geq 2m - n$  und  $n$  ungerade, oder falls  $|\alpha| > 2m - n$  und  $n$  gerade:

$$(24) \quad |D_x^\alpha G_{m,n}(x, y)| \preceq \begin{cases} |x - y|^{2m-n-|\alpha|} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^{m-|\alpha|} d(y)^m}{|x - y|^{2m-|\alpha|}} \right\} & \text{für } |\alpha| \leq m, \\ |x - y|^{2m-n-|\alpha|} \min \left\{ 1, \frac{d(y)^m}{|x - y|^m} \right\} & \text{für } |\alpha| \geq m; \end{cases}$$

b) falls  $|\alpha| = 2m - n$  und  $n$  gerade:

$$(25) \quad |D_x^\alpha G_{m,n}(x, y)| \preceq \begin{cases} \log \left( 2 + \frac{d(y)}{|x - y|} \right) \min \left\{ 1, \frac{d(x)^{m-|\alpha|} d(y)^m}{|x - y|^{2m-|\alpha|}} \right\} & \text{für } |\alpha| \leq m, \\ \log \left( 2 + \frac{d(y)}{|x - y|} \right) \min \left\{ 1, \frac{d(y)^m}{|x - y|^m} \right\} & \text{für } |\alpha| \geq m; \end{cases}$$

c) falls  $|\alpha| \leq 2m - n$  und  $n$  ungerade, oder falls  $|\alpha| < 2m - n$  und  $n$  gerade:

$$(26) \quad |D_x^\alpha G_{m,n}(x, y)| \preceq \begin{cases} d(x)^{m-\frac{n}{2}-|\alpha|} d(y)^{m-\frac{n}{2}} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(y)^{\frac{n}{2}}}{|x - y|^n} \right\} & \text{für } |\alpha| \leq m - \frac{n}{2}, \\ d(y)^{2m-n-|\alpha|} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^{m-|\alpha|} d(y)^{n-m+|\alpha|}}{|x - y|^n} \right\} & \text{für } m - \frac{n}{2} \leq |\alpha| \leq m, \\ d(y)^{2m-n-|\alpha|} \min \left\{ 1, \frac{d(y)^{n-m+|\alpha|}}{|x - y|^{n-m+|\alpha|}} \right\} & \text{für } |\alpha| \geq m. \end{cases}$$

**Bemerkung.** Die Greensche Funktion für den Laplace-Operator ( $m = 1, n > 2$ ) erfüllt derartige Abschätzungen in beliebigen beschränkten,  $C^{2,\gamma}$ -glatten Gebieten, s. z.B. [Wid]. Dieses Resultat wird u.a. mit Hilfe des allgemeinen Maximumprinzips und der Harnackschen Ungleichung hergeleitet. Bei Gleichungen höherer Ordnung gehen wir genau umgekehrt vor: Die obigen Abschätzungen werden aus der expliziten Formel

für  $G_{m,n}$  abgeleitet und benutzt, um zumindest noch für kleine Störungen von  $(-\Delta)^m$  Vergleichsprinzipien zu zeigen.

**Beweis von Satz 1.4.** Seien  $x, y \in B$ ; entsprechend Hilfssatz 1.3 unterscheiden wir zwei Fälle.

**1. Fall:**  $|x - y| \leq \frac{1}{2}[XY]$ .

In diesem Fall ist also zu zeigen:

$$(27) \quad G_{m,n}(x, y) \sim \begin{cases} |x - y|^{2m-n}, & \text{falls } n > 2m, \\ \log \left( 1 + \frac{d(x)^m d(y)^m}{|x - y|^{2m}} \right), & \text{falls } n = 2m, \\ d(x)^{m-\frac{n}{2}} d(y)^{m-\frac{n}{2}}, & \text{falls } n < 2m. \end{cases}$$

Zunächst überlegt man sich leicht, daß für

$$a \in [2, \infty) : \quad \int_1^a (v^2 - 1)^{m-1} v^{1-n} dv \sim \int_1^a v^{2m-n-1} dv$$

gilt. Aufgrund der Fallvoraussetzung folgt nun aus der Formel (10) für die Greensche Funktion:

$$(28) \quad \begin{aligned} G_{m,n}(x, y) &\sim |x - y|^{2m-n} \int_1^{[XY]/|x-y|} (v^2 - 1)^{m-1} v^{1-n} dv \\ &\sim |x - y|^{2m-n} \int_1^{[XY]/|x-y|} v^{2m-n-1} dv \\ &\sim \begin{cases} |x - y|^{2m-n}, & \text{falls } n > 2m, \\ \log \left( \frac{[XY]}{|x - y|} \right)^{2m}, & \text{falls } n = 2m, \\ [XY]^{2m-n} - |x - y|^{2m-n} \sim [XY]^{2m-n}, & \text{falls } n < 2m. \end{cases} \end{aligned}$$

Damit ist (27) für  $n > 2m$  schon gezeigt. Um auch im Falle kleiner Dimensionen  $n \leq 2m$  fortfahren zu können, verwenden wir (21) zusammen mit (22). Wir haben also in diesem Falle

$$[XY] \sim d(x) \sim d(y),$$

infolgedessen ist nun (27) auch für  $n < 2m$  offensichtlich. Ist  $n = 2m$ , so benötigen wir darüber hinaus nur noch, daß für jedes feste  $\varepsilon > 0$  gilt:

$$(29) \quad a \in [2, \infty) : \quad \log a \sim \log(1 + \varepsilon a).$$

Damit ist der Fall  $|x - y| \leq \frac{1}{2}[XY]$  vollständig behandelt.

**2. Fall:**  $|x - y| \geq \frac{1}{2}[XY]$ .

In diesem Fall ist wegen  $\frac{d(x)}{|x-y|} \leq 3$ ,  $\frac{d(y)}{|x-y|} \leq 3$ , unabhängig von den Relationen  $n > 2m$ ,  $n = 2m$  bzw.  $n < 2m$ , zu zeigen:

$$(30) \quad G_{m,n}(x, y) \sim |x - y|^{-n} d(x)^m d(y)^m.$$

Wir verwenden wieder Formel (10) für  $G_{m,n}$  und bemerken, daß die obere Integrationsgrenze  $[XY]/|x - y|$  hier im Intervall  $[1, 2]$  variiert. Auf  $[1, 2]$  ist aber  $v^{-n} \sim 1$  und folglich:

$$\begin{aligned} G_{m,n}(x, y) &\sim |x - y|^{2m-n} \int_1^{[XY]/|x-y|} (v^2 - 1)^{m-1} v \, dv \\ &\sim |x - y|^{2m-n} \left( \frac{[XY]^2}{|x - y|^2} - 1 \right)^m = |x - y|^{-n} ([XY]^2 - |x - y|^2)^m \\ &= |x - y|^{-n} ((1 - |x|^2)(1 - |y|^2))^m \sim |x - y|^{-n} d(x)^m d(y)^m. \end{aligned}$$

Der Beweis von (30) und damit von Satz 1.4 ist vollständig erbracht. ■

Entsprechend der Fallunterscheidung  $|x - y| \geq \frac{1}{2}[XY]$  bzw.  $|x - y| \leq \frac{1}{2}[XY]$  zeigen wir die wesentliche Aussage von Satz 1.5 in den folgenden beiden Hilfssätzen.

**Hilfssatz 1.6.** *Auf  $\{(x, y) \in B \times B : |x - y| \geq \frac{1}{2}[XY]\}$  gilt:*

$$(31) \quad |D_x^\alpha G_{m,n}(x, y)| \leq |x - y|^{2m-n-|\alpha|} \left( \frac{d(x)}{|x - y|} \right)^{\max\{m-|\alpha|, 0\}} \left( \frac{d(y)}{|x - y|} \right)^m.$$

**Beweis.** Wir formen den Ausdruck (10) für die Greensche Funktion mit Hilfe der Substitution  $s = 1 - \frac{1}{v^2}$  so um, daß das Randverhalten deutlicher zu erkennen ist:

$$(32) \quad G_{m,n}(x, y) = \frac{k_{m,n}}{2} |x - y|^{2m-n} f_{m,n}(A_{x,y}),$$

wobei

$$(33) \quad f_{m,n}(t) := \int_0^t s^{m-1} (1 - s)^{\frac{n}{2} - m - 1} \, ds,$$

$$(34) \quad A_{x,y} := \frac{[XY]^2 - |x - y|^2}{[XY]^2} = \frac{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}{[XY]^2} \sim \frac{d(x)d(y)}{[XY]^2}.$$

Aufgrund der Voraussetzung des Hilfssatzes ist hier

$$(35) \quad A_{x,y} \leq \frac{3}{4};$$

in diesem Bereich, d.h. für  $t \in [0, \frac{3}{4}]$ , gilt:

$$(36) \quad |f_{m,n}^{(j)}(t)| \preceq t^{\max\{m-j,0\}}.$$

Ferner ist für jeden Multiindex  $\beta \in \mathbb{N}_0^n$  wegen  $d(x) \leq [XY]$ , s. (22):

$$(37) \quad |D_x^\beta A_{x,y}| \preceq d(y)[XY]^{-1-|\beta|}.$$

Die Anwendung einer allgemeinen Produkt- und Kettenregel ergibt nun:

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha G_{m,n}(x,y)| &\preceq \sum_{\beta \leq \alpha} |D_x^{\alpha-\beta} |x-y|^{2m-n}| \cdot |D_x^\beta f_{m,n}(A_{x,y})| \\ &\preceq |x-y|^{2m-n-|\alpha|} \cdot |f_{m,n}(A_{x,y})| \\ &\quad + \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ \beta \neq 0}} |x-y|^{2m-n-|\alpha|+|\beta|} \cdot \sum_{j=1}^{|\beta|} \left\{ |f_{m,n}^{(j)}(A_{x,y})| \cdot \sum_{\substack{j \\ \sum_{i=1}^j \beta^{(i)} = \beta \\ |\beta^{(i)}| \geq 1}} \prod_{i=1}^j |D_x^{\beta^{(i)}} A_{x,y}| \right\} \\ &\preceq |x-y|^{2m-n-|\alpha|} \frac{d(x)^m d(y)^m}{[XY]^{2m}} \\ &\quad + \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ \beta \neq 0}} |x-y|^{2m-n-|\alpha|+|\beta|} \cdot \sum_{j=1}^{|\beta|} \left\{ \left( \frac{d(x)d(y)}{[XY]^2} \right)^{\max\{m-j,0\}} \cdot \frac{d(y)^j}{[XY]^{j+|\beta|}} \right\} \\ &\quad \text{vermittels (34), (36), (37)} \\ &\preceq \sum_{\beta \leq \alpha} |x-y|^{2m-n-|\alpha|} \left( \frac{d(x)}{[XY]} \right)^{\max\{m-|\beta|,0\}} \left( \frac{d(y)}{[XY]} \right)^m \left( \frac{|x-y|}{[XY]} \right)^{|\beta|} \\ &\quad \text{vermittels (22)} \\ &\preceq |x-y|^{2m-n-|\alpha|} \left( \frac{d(x)}{[XY]} \right)^{\max\{m-|\alpha|,0\}} \left( \frac{d(y)}{[XY]} \right)^m \\ &\quad \text{vermittels (22) und (11)}. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aufgrund der Ungleichung (11). ■

**Hilfssatz 1.7.** *Auf  $\{(x,y) \in B \times B : |x-y| \leq \frac{1}{2}[XY]\}$  gilt:*

$$(38) \quad |D_x^\alpha G_{m,n}(x,y)| \preceq \begin{cases} |x-y|^{2m-n-|\alpha|}, & \text{falls } |\alpha| > 2m-n, \\ \log \frac{[XY]}{|x-y|}, & \text{falls } |\alpha| = 2m-n \text{ und } n \text{ gerade,} \\ 1, & \text{falls } |\alpha| = 2m-n \text{ und } n \text{ ungerade,} \\ [XY]^{2m-n-|\alpha|}, & \text{falls } |\alpha| < 2m-n. \end{cases}$$

**Beweis.** Im Gegensatz zum vorhergehenden Hilfssatz 1.6 steht hier nicht das Randverhalten der Ableitungen der Greenschen Funktion zur Diskussion, sondern das Verhalten “nahe der Singularität  $x = y$ ”. Deshalb ist es hier angebracht, die Formel (10) für die Greensche Funktion zunächst auszumultiplizieren und die Integration explizit auszuführen. Dabei tritt unter dem Integral ein Term  $\frac{1}{v}$  genau dann auf, wenn  $n$  gerade und  $n \leq 2m$  ist. Man erhält mit geeigneten Zahlen  $c_j = c_j(m, n) \in \mathbb{R}$ ,  $j = 0, \dots, m$ :

$$(39) \quad G_{m,n}(x, y) = \begin{cases} c_m |x - y|^{2m-n} + \sum_{j=0}^{m-1} c_j [XY]^{2m-n-2j} |x - y|^{2j}, \\ \text{falls } n > 2m \text{ oder } n \text{ ungerade,} \\ c_m |x - y|^{2m-n} \log \frac{[XY]}{|x - y|} + \sum_{j=0}^{m-1} c_j [XY]^{2m-n-2j} |x - y|^{2j}, \\ \text{falls } n \leq 2m \text{ und } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Bei der Differentiation dieser Formel ist zu beachten, daß  $|x - y|^{2j}$  ein Polynom der Ordnung  $2j$  ist, dessen sämtliche Ableitungen der Ordnung  $> 2j$  identisch verschwinden. Ferner benutzen wir für das folgende neben  $|x - y| \leq [XY]$  und  $|D_x^\alpha [XY]^k| \preceq [XY]^{k-|\alpha|}$  noch  $|D_x^\alpha |x - y|^k| \preceq |x - y|^{k-|\alpha|}$ , sofern  $k \notin 2\mathbb{N}$ :

$$(40) \quad |D_x^\alpha G_{m,n}(x, y)| \preceq \begin{cases} |x - y|^{2m-n-|\alpha|} + [XY]^{2m-n-|\alpha|}, \\ \text{falls } n > 2m - |\alpha| \text{ oder } n \text{ ungerade,} \\ |x - y|^{2m-n-|\alpha|} \log \frac{[XY]}{|x - y|} \\ + |x - y|^{2m-n-|\alpha|} + [XY]^{2m-n-|\alpha|}, \\ \text{falls } n \leq 2m - |\alpha| \text{ und } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Damit ist (38) bereits mit Ausnahme des Falles bewiesen, in dem  $n$  gerade und  $n < 2m - |\alpha|$  ist. In diesem Fall verwenden wir  $a \in [1, \infty) \Rightarrow 0 \leq \log a \leq a$ , und wir erhalten aus (40):

$$|D_x^\alpha G_{m,n}(x, y)| \preceq |x - y|^{2m-n-|\alpha|-1} [XY] + [XY]^{2m-n-|\alpha|} \preceq [XY]^{2m-n-|\alpha|}. \quad \blacksquare$$

**Beweis von Satz 1.5.** Seien  $x, y \in B$  beliebig.

**1. Fall:**  $|x - y| \leq \frac{1}{2}[XY]$ .

Hier ist  $d(x) \sim d(y)$  gemäß Hilfssatz 1.3, und für  $p, q \geq 0$  gilt:

$$\min \left\{ 1, \left( \frac{d(x)}{|x - y|} \right)^p \left( \frac{d(y)}{|x - y|} \right)^q \right\} \sim 1.$$

Wir haben zu zeigen:

$$|D_x^\alpha G_{m,n}(x,y)| \preceq \begin{cases} |x-y|^{2m-n-|\alpha|}, & \text{falls } |\alpha| > 2m-n, \\ \log\left(2 + \frac{d(y)}{|x-y|}\right), & \text{falls } |\alpha| = 2m-n \text{ und } n \text{ gerade,} \\ 1, & \text{falls } |\alpha| = 2m-n \text{ und } n \text{ ungerade,} \\ d(y)^{2m-n-|\alpha|}, & \text{falls } |\alpha| < 2m-n. \end{cases}$$

Diese Abschätzung folgt leicht aus (38), denn in diesem Fall ist gemäß (21) und (22):  $d(x) \sim d(y) \sim [XY]$ . Für den logarithmischen Term beachte man ferner (29), danach ist wegen  $[XY]/|x-y| \geq 2$  und  $[XY] \leq 5d(y)$ :

$$\log \frac{[XY]}{|x-y|} \preceq \log\left(1 + \frac{1}{5} \frac{[XY]}{|x-y|}\right) \leq \log\left(2 + \frac{d(y)}{|x-y|}\right).$$

**2. Fall:**  $|x-y| \geq \frac{1}{2}[XY]$ .

Gemäß Hilfssatz 1.3 ist in diesem Fall für  $p, q \geq 0$ :

$$\log\left(2 + \frac{d(y)}{|x-y|}\right) \sim 1,$$

$$\min\left\{1, \left(\frac{d(x)}{|x-y|}\right)^p \left(\frac{d(y)}{|x-y|}\right)^q\right\} \sim \left(\frac{d(x)}{|x-y|}\right)^p \left(\frac{d(y)}{|x-y|}\right)^q.$$

Die Abschätzungen (24)-(26) folgen nun simultan unmittelbar aus Hilfssatz 1.6. ■

### 1.1.2 Ein 3-G-Theorem

Das zentrale Resultat dieses Abschnitts ist das folgende 3-G-Theorem, aus dem sich die eingangs erwähnte Abschätzung (9) unmittelbar ergibt.

**Satz 1.8.** *Sei  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  ein Multiindex. Dann gilt auf  $B \times B \times B$ :*

$$(41) \quad \frac{G_{m,n}(x,z) |D_z^\alpha G_{m,n}(z,y)|}{G_{m,n}(x,y)} \preceq \begin{cases} |x-z|^{2m-n-|\alpha|} + |y-z|^{2m-n-|\alpha|}, \\ \quad \text{falls } |\alpha| > 2m-n, \\ \log\left(\frac{3}{|x-z|}\right) + \log\left(\frac{3}{|y-z|}\right), \\ \quad \text{falls } |\alpha| = 2m-n \text{ und } n \text{ gerade,} \\ 1, \quad \text{falls } |\alpha| < 2m-n \text{ oder} \\ \quad \text{falls } |\alpha| = 2m-n \text{ und } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Der Beweis dieses Satzes ist relativ technisch. Deshalb stellen wir zunächst einige immer wieder benötigte Hilfssätze zusammen.

**Hilfssatz 1.9.** Für  $s, t > 0$  gilt:

$$(42) \quad \frac{\log(1+t)}{\log(1+s)} \leq 1 + \frac{t}{s}.$$

**Beweis.** Für  $s > 0$  und  $\alpha \geq 1$  folgt aus der Konkavität des Logarithmus  $\log(1+s) = \log(\frac{1}{\alpha}(1+\alpha s) + (1-\frac{1}{\alpha}) \cdot 1) \geq \frac{1}{\alpha} \log(1+\alpha s)$ , d.h.  $\log(1+\alpha s)/\log(1+s) \leq \alpha$ . Für  $0 < \alpha \leq 1$  ist offensichtlich  $\log(1+\alpha s) \leq \log(1+s)$ , insgesamt ist also für  $s, \alpha > 0$ :

$$\frac{\log(1+\alpha s)}{\log(1+s)} \leq 1 + \alpha.$$

Die Behauptung (42) folgt nun durch die Setzung  $\alpha = \frac{t}{s}$ . ■

**Hilfssatz 1.10.** Seien  $p, q, r \geq 0$ ,  $r \leq p+q$ . Ferner sei  $s \in \mathbb{R}$  mit  $\frac{r}{2} - p \leq s \leq q - \frac{r}{2}$ . Dann gilt auf  $B \times B$ :

$$(43) \quad \min \left\{ 1, \left( \frac{d(x)}{|x-y|} \right)^p \left( \frac{d(y)}{|x-y|} \right)^q \right\} \preceq \left( \frac{d(y)}{d(x)} \right)^s \min \left\{ 1, \frac{d(x)d(y)}{|x-y|^2} \right\}^{\frac{r}{2}}.$$

**Beweis. 1. Fall:**  $|x-y| \geq \frac{1}{2}[XY]$ . Wiederholte Anwendung von Hilfssatz 1.3 ergibt:

$$\begin{aligned} & \min \left\{ 1, \left( \frac{d(x)}{|x-y|} \right)^p \left( \frac{d(y)}{|x-y|} \right)^q \right\} \sim \left( \frac{d(x)}{|x-y|} \right)^p \left( \frac{d(y)}{|x-y|} \right)^q \\ & = \left( \frac{d(y)}{d(x)} \right)^s \left( \frac{d(x)d(y)}{|x-y|^2} \right)^{\frac{r}{2}} \left( \frac{d(x)}{|x-y|} \right)^{p+s-\frac{r}{2}} \left( \frac{d(y)}{|x-y|} \right)^{q-s-\frac{r}{2}} \\ & \preceq \left( \frac{d(y)}{d(x)} \right)^s \min \left\{ 1, \frac{d(x)d(y)}{|x-y|^2} \right\}^{\frac{r}{2}}. \end{aligned}$$

**2. Fall:**  $|x-y| \leq \frac{1}{2}[XY]$ . In diesem Fall zeigt Hilfssatz 1.3:

$$\min \left\{ 1, \left( \frac{d(x)}{|x-y|} \right)^p \left( \frac{d(y)}{|x-y|} \right)^q \right\} \sim 1, \quad d(x) \sim d(y). \quad \blacksquare$$

**Hilfssatz 1.11.** Seien  $p, q \geq 0$ , dann gilt auf  $B \times B$ :

$$(44) \quad [XY] \sim d(x) + d(y) + |x-y|,$$

$$(45) \quad \min \left\{ 1, \frac{d(y)}{|x-y|} \right\} \sim \min \left\{ 1, \frac{d(y)}{d(x)}, \frac{d(y)}{|x-y|} \right\},$$

$$(46) \quad \min \left\{ 1, \frac{d(x)d(y)}{|x-y|^2} \right\} \sim \min \left\{ \frac{d(x)}{d(y)}, \frac{d(y)}{d(x)}, \frac{d(x)d(y)}{|x-y|^2} \right\},$$

$$(47) \quad \min \left\{ 1, \frac{d(x)^p d(y)^q}{|x-y|^{p+q}} \right\} \sim \min \left\{ 1, \frac{d(x)^p}{|x-y|^p}, \frac{d(y)^q}{|x-y|^q}, \frac{d(x)^p d(y)^q}{|x-y|^{p+q}} \right\},$$

$$(48) \quad \min \left\{ 1, \frac{d(x)^p d(y)^q}{|x-y|^{p+q}} \right\} \sim \min \left\{ 1, \frac{d(x)}{|x-y|} \right\}^p \min \left\{ 1, \frac{d(y)}{|x-y|} \right\}^q;$$

und falls zusätzlich  $p + q > 0$ :

$$(49) \quad \log \left( 1 + \frac{d(x)^p d(y)^q}{|x-y|^{p+q}} \right) \sim \log \left( 2 + \frac{d(y)}{|x-y|} \right) \min \left\{ 1, \frac{d(x)^p d(y)^q}{|x-y|^{p+q}} \right\}.$$

**Beweis.** Zu (44): Aus (11) und (22) folgt “ $\succeq$ ”. Andererseits ist  $[XY]^2 - |x-y|^2 = (1-|x|^2)(1-|y|^2) \leq 4d(x)d(y) \leq 2d(x)^2 + 2d(y)^2$ , damit gilt auch “ $\preceq$ ”.

Zu (45): Hier ist “ $\succeq$ ” offensichtlich, und “ $\preceq$ ” folgt aus Hilfssatz 1.10, indem man dort  $r = p = 0$  und  $q = s = 1$  betrachtet.

Zu (46): Aus  $\min\{t, \frac{1}{t}\} \leq 1$  für  $t > 0$  folgt “ $\succeq$ ”. Hilfssatz 1.10 mit  $r = 0$ ,  $p = q = 1$  und mit  $s = 1$  bzw.  $s = -1$  zeigt “ $\preceq$ ”.

Zu (47): “ $\succeq$ ” ist offensichtlich und “ $\preceq$ ” folgt aus (48). (48) folgt mit Hilfe der Fallunterscheidung  $|x-y| \geq \frac{1}{2}[XY]$  und  $|x-y| \leq \frac{1}{2}[XY]$  direkt aus Hilfssatz 1.3.

Zu (49): Zunächst zum Fall  $|x-y| \geq \frac{1}{2}[XY]$ . Hier ist zu beachten, daß für festes  $M > 0$  auf  $[0, M]$  gilt:  $\log(1+x) \sim x$  und  $\log(2+x) \sim 1$ . Nun zum Fall  $|x-y| \leq \frac{1}{2}[XY]$ , hier ist zu zeigen:  $\log(1 + \frac{d(x)^p d(y)^q}{|x-y|^{p+q}}) \sim \log(2 + \frac{d(y)}{|x-y|})$ . Aufgrund von Hilfssatz 1.3 ist  $d(x) \sim d(y)$ , und unter Beachtung von (29) folgt weiter:

$$\begin{aligned} \log \left( 1 + \frac{d(x)^p d(y)^q}{|x-y|^{p+q}} \right) &\sim \log \left( 1 + \left( \frac{d(y)}{|x-y|} \right)^{p+q} \right) \\ &\sim \log \left( \left( 2 + \frac{d(y)}{|x-y|} \right)^{p+q} \right) \sim \log \left( 2 + \frac{d(y)}{|x-y|} \right). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Hilfssatz 1.12.** Auf  $B \times B \times B$  gilt:

$$(50) \quad Q(x, y, z) := \frac{\min \left\{ 1, \frac{d(x)d(z)}{|x-z|^2} \right\} \min \left\{ 1, \frac{d(z)d(y)}{|z-y|^2} \right\}}{\min \left\{ 1, \frac{d(x)d(y)}{|x-y|^2} \right\}} \preceq 1,$$

$$(51) \quad R(x, y, z) := \frac{\min \left\{ 1, \frac{d(x)d(z)}{|x-z|^2} \right\} \min \left\{ 1, \frac{d(y)}{|z-y|} \right\}}{\min \left\{ 1, \frac{d(x)d(y)}{|x-y|^2} \right\}} \preceq 1 + \frac{|y-z|}{|x-z|},$$

$$(52) \quad S(x, y, z) := \frac{\log \left( 1 + \frac{d(x)d(z)}{|x-z|^2} \right) \min \left\{ 1, \frac{d(y)}{|z-y|} \right\}}{\log \left( 1 + \frac{d(x)d(y)}{|x-y|^2} \right)} \preceq 1 + \frac{|y-z|}{|x-z|},$$

$$(53) \quad T(x, y, z) := \frac{|x-y|}{|x-z||z-y|} \leq \frac{1}{|x-z|} + \frac{1}{|z-y|}.$$

**Beweis.** Die Abschätzung (53) ist eine unmittelbare Konsequenz der Dreiecksungleichung. Zum Beweis der anderen Abschätzungen nehmen wir wieder die übliche Fallunterscheidung vor.

**1. Fall:**  $|x-y| \geq \frac{1}{2}[XY]$ . Dann gilt gemäß Hilfssatz 1.3:

$$\min \left\{ 1, \frac{d(x)d(y)}{|x-y|^2} \right\} \sim \log \left( 1 + \frac{d(x)d(y)}{|x-y|^2} \right) \sim \frac{d(x)d(y)}{|x-y|^2},$$



und eine weitere Fallunterscheidung bezüglich  $z$  erscheint unumgänglich.

Sei zunächst  $|x - z| \geq \frac{1}{2}|x - y|$ , dann ergibt (46) bzw. (45) bzw.  $\log 1 + x \leq x$ :

$$\left. \begin{array}{l} Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \\ S(x, y, z) \end{array} \right\} \preceq \frac{|x - y|^2}{d(x)d(y)} \cdot \frac{d(x)d(z)}{|x - z|^2} \cdot \frac{d(y)}{d(z)} \preceq 1.$$

Sei nun  $|x - z| \leq \frac{1}{2}|x - y|$ , dann ist  $|y - z| \geq |y - x| - |x - z| \geq \frac{1}{2}|x - y|$ . Die Anwendung von (46) bzw. (45) bzw. (49) ergibt dann:

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) &\preceq \frac{|x - y|^2}{d(x)d(y)} \cdot \frac{d(x)}{d(z)} \cdot \frac{d(z)d(y)}{|y - z|^2} \preceq 1, \\ R(x, y, z) &\preceq \frac{|x - y|^2}{d(x)d(y)} \cdot \frac{d(x)}{|x - z|} \cdot \frac{d(y)}{|y - z|} \preceq \frac{|x - y|}{|x - z|} \preceq 1 + \frac{|y - z|}{|x - z|}, \\ S(x, y, z) &\preceq \frac{|x - y|^2}{d(x)d(y)} \cdot \log \left( 2 + \frac{d(x)}{|x - z|} \right) \cdot \min \left\{ 1, \frac{d(x)}{|x - z|} \right\} \cdot \frac{d(y)}{|y - z|} \\ &\preceq \frac{|x - y|}{|x - z|} \preceq 1 + \frac{|y - z|}{|x - z|}. \end{aligned}$$

**2. Fall:**  $|x - y| \leq \frac{1}{2}[XY]$ . Hier ist gemäß Hilfssatz 1.3

$$(54) \quad \min \left\{ 1, \frac{d(x)d(y)}{|x - y|^2} \right\} \sim 1,$$

d.h. die Nenner von  $Q$  und  $R$  sind nach unten beschränkt. Indem man die Zähler durch 1 abschätzt, folgen (50) und (51). Um  $S$  abzuschätzen, verwenden wir (54), (49) sowie Hilfssatz 1.9:

$$\begin{aligned} S(x, y, z) &\preceq \frac{\log \left( 2 + \frac{d(x)}{|x - z|} \right)}{\log \left( 2 + \frac{d(x)}{|x - y|} \right)} \cdot 1 \preceq 1 + \frac{1 + \frac{d(x)}{|x - z|}}{1 + \frac{d(x)}{|x - y|}} \\ &\leq 2 + \frac{\frac{d(x)}{|x - z|}}{1 + \frac{d(x)}{|x - y|}} \leq 2 + \frac{|x - y|}{|x - z|} \leq 3 + \frac{|y - z|}{|x - z|}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Beweis des 3-G-Theorems, Satz 1.8.** Entsprechend den Sätzen 1.4 und 1.5 ergeben sich notwendigerweise zahlreiche Fallunterscheidungen.

**Der Fall:**  $n > 2m$ .

$$\begin{aligned} &\frac{G_{m,n}(x, z) |D_z^\alpha G_{m,n}(z, y)|}{G_{m,n}(x, y)} \\ &\preceq \frac{|x - y|^{n-2m} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^m d(z)^m}{|x - z|^{2m}} \right\} \min \left\{ 1, \left( \frac{d(z)}{|z - y|} \right)^{\max\{m - |\alpha|, 0\}} \left( \frac{d(y)}{|z - y|} \right)^m \right\}}{|x - z|^{n-2m} |z - y|^{n+|\alpha|-2m} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^m d(y)^m}{|x - y|^{2m}} \right\}} \end{aligned}$$

$$\asymp \frac{1}{|y-z|^{|\alpha|}} (T(x, y, z))^{n-2m} (Q(x, y, z))^{\max\{m-|\alpha|, 0\}} (R(x, y, z))^{\min\{|\alpha|, m\}}$$

vermittels (48)

$$\asymp \frac{1}{|y-z|^{|\alpha|}} \left( \frac{1}{|x-z|} + \frac{1}{|y-z|} \right)^{n-2m} \left( 1 + \frac{|y-z|}{|x-z|} \right)^{\min\{|\alpha|, m\}}$$

vermittels Hilfssatz 1.12

$$\begin{aligned} \asymp & |x-z|^{2m-n}|y-z|^{-|\alpha|} + |y-z|^{2m-n-|\alpha|} \\ & + |x-z|^{2m-n-\min\{|\alpha|, m\}}|y-z|^{-|\alpha|+\min\{|\alpha|, m\}} \\ & + |x-z|^{-\min\{|\alpha|, m\}}|y-z|^{2m-n-|\alpha|+\min\{|\alpha|, m\}} \end{aligned}$$

$$\asymp |x-z|^{2m-n-|\alpha|} + |y-z|^{2m-n-|\alpha|}.$$

**Der Fall:**  $n = 2m$  und  $\alpha = 0$ .

$$\begin{aligned}
& \frac{G_{m,n}(x, z)G_{m,n}(z, y)}{G_{m,n}(x, y)} \\
& \preceq \frac{\log\left(2 + \frac{d(x)}{|x-z|}\right) \log\left(2 + \frac{d(y)}{|y-z|}\right) \min\left\{1, \frac{d(x)^m d(z)^m}{|x-z|^{2m}}\right\} \min\left\{1, \frac{d(z)^m d(y)^m}{|z-y|^{2m}}\right\}}{\max\left\{\log\left(2 + \frac{d(x)}{|x-y|}\right), \log\left(2 + \frac{d(y)}{|x-y|}\right)\right\} \min\left\{1, \frac{d(x)^m d(y)^m}{|x-y|^{2m}}\right\}} \\
& \hspace{10em} \text{vermittels (49)} \\
& \preceq \frac{\log\left(2 + \frac{d(x)}{|x-z|}\right) \log\left(2 + \frac{d(y)}{|y-z|}\right)}{\max\left\{\log\left(2 + \frac{d(x)}{|x-y|}\right), \log\left(2 + \frac{d(y)}{|x-y|}\right)\right\}} (Q(x, y, z))^m =: (\star_1).
\end{aligned}$$

Ist  $|x-z| \geq \frac{1}{2}|x-y|$ , dann gilt  $\log\left(2 + \frac{d(x)}{|x-z|}\right) \preceq \log\left(2 + \frac{d(x)}{|x-y|}\right)$ . Gilt hingegen  $|x-z| \leq \frac{1}{2}|x-y|$ , dann ist umgekehrt  $|y-z| \geq |x-y| - |x-z| \geq \frac{1}{2}|x-y|$  und infolgedessen  $\log\left(2 + \frac{d(y)}{|y-z|}\right) \preceq \log\left(2 + \frac{d(y)}{|x-y|}\right)$ . Insgesamt folgt unter Zuhilfenahme von Hilfssatz 1.12, (50):

$$(\star_1) \preceq \log\left(2 + \frac{d(x)}{|x-z|}\right) + \log\left(2 + \frac{d(y)}{|y-z|}\right) \preceq \log\left(\frac{3}{|x-z|}\right) + \log\left(\frac{3}{|y-z|}\right).$$

**Der Fall:**  $n = 2m$  und  $|\alpha| > 0$ .

$$\begin{aligned}
& \frac{G_{m,n}(x, z) |D_z^\alpha G_{m,n}(z, y)|}{G_{m,n}(x, y)} \\
& \preceq \frac{\log\left(1 + \frac{d(x)d(z)}{|x-z|^2}\right) \min\left\{1, \frac{d(x)^{m-1} d(z)^{m-1}}{|x-z|^{2m-2}}\right\} \min\left\{1, \frac{d(z)^{\max\{m-|\alpha|, 0\}} d(y)^m}{|z-y|^{m+\max\{m-|\alpha|, 0\}}}\right\}}{\log\left(1 + \frac{d(x)d(y)}{|x-y|^2}\right) |y-z|^{|\alpha|} \min\left\{1, \frac{d(x)^{m-1} d(y)^{m-1}}{|x-y|^{2m-2}}\right\}} \\
& \preceq |y-z|^{-|\alpha|} S(x, y, z) (Q(x, y, z))^{\max\{m-|\alpha|, 0\}} (R(x, y, z))^{\min\{|\alpha|, m\}-1} \\
& \hspace{10em} \text{gemäß (48)} \\
& \preceq |y-z|^{-|\alpha|} \left(1 + \frac{|y-z|}{|x-z|}\right)^{\min\{|\alpha|, m\}} \hspace{3em} \text{gemäß Hilfssatz 1.12} \\
& \preceq |x-z|^{-|\alpha|} + |y-z|^{-|\alpha|}.
\end{aligned}$$

**Der Fall:**  $n < 2m$  und  $|\alpha| < 2m - n$ ,

**oder:**  $n < 2m$  und  $|\alpha| \leq 2m - n$  und  $n$  ungerade.

Zunächst schätzen wir (26) durch einen einheitlichen Ausdruck nach oben ab, der für das folgende noch ausreichend starke Informationen enthält:

$$(55) \quad |D_x^\alpha G_{m,n}(x, y)| \preceq d(x)^{m-\frac{n}{2}-|\alpha|} d(y)^{m-\frac{n}{2}} \min\left\{1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(y)^{\frac{n}{2}}}{|x-y|^n}\right\}.$$

Aus Satz 1.5.c folgt nämlich im Falle  $|x - y| \geq \frac{1}{2}[XY]$  mit Hilfe von (17)

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha G_{m,n}(x, y)| &\preceq d(x)^{m-|\alpha|} d(y)^m |x - y|^{-n} \left( \frac{d(x)}{|x - y|} \right)^{\max\{|\alpha| - m, 0\}} \\ &\preceq d(x)^{m-|\alpha|} d(y)^m |x - y|^{-n} \end{aligned}$$

und im Falle  $|x - y| \leq \frac{1}{2}[XY]$  mit Hilfe von (20) und (19):

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha G_{m,n}(x, y)| &\preceq d(x)^{m-\frac{n}{2}-|\alpha|} d(y)^{m-\frac{n}{2}} \left( \frac{d(x)}{d(y)} \right)^{\max\{|\alpha| + \frac{n}{2} - m, 0\}} \\ &\preceq d(x)^{m-\frac{n}{2}-|\alpha|} d(y)^{m-\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

und damit (55).

Nun benutzen wir neben (55) noch den Satz 1.4, um den 3-G-Quotienten in diesem Fall abzuschätzen:

$$\begin{aligned} &\frac{G_{m,n}(x, z) |D_z^\alpha G_{m,n}(z, y)|}{G_{m,n}(x, y)} \\ &\preceq \frac{d(x)^{m-\frac{n}{2}} d(z)^{2m-n-|\alpha|} d(y)^{m-\frac{n}{2}} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(z)^{\frac{n}{2}}}{|x-z|^n} \right\} \min \left\{ 1, \frac{d(z)^{\frac{n}{2}} d(y)^{\frac{n}{2}}}{|z-y|^n} \right\}}{d(x)^{m-\frac{n}{2}} d(y)^{m-\frac{n}{2}} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(y)^{\frac{n}{2}}}{|x-y|^n} \right\}} \\ &\preceq d(z)^{2m-n-|\alpha|} (Q(x, y, z))^{\frac{n}{2}} \preceq 1 \quad \text{aufgrund von (50)}. \end{aligned}$$

**Der Fall:**  $n < 2m$  und  $|\alpha| = 2m - n$  und  $n$  gerade.

Wir wenden Hilfssatz 1.10 mit  $p = \max\{m - |\alpha|, 0\}$ ,  $q = m$ ,  $s = m - \frac{n}{2}$  und  $r = n$  an. In unserem Fall ist wegen  $|\alpha| = 2m - n$ :  $p + q = \max\{n - m, 0\} + m = \max\{n, m\} \geq n = r$ ;  $q - \frac{r}{2} = m - \frac{n}{2} = s = \frac{n}{2} - (n - m) \geq \frac{r}{2} - p$ .

$$\begin{aligned} &\frac{G_{m,n}(x, z) |D_z^\alpha G_{m,n}(z, y)|}{G_{m,n}(x, y)} \\ &\preceq \frac{d(x)^{m-\frac{n}{2}} d(z)^{m-\frac{n}{2}} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(z)^{\frac{n}{2}}}{|x-z|^n} \right\}}{d(x)^{m-\frac{n}{2}} d(y)^{m-\frac{n}{2}} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(y)^{\frac{n}{2}}}{|x-y|^n} \right\}} \\ &\quad \cdot \log \left( 2 + \frac{d(y)}{|z - y|} \right) \min \left\{ 1, \left( \frac{d(z)}{|z - y|} \right)^{\max\{m-|\alpha|, 0\}} \left( \frac{d(y)}{|z - y|} \right)^m \right\} \\ &\preceq \frac{\log \left( 2 + \frac{d(y)}{|z - y|} \right) d(z)^{m-\frac{n}{2}} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(z)^{\frac{n}{2}}}{|x-z|^n} \right\} \left( \frac{d(y)}{d(z)} \right)^{m-\frac{n}{2}} \min \left\{ 1, \frac{d(z)^{\frac{n}{2}} d(y)^{\frac{n}{2}}}{|z-y|^n} \right\}}{d(y)^{m-\frac{n}{2}} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(y)^{\frac{n}{2}}}{|x-y|^n} \right\}} \\ &\preceq \log \left( 2 + \frac{d(y)}{|z - y|} \right) (Q(x, y, z))^{\frac{n}{2}} \preceq \log \left( \frac{3}{|y - z|} \right) \quad \text{vermittels (50)}. \end{aligned}$$

**Der Fall:**  $n < 2m$  und  $|\alpha| > 2m - n$ .

$$\begin{aligned}
& \frac{G_{m,n}(x, z) |D_z^\alpha G_{m,n}(z, y)|}{G_{m,n}(x, y)} \\
& \preceq \frac{d(x)^{m-\frac{n}{2}} d(z)^{m-\frac{n}{2}} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(z)^{\frac{n}{2}}}{|x-z|^n} \right\}}{d(x)^{m-\frac{n}{2}} d(y)^{m-\frac{n}{2}} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(y)^{\frac{n}{2}}}{|x-y|^n} \right\}} \\
& \cdot |z-y|^{2m-n-|\alpha|} \min \left\{ 1, \left( \frac{d(z)}{|z-y|} \right)^{\max\{m-|\alpha|, 0\}} \left( \frac{d(y)}{|z-y|} \right)^m \right\} \\
& = |y-z|^{2m-n-|\alpha|} \frac{d(z)^{m-\frac{n}{2}} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(z)^{\frac{n}{2}}}{|x-z|^n} \right\}}{d(y)^{m-\frac{n}{2}} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(y)^{\frac{n}{2}}}{|x-y|^n} \right\}} \\
& \cdot \min \left\{ 1, \left( \frac{d(z)}{|z-y|} \right)^{\max\{m-|\alpha|, 0\}} \left( \frac{d(y)}{|z-y|} \right)^m \right\} =: (\star_2).
\end{aligned}$$

Zur weiteren Behandlung dieses Ausdrucks erscheint eine erneute Fallunterscheidung unvermeidlich.

Sei zunächst (zusätzlich)  $|\alpha| \leq 2m - \frac{n}{2}$ .

Auf den ‘‘gefährlichsten’’ Term in  $(\star_2)$  wenden wir (48) aus Hilfssatz 1.11 an. Dabei ist zu beachten, daß sowohl  $|\alpha| + n - 2m > 0$  als auch  $3m - n - |\alpha| \geq 3m - n - 2m + \frac{n}{2} = m - \frac{n}{2} > 0$  gilt. In einem zweiten Schritt benutzen wir Hilfssatz 1.10 mit  $p = \max\{m - |\alpha|, 0\} \geq 0$ ,  $q = 3m - n - |\alpha| \geq 0$ ,  $r = 4m - n - 2|\alpha| \geq 0$  und  $s = m - \frac{n}{2}$ . Offenbar ist  $p + q - r = \max\{|\alpha| - m, 0\} \geq 0$ ,  $q - \frac{r}{2} = s$ ,  $\frac{r}{2} - p = m - \frac{n}{2} - \max\{|\alpha| - m, 0\} \leq s$ .

$$\begin{aligned}
& \min \left\{ 1, \left( \frac{d(z)}{|z-y|} \right)^{\max\{m-|\alpha|, 0\}} \left( \frac{d(y)}{|z-y|} \right)^m \right\} \\
& \sim \min \left\{ 1, \frac{d(y)}{|y-z|} \right\}^{|\alpha|+n-2m} \min \left\{ 1, \left( \frac{d(z)}{|z-y|} \right)^{\max\{m-|\alpha|, 0\}} \left( \frac{d(y)}{|z-y|} \right)^{3m-n-|\alpha|} \right\} \\
& \preceq \min \left\{ 1, \frac{d(y)}{|y-z|} \right\}^{|\alpha|+n-2m} \left( \frac{d(y)}{d(z)} \right)^{m-\frac{n}{2}} \min \left\{ 1, \frac{d(z)d(y)}{|z-y|^2} \right\}^{2m-\frac{n}{2}-|\alpha|}.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Abschätzung sowie von Hilfssatz 1.12 erhalten wir weiter:

$$\begin{aligned}
(\star_2) & \preceq |y-z|^{2m-n-|\alpha|} (Q(x, y, z))^{2m-\frac{n}{2}-|\alpha|} (R(x, y, z))^{|\alpha|+n-2m} \\
& \preceq |y-z|^{2m-n-|\alpha|} \left( 1 + \frac{|y-z|}{|x-z|} \right)^{|\alpha|+n-2m} \\
& \preceq |y-z|^{2m-n-|\alpha|} + |x-z|^{2m-n-|\alpha|}.
\end{aligned}$$

Sei nun (zusätzlich)  $|\alpha| > 2m - \frac{n}{2}$ .

Hier ist der ‘‘gefahrlische’’ Term aus  $(\star_2)$  anders zu behandeln. Offensichtlich ist  $|\alpha| > m + (m - \frac{n}{2}) > m$ . Wir verwenden wiederholt Hilfssatz 1.11 und beachten dabei ebenfalls  $\frac{n}{2} < m$ .

$$\begin{aligned} & \min \left\{ 1, \left( \frac{d(z)}{|z-y|} \right)^{\max\{m-|\alpha|, 0\}} \left( \frac{d(y)}{|z-y|} \right)^m \right\} \sim \min \left\{ 1, \left( \frac{d(y)}{|z-y|} \right)^m \right\} \\ & \sim \min \left\{ 1, \frac{d(y)}{|y-z|} \right\}^{\frac{n}{2}} \min \left\{ 1, \frac{d(y)}{|z-y|} \right\}^{m-\frac{n}{2}} \\ & \preceq \min \left\{ 1, \frac{d(y)}{|y-z|} \right\}^{\frac{n}{2}} \left( \frac{d(y)}{d(z)} \right)^{m-\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Abschätzung sowie von Hilfssatz 1.12 folgern wir weiter:

$$\begin{aligned} (\star_2) & \preceq |y-z|^{2m-n-|\alpha|} (R(x, y, z))^{\frac{n}{2}} \preceq |y-z|^{2m-n-|\alpha|} \left( 1 + \frac{|y-z|}{|x-z|} \right)^{\frac{n}{2}} \\ & \preceq |y-z|^{2m-n-|\alpha|} + |y-z|^{2m-\frac{n}{2}-|\alpha|} |x-z|^{-\frac{n}{2}} \\ & \preceq |y-z|^{2m-n-|\alpha|} + |x-z|^{2m-n-|\alpha|}. \end{aligned}$$

Um im letzten Schritt die Youngsche Ungleichung verwenden zu können, wird die Voraussetzung dieses Falles,  $2m - \frac{n}{2} - |\alpha| < 0$ , benötigt. ■

### 1.1.3 Das Storungsergebnis

Mit Hilfe der nun bereitstehenden Abschätzungen wird ein Beweis des zentralen Satzes 1.1 nicht mehr schwerfallen. Wir schreiben das Randwertproblem (8) in der Form

$$(56) \quad \begin{cases} ((-\Delta)^m + \mathcal{A})u = f & \text{in } B, \\ D^\alpha u|_{\partial B} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m-1, \end{cases}$$

wobei wir

$$\mathcal{A}u := \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} b_\alpha(\cdot) D^\alpha u(\cdot), \quad b_\alpha \in C^0(\overline{B}),$$

setzen. Wir erinnern an den zu Beginn des Abschnitts 1.1.1 eingeführten Greenschen Operator  $\mathcal{G}_{m,n}$  zum Randwertproblem (56) mit  $\mathcal{A} = 0$ . Um Satz 1.1 zu beweisen, wollen wir die Lösung von (56) in der Form

$$u = (\mathcal{I} + \mathcal{G}_{m,n}\mathcal{A})^{-1} \mathcal{G}_{m,n}f$$

darstellen und

$$(\mathcal{I} + \mathcal{G}_{m,n}\mathcal{A})^{-1} \mathcal{G}_{m,n} \geq \frac{1}{C} \mathcal{G}_{m,n}$$

abschätzen. Dabei verwenden wir

**Definition 1.2.** Für zwei Operatoren  $\mathcal{S}, \mathcal{T} : L^p(B) \rightarrow L^p(B)$  schreiben wir

$$\mathcal{S} \geq \mathcal{T},$$

falls  $\mathcal{S}f \geq \mathcal{T}f$  für alle  $f \in L^p(B)$  mit  $f \geq 0$  gilt.

**Hilfssatz 1.13.** Sei  $p > 1$ .  $\mathcal{G}_{m,n}\mathcal{A} : W^{2m,p}(B) \cap W_0^{m,p}(B) \rightarrow W^{2m,p}(B) \cap W_0^{m,p}(B)$  ist ein beschränkter linearer Operator. Ferner existiert ein  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(m, n) > 0$  derart, daß gilt:

Ist  $\|b_\alpha\|_{C^0(\bar{B})} \leq \varepsilon_1$  für alle  $|\alpha| \leq 2m - 1$ , so ist  $\mathcal{I} + \mathcal{G}_{m,n}\mathcal{A} : W^{2m,p}(B) \cap W_0^{m,p}(B) \rightarrow W^{2m,p}(B) \cap W_0^{m,p}(B)$  beschränkt invertierbar. Das Randwertproblem (56) hat zu jedem  $f \in L^p(B)$  genau eine Lösung, die durch

$$(57) \quad u = (\mathcal{I} + \mathcal{G}_{m,n}\mathcal{A})^{-1} \mathcal{G}_{m,n}f$$

gegeben wird. Der Greensche Operator des Randwertproblems (56)

$$(\mathcal{I} + \mathcal{G}_{m,n}\mathcal{A})^{-1} \mathcal{G}_{m,n} : L^p(B) \rightarrow W^{2m,p}(B) \cap W_0^{m,p}(B) \hookrightarrow L^p(B)$$

ist kompakt.

**Beweis.** Der Beweis folgt unmittelbar aus der  $L^p$ -Theorie für das Dirichletproblem zu  $(-\Delta)^m$ , s. [ADN]:  $\mathcal{G}_{m,n} : L^p(B) \rightarrow W^{2m,p}(B) \cap W_0^{m,p}(B)$  ist ein beschränkter linearer Operator. ■

Wir untersuchen nun den Greenschen Operator zum Randwertproblem (56) mit Hilfe einer Neumannschen Reihe. Satz 1.1 folgt dann mit Hilfe elliptischer Regularitätstheorie [ADN] und einfacher Approximationsargumente unmittelbar aus dem folgenden Resultat:

**Satz 1.14.** Sei  $p > 1$ . Es gibt ein  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m, n) > 0$  derart, daß gilt:

Ist  $\|b_\alpha\|_{C^0(\bar{B})} \leq \varepsilon_0$  für alle  $|\alpha| \leq 2m - 1$ , so existiert der Greensche Operator  $\mathcal{G}_{m,n,\mathcal{A}} := (\mathcal{I} + \mathcal{G}_{m,n}\mathcal{A})^{-1} \mathcal{G}_{m,n} : L^p(B) \rightarrow W^{2m,p}(B) \cap W_0^{m,p}(B)$  zum Randwertproblem (56). Er wird durch eine Greensche Funktion  $G_{m,n,\mathcal{A}} : B \times B \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  erzeugt:

$$(\mathcal{G}_{m,n,\mathcal{A}}f)(x) = \int_B G_{m,n,\mathcal{A}}(x, y) f(y) dy.$$

Ferner gibt es eine Konstante  $C = C(m, n) > 0$ , so daß die Abschätzungen gelten:

$$(58) \quad \frac{1}{C} \mathcal{G}_{m,n} \leq \mathcal{G}_{m,n,\mathcal{A}} \leq C \mathcal{G}_{m,n},$$

bzw. auf  $B \times B$ :

$$(59) \quad \frac{1}{C} G_{m,n}(x, y) \leq G_{m,n,\mathcal{A}}(x, y) \leq C G_{m,n}(x, y).$$

**Bemerkung.** Zur Notwendigkeit von Kleinheitsbedingungen siehe Satz 1.16.

**Beweis von Satz 1.14.** Bezeichne  $\varepsilon := \max_{|\alpha| \leq 2m-1} \|b_\alpha\|_{C^0(\bar{B})}$ . Ist  $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ , so existiert  $\mathcal{G}_{m,n,\mathcal{A}}$  gemäß Hilfssatz 1.13 und hat die dort beschriebenen Abbildungseigenschaften. Unter Verwendung der Neumannschen Reihe gilt für alle  $f \in L^p(B)$ :

$$\mathcal{G}_{m,n,\mathcal{A}}f = (\mathcal{I} + \mathcal{G}_{m,n}\mathcal{A})^{-1} \mathcal{G}_{m,n}f = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\mathcal{G}_{m,n}\mathcal{A})^i \mathcal{G}_{m,n}f.$$

Dabei ist gemäß Fubini-Tonelli und analog zu [GT, Lemma 4.1]:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(i)}f &:= (-1)^i (\mathcal{G}_{m,n}\mathcal{A})^i \mathcal{G}_{m,n}f \\ &= (-1)^i \int_B G_{m,n}(\cdot, z_1) \mathcal{A}_{z_1} \int_B G_{m,n}(z_1, z_2) \mathcal{A}_{z_2} \dots \\ &\quad \dots \mathcal{A}_{z_i} \int_B G_{m,n}(z_i, y) f(y) dy dz_i \dots dz_1 \\ &= \int_B \left\{ (-1)^i \int_B \dots \int_B G_{m,n}(\cdot, z_1) (\mathcal{A}_{z_1} G_{m,n}(z_1, z_2)) \dots \right. \\ &\quad \left. \dots (\mathcal{A}_{z_i} G_{m,n}(z_i, y)) d(z_1, \dots, z_i) \right\} f(y) dy \\ &=: \int_B G^{(i)}(\cdot, y) f(y) dy. \end{aligned}$$

Wir verwenden nun das 3-G-Theorem, Satz 1.8, in der Form:

$$\int_B \frac{G_{m,n}(x, z) |\mathcal{A}_z G_{m,n}(z, y)|}{G_{m,n}(x, y)} dz \leq \varepsilon M < \infty$$

mit einer von  $\varepsilon$  unabhängigen Zahl  $M = M(m, n) > 0$  und erhalten:

$$\begin{aligned} |G^{(i)}(x, y)| &= \left| \int_B \dots \int_B \frac{G_{m,n}(x, z_1) (\mathcal{A}_{z_1} G_{m,n}(z_1, z_2))}{G_{m,n}(x, z_2)} \cdot \right. \\ &\quad \left. \frac{G_{m,n}(x, z_2) (\mathcal{A}_{z_2} G_{m,n}(z_2, z_3))}{G_{m,n}(x, z_3)} \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \frac{G_{m,n}(x, z_i) (\mathcal{A}_{z_i} G_{m,n}(z_i, y))}{G_{m,n}(x, y)} \cdot G_{m,n}(x, y) d(z_1, \dots, z_i) \right| \\ &\leq G_{m,n}(x, y) \cdot \prod_{j=1}^i \sup_{\xi, \eta \in B} \int_B \frac{G_{m,n}(\xi, z_j) |\mathcal{A}_{z_j} G_{m,n}(z_j, \eta)|}{G_{m,n}(\xi, \eta)} dz_j \\ (60) \quad &\leq (\varepsilon M)^i G_{m,n}(x, y). \end{aligned}$$

Für  $\varepsilon M < 1$  folgt einerseits wegen  $\sum_{i=0}^{\infty} (\varepsilon M)^i = (1 - \varepsilon M)^{-1} < \infty$  für  $x \neq y$  die absolute lokal gleichmäßige Konvergenz von

$$(61) \quad \mathcal{G}_{m,n,\mathcal{A}}(x, y) := \sum_{i=0}^{\infty} G^{(i)}(x, y),$$



sowie

$$(62) \quad |G_{m,n,\mathcal{A}}(x, y)| \leq \frac{1}{1 - \varepsilon M} G_{m,n}(x, y),$$

und andererseits aufgrund des Lebesgueschen Konvergenzsatzes:

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}_{m,n,\mathcal{A}}f)(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} (\mathcal{G}^{(i)}f)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_B G^{(i)}(x, y) f(y) dy \\ &= \int_B \left( \sum_{i=0}^{\infty} G^{(i)}(x, y) f(y) \right) dy = \int_B G_{m,n,\mathcal{A}}(x, y) f(y) dy. \end{aligned}$$

Schließlich haben wir vermöge (60):

$$\begin{aligned} G_{m,n,\mathcal{A}}(x, y) &= G_{m,n}(x, y) + \sum_{i=1}^{\infty} G^{(i)}(x, y) \\ &\geq G_{m,n}(x, y) - \left( \sum_{i=1}^{\infty} (\varepsilon M)^i \right) G_{m,n}(x, y) = \frac{1 - 2\varepsilon M}{1 - \varepsilon M} G_{m,n}(x, y). \end{aligned}$$

Mit der Wahl  $\varepsilon_0 \leq 1/(4M)$  folgt für  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  nun auch der besonders interessierende Teil der Abschätzung (59), nämlich die Abschätzung der Greenschen Funktion zum gestörten Randwertproblem (56) nach unten.  $\blacksquare$

#### 1.1.4 Verhalten der Resolvente, Nichtpositivität beim parabolischen Anfangsrandwertproblem

In diesem Abschnitt setzen wir stets  $m > 1$  voraus. Wir untersuchen hier nur Störungen nullter Ordnung

$$(63) \quad \begin{cases} (-\Delta)^m u + b(x)u = f & \text{in } \Omega, \\ D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m - 1, \end{cases}$$

dabei ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes  $C^{2m,\gamma}$ -glattes Gebiet und  $b \in C^0(\overline{\Omega})$ . In dieser speziellen Situation lassen sich über die Struktur der Menge  $P \subset C^0(\overline{\Omega})$  derjenigen Koeffizientenfunktionen  $b$ , für die der Greensche Operator  $\mathcal{G}_{m,\Omega,b} : L^p(\Omega) \rightarrow W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$ ,  $p > 1$ , zum Randwertproblem (63) existiert und (stark) positivitätserhaltend wirkt, d.h.

$$0 \neq f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{G}_{m,\Omega,b}f > 0,$$

auch für nicht kugelförmige Gebiete  $\Omega$  recht weitreichende Aussagen erzielen. Diese Menge  $P$  ist verträglich mit der Teilordnung “ $\leq$ ”, s. Satz 1.15 unten, und enthält nur Elemente, deren Infimum einen gewissen kritischen Wert nicht überschreitet ( $m > 1!$ ), s. Satz 1.16. Das letztere Resultat kontrastiert zum Vergleichsprinzip für Gleichungen

zweiter Ordnung, bei dem lediglich  $b > -\Lambda_{1,1}$  vorauszusetzen ist, und zeigt, daß in Satz 1.1 auf Kleinheitsbedingungen zumindest nicht völlig verzichtet werden kann.

Allein für die Frage, ob  $P \neq \emptyset$  gilt, müssen wir uns in allgemeinen Raumdimensionen auf die Kugel  $\Omega = B$  beschränken. Nur im  $\mathbb{R}^2$  können wir derzeit  $P \neq \emptyset$  auch in Gebieten “nahe” des Einheitskreises  $B$  nachweisen, z.B. in Ellipsen, deren Verhältnis der Hauptachsen nahe 1 ist. Dazu siehe unten im Abschnitt 1.2 den Satz 1.26.

**Satz 1.15.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes,  $C^{2m,\gamma}$ -glattes Gebiet,  $p > 1$ . Sei  $b_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ ,  $b_0 > -\Lambda_{m,1}$  in  $\overline{\Omega}$ , derart, daß der zum Randwertproblem (63) mit  $b = b_0$  gehörige Greensche Operator  $\mathcal{G}_{m,\Omega,b_0}$  positivitätserhaltend bzw. stark positivitätserhaltend wirkt:*

$$f \in L^p(\Omega), 0 \neq f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{G}_{m,\Omega,b_0}f \geq 0 \\ \text{bzw. } \mathcal{G}_{m,\Omega,b_0}f > 0 \text{ in } \Omega.$$

Sei  $b \in C^0(\overline{\Omega})$ ,  $-\Lambda_{m,1} < b \leq b_0$  in  $\overline{\Omega}$ . Dann gilt entsprechendes auch für den Greenschen Operator  $\mathcal{G}_{m,\Omega,b}$ , d.h.:

$$f \in L^p(\Omega), 0 \neq f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{G}_{m,\Omega,b}f \geq 0 \\ \text{bzw. } \mathcal{G}_{m,\Omega,b}f > 0 \text{ in } \Omega.$$

**Beweis.** Sei zunächst  $p \geq 2$ . Anstelle des Randwertproblems (63) betrachten wir ein modifiziertes, nichtlineares Problem:

$$(64) \quad \begin{cases} (-\Delta)^m u + b_0(x)u = f + (b_0(x) - b(x))|u| & \text{in } \Omega, \\ D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m-1. \end{cases}$$

Falls eine Lösung  $u \in W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$  dieses Problems existiert, so haben wir wegen  $0 \neq f \geq 0$  und  $(b_0 - b)|u| \geq 0$ :

$$u = \mathcal{G}_{m,\Omega,b_0}(f + (b_0 - b)|u|) \geq 0 \text{ bzw. } > 0 \text{ in } \Omega.$$

Mithin löst  $u$  auch das ursprüngliche Randwertproblem (63), und wir haben

$$u = \mathcal{G}_{m,\Omega,b}f \geq 0 \text{ bzw. } > 0 \text{ in } \Omega.$$

Wir konstruieren eine Lösung von (64) durch Minimierung des Variationsfunktionals

$$F(v) := S_0(v) + \int_{\Omega} (b_0 v^2 + (b - b_0)|v|v - 2f v) dx$$

in  $H_0^m(\Omega)$ , dabei ist:

$$S_0(v) := \begin{cases} \int_{\Omega} (\Delta^{m/2} v)^2 dx, & \text{falls } m \text{ gerade,} \\ \int_{\Omega} |\nabla \Delta^{(m-1)/2} v|^2 dx, & \text{falls } m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Wir zeigen zunächst, daß das Funktional  $F$  in  $H_0^m(\Omega)$  koerzitiv ist. Dazu wähle ein  $\varepsilon > 0$  mit  $\varepsilon \leq b + \Lambda_{m,1}$  in  $\bar{\Omega}$  und  $\varepsilon \leq 2\Lambda_{m,1}$ .

$$\begin{aligned}
F(v) &\geq S_0(v) + \int_{\Omega} (b_0 v^2 - (b_0 - b)v^2 - 2f v) \, dx \\
&= \left( \frac{\varepsilon}{2\Lambda_{m,1}} + \frac{2\Lambda_{m,1} - \varepsilon}{2\Lambda_{m,1}} \right) S_0(v) + \int_{\Omega} (b v^2 - 2f v) \, dx \\
&\geq \frac{\varepsilon}{2\Lambda_{m,1}} S_0(v) + \int_{\Omega} \left( (\Lambda_{m,1} - \frac{\varepsilon}{2} + b) v^2 - 2f v \right) \, dx \\
&\geq \frac{\varepsilon}{2\Lambda_{m,1}} S_0(v) + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} v^2 \, dx - \frac{2}{\varepsilon} \int_{\Omega} f^2 \, dx - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} v^2 \, dx \\
&\geq \frac{\varepsilon}{2\Lambda_{m,1}} S_0(v) - \frac{2}{\varepsilon} \int_{\Omega} f^2 \, dx.
\end{aligned}$$

Sei nun  $(u_k) \subset H_0^m(\Omega)$  eine Minimalfolge für  $F$ . Aufgrund der Koerzitivität von  $F$  findet man, daß mit einem geeigneten  $u \in H_0^m(\Omega)$  nach Auswahl einer Teilfolge gilt:  $u_k \rightharpoonup u$  in  $H_0^m(\Omega)$  und  $u_k \rightarrow u$  in  $L^2(\Omega)$ . Wegen der schwachen (Folgen-) Unterhalbstetigkeit von  $S_0$  folgt zunächst  $F(u) \leq \inf_{v \in H_0^m(\Omega)} F(v)$  und somit  $F(u) = \inf_{v \in H_0^m(\Omega)} F(v)$ . Infolgedessen ist  $u$  schwache Lösung von (64); durch (ggfs. wiederholte) Anwendung linearer Regularitätstheorie [ADN] folgt schließlich  $u \in W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$ .

Der Fall  $1 < p < 2$  ergibt sich durch monotone Approximation  $f_{k+1} \geq f_k$  von  $f \in L^p(\Omega)$  durch  $f_k \in L^2(\Omega)$ , etwa durch  $f_k(x) := \min\{f(x), k\}$ . Man beachte die entsprechende  $L^p$ -Theorie [ADN] sowie die Monotonie der Näherungslösungen  $u_{k+1} \geq u_k$ . ■

**Satz 1.16.** *Sei  $m > 1$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes  $C^{2m,\gamma}$ -glattes Gebiet. Dann gibt es eine kritische Zahl  $\hat{b}_c < \infty$  derart, daß für jedes  $b \in C^0(\bar{\Omega})$ ,  $b(\cdot) \geq \hat{b}_c$  der zum Randwertproblem (63) gehörige Greensche Operator  $\mathcal{G}_{m,\Omega,b}$  nicht positivitätserhaltend ist, d.h.:*

$$\exists f \in L^p(\Omega), \quad f \geq 0 \quad \text{mit} \quad \mathcal{G}_{m,\Omega,b} f \not\geq 0.$$

**Beweis.** Falls  $\mathcal{G}_{m,\Omega}$  selbst in  $\Omega$  nicht positivitätserhaltend ist, setzen wir  $\hat{b}_c = 0$  und verweisen auf Satz 1.15. Sei also im folgenden  $\mathcal{G}_{m,\Omega}$  positivitätserhaltend. Wir betrachten  $u := \mathcal{G}_{m,\Omega} 1$ ,  $0 \not\equiv u \geq 0$ , aufgrund der klassischen Lösungstheorie [ADN] ist  $u$  insbesondere stetig. Also gibt es eine Kugel  $\bar{B}_\rho(x_0) \subset \Omega$  und ein  $\varepsilon > 0$  derart, daß dort  $u \geq \varepsilon$  ist.

Sei  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $0 \leq \chi \leq 1$ ,  $\chi(r) = 0$  für  $r > 1$  und  $\chi(r) = 1$  für  $r \leq \frac{1}{2}$ . Wir modifizieren die Lösung  $u$  in  $B_\rho(x_0)$  wie folgt:

$$\tilde{u}(x) = \chi\left(\frac{|x - x_0|}{\rho}\right) \cdot \left(16 \frac{|x - x_0|^2}{\rho^2} - 1\right) + \left(1 - \chi\left(\frac{|x - x_0|}{\rho}\right)\right) \cdot u(x).$$

Für diese modifizierte “Lösung” gilt  $\tilde{u} \in C^{2m,\gamma}(\overline{\Omega})$ ,  $D^\alpha \tilde{u}|_{\partial\Omega} = 0$  für  $|\alpha| \leq m-1$ , sowie mit einem geeigneten  $\delta > 0$ :

$$(-\Delta)^m \tilde{u}(x) \begin{cases} = 0 & \text{für } x \in \overline{B}_{\rho/2}(x_0), \\ \geq -\frac{1}{\delta} & \text{für } x \in \overline{B}_\rho(x_0) \setminus \overline{B}_{\rho/2}(x_0), \\ = 1 & \text{für } x \in \overline{\Omega} \setminus \overline{B}_\rho(x_0), \end{cases}$$

und

$$\tilde{u}(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x \in B_{\rho/4}(x_0), \\ \geq 0 & \text{für } x \in B_{\rho/2}(x_0) \setminus B_{\rho/4}(x_0), \\ \geq \delta & \text{für } x \in \overline{B}_\rho(x_0) \setminus B_{\rho/2}(x_0), \\ \geq 0 & \text{für } x \in \overline{\Omega} \setminus \overline{B}_\rho(x_0). \end{cases}$$

Indem wir nun

$$b_0(x) := \frac{1}{\delta^2} \left( 1 - \chi \left( 2 \frac{|x - x_0|}{\rho} \right) \right) \geq 0, \quad b_0 \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

setzen, erhalten wir die folgende Differentialungleichung:

$$(-\Delta)^m \tilde{u}(x) + b_0(x) \tilde{u}(x) \begin{cases} = 0 & \text{für } x \in \overline{B}_{\rho/4}(x_0), \\ \geq 0 & \text{für } x \in \overline{B}_{\rho/2}(x_0) \setminus \overline{B}_{\rho/4}(x_0), \\ \geq -\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^2} \delta & \text{für } x \in \overline{B}_\rho(x_0) \setminus \overline{B}_{\rho/2}(x_0), \\ \geq 1 & \text{für } x \in \overline{\Omega} \setminus \overline{B}_\rho(x_0). \end{cases}$$

Wir haben also ein  $b_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$  konstruiert, so daß wegen  $b_0 \geq 0$  der Greensche Operator  $\mathcal{G}_{m,\Omega,b_0}$  existiert, dieser aber nicht positivitätserhaltend ist: Für  $f := (-\Delta)^m \tilde{u} + b_0 \tilde{u} \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$  gilt zwar  $f \geq 0$ , aber  $\mathcal{G}_{m,\Omega,b_0} f = \tilde{u} < 0$  in  $B_{\rho/4}(x_0)$ . Indem man  $\hat{b}_c := \max_{x \in \overline{\Omega}} b_0(x)$  setzt, folgt unter Verwendung von Satz 1.15 die Behauptung. ■

**Folgerung 1.17.** *Sei  $m > 1$ . Das parabolische Anfangsrandwertproblem:*

$$(65) \quad \begin{cases} u_t + (-\Delta)^m u = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \Omega, \\ D_x^\alpha u(t, \cdot)|_{\partial\Omega} = 0 & \text{für alle } |\alpha| \leq m-1, \quad t \in (0, \infty), \\ u(0, \cdot) = \varphi \geq 0 & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

erhält im allgemeinen nicht die Positivität des Anfangswertes  $\varphi$ . D.h., es gibt einen nichtnegativen Anfangswert  $\varphi \geq 0$  und einen Punkt  $(t_0, x_0) \in (0, \infty) \times \Omega$ , so daß für die Lösung  $u$  von (65) gilt:  $u(t_0, x_0) < 0$ .

**Beweis.** Gemäß [Fr, Chapt. 2, (1.6), (1.8) und (1.18)] ist das Anfangsrandwertproblem (65) positivitätserhaltend genau dann, wenn entsprechendes für die Resolvente von  $(-\Delta)^m$  gilt:  $\mathcal{G}_{m,\Omega,\lambda} \geq 0$  für alle  $\lambda \geq 0$ . Satz 1.16 zeigt, daß letzteres in jedem glatten Gebiet für große  $\lambda$  verletzt ist. ■

**Bemerkung.** Einen anderen Beweis hat mir F. Bernis [Ber3] mitgeteilt.

In Gebieten mit positiver Greenscher Funktion, z.B. in  $B \subset \mathbb{R}^n$  oder in Gebieten  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , die dem Kreis “nahe” sind, dazu vgl. Satz 1.26, lassen sich die Resultate über die Struktur der Menge  $P \subset C^0(\bar{\Omega})$  derjenigen Koeffizientenfunktionen  $b$ , für die der Greensche Operator  $\mathcal{G}_{m,\Omega,b}$  zum Randwertproblem (63) positivitätserhaltend wirkt, bereits zu einem recht vollständigen Bild zusammenfassen.

**Folgerung 1.18.** Sei  $m > 1$ ,  $p \geq 2$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes glattes Gebiet mit positiver Greenscher Funktion  $G_{m,\Omega} > 0$  zu  $(-\Delta)^m$ . Dann gibt es Zahlen  $b_c, \tilde{b}_c \in [0, \infty)$ ,  $b_c \geq \tilde{b}_c$ , derart, daß für  $b \in C^0(\bar{\Omega})$  folgendes gilt:

a) Für  $b > b_c$  ist  $\mathcal{G}_{m,\Omega,b}$  nicht positivitätserhaltend:

$$(66) \quad \exists 0 \neq f \geq 0 : \quad \mathcal{G}_{m,\Omega,b}f \not\geq 0.$$

Jedoch gilt auch:

$$(67) \quad \forall 0 \neq f \geq 0 : \quad \mathcal{G}_{m,\Omega,b}f \not\leq 0,$$

$$(68) \quad \exists 0 \neq f \geq 0 : \quad \mathcal{G}_{m,\Omega,b}f \geq 0.$$

b) Für  $-\Lambda_{m,1} < b \leq b_c$  bzw.  $-\Lambda_{m,1} < b < \tilde{b}_c$  ist  $\mathcal{G}_{m,\Omega,b}$  positivitätserhaltend bzw. stark positivitätserhaltend:

$$(69) \quad \forall 0 \neq f \geq 0 : \quad \mathcal{G}_{m,\Omega,b}f \geq 0 \text{ bzw. } \mathcal{G}_{m,\Omega,b}f > 0 \text{ in } \Omega.$$

c) Für  $b = -\Lambda_{m,1}$ ,  $0 \neq f \geq 0$  hat (63) keine Lösung.

d) Ist  $b < -\Lambda_{m,1}$ , so ist (63) positivitätsvernichtend. d.h.: Hat (63) zu  $0 \neq f \geq 0$  eine Lösung  $u$ , so ist diese nicht in ganz  $\Omega$  nichtnegativ:  $u \not\geq 0$ .

Hier bleibt zum einen offen, ob  $b_c = \tilde{b}_c$  gilt, und zum anderen, wie die Greensche Funktion  $G_{m,\Omega,b}$  bei  $b = b_c$  den Übergang zum Vorzeichenwechsel vollzieht. Da der Beweis von Satz 1.1 vor allem dem nichtdegenerierten Randverhalten von  $G_{m,n}$  zu verdanken ist, vermute ich  $b_c = \tilde{b}_c$  sowie

$$G_{m,\Omega,b_c} > 0 \text{ in } \Omega \times \Omega, \text{ aber}$$

$$\exists x \in \partial\Omega, \exists y \in \partial\Omega : \quad D_x^m D_y^m G_{m,\Omega,b_c}(x, y) = 0.$$

Interessant wäre ebenfalls eine explizite Bestimmung und Interpretation des kritischen Wertes  $b_c$ .

**Beweis von Folgerung 1.18.** Zunächst sei bemerkt, daß aufgrund des Satzes von Jenč, s. [SH, p. 337], eine (bis auf Normierung eindeutig bestimmte) positive Eigenfunktion  $\Phi_{m,1} > 0$  zu  $((-\Delta)^m, \Lambda_{m,1})$  in  $\Omega$  existiert.

Wir definieren:

$$\begin{aligned} b_c &= \sup \{ b \in \mathbb{R} : f \geq 0 \Rightarrow \mathcal{G}_{m,\Omega,b} f \geq 0 \text{ in } \Omega \}, \\ \tilde{b}_c &= \sup \{ b \in \mathbb{R} : 0 \not\equiv f \geq 0 \Rightarrow \mathcal{G}_{m,\Omega,b} f > 0 \text{ in } \Omega \}. \end{aligned}$$

Aufgrund von Satz 1.15 sowie der stetigen Abhängigkeit von  $u$  vom Parameter  $b$  außerhalb des Spektrums folgen b) und (66) aus a). Satz 1.16 zeigt  $b_c < \infty$ . (68) folgt, indem man  $f := (-\Delta)^m \Phi_{m,1} + b \Phi_{m,1} = (\Lambda_{m,1} + b) \Phi_{m,1} > 0$  betrachtet. Um (67) zu zeigen, setze  $u := \mathcal{G}_{m,\Omega,b} f$  für beliebiges  $0 \not\equiv f \geq 0$ :

$$\int_{\Omega} f u \, dx = \int_{\Omega} ((-\Delta)^m u + b u) u \, dx = S_0(u) + b \int_{\Omega} u^2 \, dx > 0.$$

Zu c): Wäre  $u$  eine Lösung zu  $b = -\Lambda_{m,1}$ , so hätte man:

$$\begin{aligned} 0 &< \int_{\Omega} f \Phi_{m,1} \, dx = \int_{\Omega} ((-\Delta)^m u - \Lambda_{m,1} u) \Phi_{m,1} \, dx \\ &= \int_{\Omega} u ((-\Delta)^m \Phi_{m,1} - \Lambda_{m,1} \Phi_{m,1}) \, dx = 0. \end{aligned}$$

Zu d): Wäre  $u \geq 0$  eine Lösung zu  $b < -\Lambda_{m,1}$ , so folgte:

$$0 < \int_{\Omega} f \Phi_{m,1} \, dx = \int_{\Omega} ((-\Delta)^m u + b u) \Phi_{m,1} \, dx = \int_{\Omega} (\Lambda_{m,1} + b) u \Phi_{m,1} \, dx \leq 0. \quad \blacksquare$$

### 1.1.5 Einfluß nichtnegativer Randdaten

Hier untersuchen wir zunächst Randwertprobleme der Art:

$$(70) \quad \begin{cases} ((-\Delta)^m + \mathcal{A}) u = f & \text{in } B, \\ D^\alpha u|_{\partial B} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m-2, \\ \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial \nu} \Delta^{(m/2)-1} u|_{\partial B} = \varphi, & \text{falls } m \text{ gerade,} \\ \Delta^{(m-1)/2} u|_{\partial B} = \varphi, & \text{falls } m \text{ ungerade.} \end{cases} \end{cases}$$

Dabei ist  $f \in C^0(\overline{B})$ ,  $\varphi \in C^0(\partial B)$  sowie

$$(71) \quad \mathcal{A} = \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} b_\alpha(\cdot) D^\alpha, \quad b_\alpha \in C^{|\alpha|}(\overline{B}),$$

eine (kleine) Störung niederer Ordnung, so daß der Greensche Operator  $\mathcal{G}_{m,n,\mathcal{A}}$  zu homogenen Randwerten existiert. Durch Kombination der lokalen  $L^p$ -Theorie aus [ADN, §15] und den Maximumabschätzungen aus [Ag] erhalten wir Lösungen  $u \in W_{\text{loc}}^{2m,p}(B) \cap C^{m-1}(\overline{B})$  für beliebiges  $p \in (1, \infty)$ .

Im folgenden wollen wir zeigen, daß für hinreichend kleine Störungen  $\mathcal{A}$  die Nichtnegativität der Daten  $0 \not\equiv \varphi \geq 0$ ,  $f \geq 0$  die Positivität der Lösung  $u > 0$  nach sich

zieht. Außerdem zeigen wir ein dazu duales Resultat, das man als Verallgemeinerung des Hopfschen Randpunktlemmas interpretieren kann:

Sei  $u$  eine Lösung des Randwertproblems (70) zu  $\varphi = 0$  und  $0 \neq f \geq 0$ . Dann gilt gemäß Satz 1.1  $u > 0$ , und darüber hinaus zeigen wir festes Vorzeichen des ersten nicht vorgeschriebenen Randterms:  $\Delta^{(m/2)}u|_{\partial B} > 0$  ( $m$  gerade) bzw.  $-\frac{\partial}{\partial \nu}\Delta^{(m-1)/2}u|_{\partial B} > 0$  ( $m$  ungerade).

Am Ende dieses Abschnitts gehen wir noch auf den Einfluß des Randdatums  $u|_{\partial B}$  auf das Vorzeichen der Lösung beim Randwertproblem vierter Ordnung ein.

Wir geben jetzt eine präzise Formulierung der erwähnten beiden Randlemmata.

**Folgerung 1.19.** *Die Koeffizienten niederer Ordnung in (71) seien ausreichend glatt:  $b_\alpha \in C^{|\alpha|}(\overline{B})$ . Es existiert ein  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m, n) > 0$  derart, daß gilt:*

*Ist für alle  $|\alpha| \leq 2m - 1$  die Bedingung  $\|b_\alpha\|_{C^{|\alpha|}(\overline{B})} \leq \varepsilon_0$  erfüllt, so besitzt das Randwertproblem (70) zu  $f \in C^0(\overline{B})$ ,  $\varphi \in C^0(\partial B)$  stets eine Lösung  $u \in W_{\text{loc}}^{2m,p}(B) \cap C^{m-1}(\overline{B})$ ,  $p > 1$  beliebig. Darüber hinaus impliziert Nichtnegativität der Daten  $f \geq 0$ ,  $\varphi \geq 0$ ,  $f \neq 0$  oder  $\varphi \neq 0$ , stets die Positivität der Lösung:  $u > 0$ .*

**Folgerung 1.20.** *Die Koeffizienten niederer Ordnung in (71) seien stetig:  $b_\alpha \in C^0(\overline{B})$ . Es existiert ein  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m, n) > 0$  derart, daß gilt:*

*Ist  $\|b_\alpha\|_{C^0(\overline{B})} \leq \varepsilon_0$  für alle  $|\alpha| \leq 2m - 1$ , so besitzt das Randwertproblem (70) mit homogener Randdatenvorgabe  $\varphi = 0$  zu  $f \in C^0(\overline{B})$  stets eine Lösung  $u \in W^{2m,p}(B) \cap C^{2m-1}(\overline{B})$ ,  $p > 1$  beliebig. Darüber hinaus impliziert  $0 \neq f \geq 0$  für alle  $x \in \partial B$ :*

$$(72) \quad \begin{cases} \Delta^{(m/2)}u(x) > 0, & \text{falls } m \text{ gerade,} \\ -\frac{\partial}{\partial \nu}\Delta^{(m-1)/2}u(x) > 0, & \text{falls } m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Neben der genauen Charakterisierung des Wachstumsverhaltens der zum Randwertproblem (70) gehörigen Greenschen Funktion  $G_{m,n,\mathcal{A}}$  nahe  $\partial B$ , die durch Kombination von (59) aus Satz 1.14 und Satz 1.4 gegeben wird, benötigen wir vor allem Differenzierbarkeitseigenschaften von  $G_{m,n,\mathcal{A}}$ , um die beiden Folgerungen beweisen zu können. Diese werden ohne Anspruch auf Optimalität in den folgenden beiden Hilfssätzen zusammengestellt.

**Hilfssatz 1.21.** *Es gelte  $b_\alpha \in C^0(\overline{B})$ . Es existiert ein  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(m, n) > 0$  derart, daß gilt:*

*Ist  $\|b_\alpha\|_{C^0(\overline{B})} \leq \varepsilon_1$  für alle  $|\alpha| \leq 2m - 1$ , so existiert die Greensche Funktion  $G_{m,n,\mathcal{A}}(\cdot, \cdot)$  zum Randwertproblem (70). Für jedes feste  $y \in B$  ist  $G_{m,n,\mathcal{A}}(\cdot, y) \in C^{2m-1}(\overline{B} \setminus \{y\})$ . Für  $|\alpha| \leq 2m - 1$  gilt außerdem mit von  $x, y$  unabhängigen Konstanten*

$C = C(m, n)$ :

$$(73) \quad \begin{cases} G_{m,n,\mathcal{A}}(\cdot, y) \in C^{|\alpha|}(\overline{B}), & \text{falls } 0 \leq |\alpha| < 2m - n, \\ |D_x^\alpha G_{m,n,\mathcal{A}}(x, y)| \leq C, & \text{falls } 0 \leq |\alpha| < 2m - n, \\ |D_x^\alpha G_{m,n,\mathcal{A}}(x, y)| \leq C \log\left(\frac{3}{|x-y|}\right), & \text{falls } |\alpha| = 2m - n \text{ und } n \text{ gerade,} \\ |D_x^\alpha G_{m,n,\mathcal{A}}(x, y)| \leq C, & \text{falls } |\alpha| = 2m - n \text{ und } n \text{ ungerade,} \\ |D_x^\alpha G_{m,n,\mathcal{A}}(x, y)| \leq C |x-y|^{2m-n-|\alpha|}, & \text{falls } 2m - n < |\alpha| < 2m. \end{cases}$$

Schließlich ist  $D_x^\alpha G_{m,n,\mathcal{A}} \in C^0(\overline{B} \times \overline{B} \setminus \{(x, y) : x = y\})$ .

**Beweis.** Wir greifen den Beweis von Satz 1.14 wieder auf. Das folgende gilt, sofern  $\varepsilon_1$  hinreichend klein gewählt wird.

Die Greensche Funktion  $G_{m,n,\mathcal{A}}$  existiert, und es ist

$$G_{m,n,\mathcal{A}}(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} G^{(i)}(x, y),$$

wobei

$$\begin{aligned} G^{(0)}(x, y) &= G_{m,n}(x, y), \\ G^{(i)}(x, y) &= (-1)^i \int_B \cdots \int_B G_{m,n}(x, z_1) (\mathcal{A}_{z_1} G_{m,n}(z_1, z_2)) \cdots \\ &\quad \cdots (\mathcal{A}_{z_i} G_{m,n}(z_i, y)) d(z_1, \dots, z_i). \end{aligned}$$

Man hat insbesondere  $G^{(i)}(\cdot, y) \in C^{2m-1}(\overline{B} \setminus \{y\})$ ,  $G^{(i)}(\cdot, y) \in C^{|\alpha|}(\overline{B})$  für  $0 \leq |\alpha| < 2m - n$ , sowie für  $|\alpha| \leq 2m - 1$  und  $i \geq 1$  mit von  $i$  unabhängigen Konstanten  $C_j = C_j(m, n)$ :

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha G^{(i)}(x, y)| &\leq \int_B \cdots \int_B |D_x^\alpha G_{m,n}(x, z_1)| \\ &\quad \cdot |\mathcal{A}_{z_1} G_{m,n}(z_1, z_2)| \cdots \cdot |\mathcal{A}_{z_i} G_{m,n}(z_i, y)| d(z_1, \dots, z_i) \\ &\leq \varepsilon_1^i \cdot C_1^{i+1} \int_B \cdots \int_B \Gamma(|x - z_1|) \cdot |z_1 - z_2|^{1-n} \cdots \cdot |z_i - y|^{1-n} d(z_1, \dots, z_i). \end{aligned}$$

Dabei setzen wir mit Blick auf Satz 1.5:

$$\Gamma(\rho) := \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \leq |\alpha| < 2m - n, \\ \log\left(\frac{3}{\rho}\right), & \text{falls } |\alpha| = 2m - n \text{ und } n \text{ gerade,} \\ 1, & \text{falls } |\alpha| = 2m - n \text{ und } n \text{ ungerade,} \\ \rho^{2m-n-|\alpha|}, & \text{falls } |\alpha| > 2m - n. \end{cases}$$



Durch wiederholte Verwendung von  $\int_B |\xi - z|^{1-n} \cdot |z - \eta|^{1-n} \leq C_2 |\xi - \eta|^{1-n}$  folgt weiter:

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha G^{(i)}(x, y)| &\leq \varepsilon_1^i C_1^{i+1} C_2^{i-1} \int_B \Gamma(|x - z_1|) |z_1 - y|^{1-n} dz_1 \\ &\leq \varepsilon_1^i C_1^{i+1} C_2^{i-1} \cdot \begin{cases} C_2, & \text{falls } |\alpha| \leq 2m - n, \\ C_2 |x - y|^{2m-n-|\alpha|}, & \text{falls } 2m - n < |\alpha| < 2m. \end{cases} \end{aligned}$$

Sofern  $\varepsilon_1 > 0$  hinreichend klein gewählt wird, folgt damit die absolut gleichmäßige Konvergenz der Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} D_x^\alpha G^{(i)}(\cdot, y)$  in  $\overline{B}$ , falls  $|\alpha| \leq 2m - n$ , und in  $\overline{B} \setminus B_\delta(y)$ ,  $\delta > 0$  beliebig, sonst. Unter Berücksichtigung der Eigenschaften von  $G^{(0)} = G_{m,n}$  erhalten wir die behauptete Glattheit und die Abschätzung für  $D_x^\alpha G_{m,n,\mathcal{A}}$ . ■

**Hilfssatz 1.22.** *Es gelte  $b_\alpha \in C^{|\alpha|}(\overline{B})$ . Es existiert ein  $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(m, n) > 0$  derart, daß gilt:*

*Ist  $\|b_\alpha\|_{C^{|\alpha|}(\overline{B})} \leq \varepsilon_2$  für alle  $|\alpha| \leq 2m - 1$ , so existiert die Greensche Funktion  $G_{m,n,\mathcal{A}}(\cdot, \cdot)$  zum Randwertproblem (70). Für jedes feste  $x \in B$  ist  $G_{m,n,\mathcal{A}}(x, \cdot) \in C^{2m-1}(\overline{B} \setminus \{x\})$ . Außerdem gilt für  $|\alpha| \leq 2m - 1$  mit von  $x, y$  unabhängigen Konstanten  $C = C(m, n)$ :*

$$(74) \quad \begin{cases} G_{m,n,\mathcal{A}}(x, \cdot) \in C^{|\alpha|}(\overline{B}), & \text{falls } 0 \leq |\alpha| < 2m - n, \\ |D_y^\alpha G_{m,n,\mathcal{A}}(x, y)| \leq C, & \text{falls } 0 \leq |\alpha| < 2m - n, \\ |D_y^\alpha G_{m,n,\mathcal{A}}(x, y)| \leq C \log \left( \frac{3}{|x - y|} \right), & \text{falls } |\alpha| = 2m - n \text{ und } n \text{ gerade,} \\ |D_y^\alpha G_{m,n,\mathcal{A}}(x, y)| \leq C, & \text{falls } |\alpha| = 2m - n \text{ und } n \text{ ungerade,} \\ |D_y^\alpha G_{m,n,\mathcal{A}}(x, y)| \leq C |x - y|^{2m-n-|\alpha|}, & \text{falls } 2m - n < |\alpha| < 2m. \end{cases}$$

Schließlich ist  $D_y^\alpha G_{m,n,\mathcal{A}}$  außerhalb der Diagonalen in  $\overline{B} \times \overline{B}$  stetig.

**Beweis.** Aufgrund der starken Differenzierbarkeitsannahmen an die Koeffizientenfunktionen  $b_\alpha$  können wir das adjungierte Randwertproblem

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u + \mathcal{A}^* u = f & \text{in } B, \\ D^\alpha u|_{\partial B} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m - 1, \end{cases}$$

mit  $(\mathcal{A}^* u)(x) = \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (b_\alpha(x) u(x))$  betrachten. Ist  $\varepsilon_2$  hinreichend klein, so existiert die zugehörige Greensche Funktion  $G_{m,n,\mathcal{A}^*}$ , und es ist  $G_{m,n,\mathcal{A}}(x, y) = G_{m,n,\mathcal{A}^*}(y, x)$ . Aufgrund dieser Beobachtung folgt die Behauptung nun unmittelbar aus dem vorhergehenden Hilfssatz 1.21. ■

**Beweis von Folgerung 1.19.** Sei  $\varepsilon_0 > 0$  so klein gewählt, daß alle im folgenden Beweis zitierten Sätze Anwendung finden können.

Die erforderliche Glattheit für die Greensche Funktion  $G_{m,n,\mathcal{A}}$  haben wir soeben in Hilfssatz 1.22 nachgewiesen. Für Lösungen des Randwertproblems (70) haben wir die Darstellungsformel:

$$u(x) = \begin{cases} \int_B G_{m,n,\mathcal{A}}(x,y)f(y)dy + \int_{\partial B} \Delta_y^{m/2} G_{m,n,\mathcal{A}}(x,y)\varphi(y)d\omega(y), \\ \text{falls } m \text{ gerade,} \\ \int_B G_{m,n,\mathcal{A}}(x,y)f(y)dy + \int_{\partial B} \left(-\frac{\partial}{\partial\nu_y} \Delta_y^{(m-1)/2}\right) G_{m,n,\mathcal{A}}(x,y)\varphi(y)d\omega(y), \\ \text{falls } m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Für festes  $x \in B$  und beliebiges  $y$  "nahe"  $\partial B$  gilt aufgrund von Satz 1.14 und Satz 1.4:

$$G_{m,n,\mathcal{A}}(x,y) \succeq G_{m,n}(x,y) \succeq |x-y|^{-n}d(x)^m d(y)^m \succeq d(y)^m.$$

Folglich ist für jedes feste  $x \in B$ :

$$\begin{cases} \Delta_y^{m/2} G_{m,n,\mathcal{A}}(x, \cdot)|_{\partial B} > 0 & \text{für gerades } m, \\ -\frac{\partial}{\partial\nu_y} \Delta_y^{(m-1)/2} G_{m,n,\mathcal{A}}(x, \cdot)|_{\partial B} > 0 & \text{für ungerades } m. \end{cases}$$

Zusammen mit der Positivität von  $G_{m,n,\mathcal{A}}$  ist die Behauptung von Folgerung 1.19 nun offensichtlich. ■

**Beweis von Folgerung 1.20.** Wir gehen "dual" zum vorhergehenden Beweis vor. Sei  $\varepsilon_0 > 0$  für das folgende hinreichend klein gewählt. Durch Differentiation der Darstellungsformel

$$u(x) = \int_B G_{m,n,\mathcal{A}}(x,y)f(y)dy$$

folgt für  $x \in \partial B$ :

$$\begin{cases} \Delta_x^{m/2} u(x) = \int_B (\Delta_x^{m/2} G_{m,n,\mathcal{A}}(x,y)) f(y) dy, & m \text{ gerade,} \\ -\frac{\partial}{\partial\nu} \Delta_x^{(m-1)/2} u(x) = \int_B \left(-\frac{\partial}{\partial\nu_x} \Delta_x^{(m-1)/2} G_{m,n,\mathcal{A}}(x,y)\right) f(y) dy, & m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Für jedes feste  $y \in B$  haben wir für  $\tilde{x}$  "nahe"  $\partial B$ :

$$G_{m,n,\mathcal{A}}(\tilde{x},y) \succeq G_{m,n}(\tilde{x},y) \succeq |\tilde{x}-y|^{-n}d(\tilde{x})^m d(y)^m \succeq d(\tilde{x})^m$$

und infolgedessen für  $x \in \partial B$ ,  $y \in B$ :

$$\begin{cases} \Delta_x^{m/2} G_{m,n,\mathcal{A}}(x,y) > 0 & \text{für gerades } m, \\ -\frac{\partial}{\partial\nu_x} \Delta_x^{(m-1)/2} G_{m,n,\mathcal{A}}(x,y) > 0 & \text{für ungerades } m, \end{cases}$$

woraus unmittelbar  $\Delta^{m/2}u(x) > 0$  bzw.  $-\frac{\partial}{\partial \nu}\Delta^{(m-1)/2}u(x) > 0$  folgt. ■

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einigen Bemerkungen über den Einfluß der Vorgabe der Lösung  $u$  selbst auf dem Rand  $\partial B$  auf das Vorzeichen von  $u$  in  $B$  im Spezialfall von Gleichungen vierter Ordnung. Wir betrachten zunächst das “ungestörte” Problem:

$$(75) \quad \begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{in } B, \\ u|_{\partial B} = \psi, & -\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial B} = \varphi. \end{cases}$$

Die Darstellungsformel für die Lösung  $u$  lautet in diesem Falle:

$$(76) \quad \begin{aligned} u(x) &= \int_B G_{2,n}(x, y) f(y) dy + \int_{\partial B} \left( \frac{\partial}{\partial \nu_y} \Delta_y G_{2,n}(x, y) \right) \psi(y) d\omega(y) \\ &\quad + \int_{\partial B} \left( \Delta_y G_{2,n}(x, y) \right) \varphi(y) d\omega(y) \\ &=: \int_B G_{2,n}(x, y) f(y) dy + \int_{\partial B} K_n(x, y) \psi(y) d\omega(y) + \int_{\partial B} L_n(x, y) \varphi(y) d\omega(y) \end{aligned}$$

mit

$$(77) \quad K_n(x, y) = \frac{1}{2\omega_n} \frac{(1 - |x|^2)^2}{|x - y|^{n+2}} \{n(1 - x \cdot y) - (n - 2)|x - y|^2\},$$

$$(78) \quad L_n(x, y) = \frac{1}{2\omega_n} \frac{(1 - |x|^2)^2}{|x - y|^n},$$

$x \in B, y \in \partial B$ . Die expliziten Ausdrücke (77), (78) für die Integralkerne  $K_n$  und  $L_n$  finden sich z.B. in [Nic, p. 34]; sie lassen sich durch Differentiation der Formel für  $G_{2,n}$  von S. 13 berechnen. In Übereinstimmung mit Folgerung 1.19 ist  $L_n(x, y) > 0$  für  $x \in B, y \in \partial B$ . Hinsichtlich  $K_n$  gilt jedoch:

**Bemerkung.** Für  $n \geq 5, y \in \partial B$  fest und  $x = -(1 - \varepsilon)y$  haben wir  $\{n(1 - x \cdot y) - (n - 2)|x - y|^2\} = n(2 - \varepsilon) - (n - 2)(2 - \varepsilon)^2 = (2 - \varepsilon)(4 - n + \varepsilon(n - 2)) < 0$  für  $\varepsilon$  nahe 0. D.h. der Kern  $K_n$  wechselt für  $n \geq 5$  sein Vorzeichen. Es gibt also Randdaten  $\psi \geq 0$ , deren Träger auf  $\partial B$  etwa sehr stark lokalisiert ist, die zu vorzeichenwechselnden Lösungen  $u \not\geq 0$  Anlaß geben. Diese Beobachtung steht in Gegensatz zum radialsymmetrischen Fall  $\psi(y) = \text{const.}$ , vgl. [Sor, Prop. 1, Remark 9].

Für positive Resultate müssen wir uns also notwendigerweise auf Raumdimensionen  $n \leq 4$  beschränken. Hier gilt:

**Hilfssatz 1.23.** Für  $x \in B, y \in \partial B, n \leq 4$  gilt  $K_n(x, y) > 0$ . Ferner gilt auf  $B \times \partial B$  für  $n = 1, 2, 3$ :

$$(79) \quad K_n(x, y) \begin{cases} \leq |x - y|^{-n-1} d(x)^2, \\ \geq |x - y|^{-n} d(x)^2, \end{cases}$$

und für  $n = 4$ :

$$(80) \quad K_4(x, y) \sim |x - y|^{-6} d(x)^3.$$

**Beweis.** Für  $n = 1, 2, 3$  folgt die Behauptung aus  $|x - y|^2 \leq 2(1 - x \cdot y)$  und aus  $1 - x \cdot y = y \cdot (y - x) \leq |y - x|$ , für  $n = 4$  ist  $K_4(x, y) = \omega_4^{-1}(1 - |x|^2)^3|x - y|^{-6}$ . ■

**Bemerkung.** Die Abschätzung nach oben in (79) wird bei radialer Annäherung von  $x$  an  $y$  realisiert, diejenige nach unten hingegen, wenn sich  $x$  auf Bögen bewegt, die in  $y$  an  $\partial B$  tangential sind.

Für die Kerne  $K_1, \dots, K_4$  lassen sich wieder 3-G-artige Resultate herleiten. Aufgrund der zusätzlichen Degeneration bei den Abschätzungen für  $K_n$  nach unten fallen diese jedoch schwächer aus als die entsprechenden Ergebnisse in Satz 1.8.

**Hilfssatz 1.24.** Für  $x, z \in B, y \in \partial B$  gilt, falls  $n = 1, 2, 3$ :

$$(81) \quad \frac{|D_z^\alpha G_{2,n}(x, z)| K_n(z, y)}{K_n(x, y)} \preceq \begin{cases} 1, & \text{falls } |\alpha| \leq 3 - n, \\ |x - z|^{3-n-|\alpha|} + |y - z|^{3-n-|\alpha|}, & \text{falls } |\alpha| \geq 4 - n; \end{cases}$$

und falls  $n = 4$ :

$$(82) \quad \frac{|D_z^\alpha G_{2,4}(x, z)| K_4(z, y)}{K_4(x, y)} \preceq \begin{cases} \frac{1}{d(x)} \left( \log \left( \frac{3}{|x - z|} \right) + |y - z|^{-1} \right), & \text{falls } \alpha = 0, \\ \frac{1}{d(x)} \left( |x - z|^{-|\alpha|} + |y - z|^{-|\alpha|-1} \right), & \text{falls } 2 \geq |\alpha| > 0, \\ \frac{1}{d(x)} \left( |x - z|^{-|\alpha|} + |y - z|^{-|\alpha|} \right), & \text{falls } |\alpha| = 3, \\ \frac{1}{d(x)} \left( |x - z|^{-|\alpha|} + |y - z|^{1-|\alpha|} \right), & \text{falls } |\alpha| \geq 4. \end{cases}$$

**Bemerkung.** Die für das folgende benötigte, in  $x \in B, y \in \partial B$  gleichmäßige Abschätzung

$$(83) \quad \int_B \frac{|D_z^\alpha G_{2,n}(x, z)| K_n(z, y)}{K_n(x, y)} dz \preceq 1$$

gilt für  $n = 1, 2, 3$  und  $|\alpha| \leq 2$ . Im Gegensatz zu Abschnitt 1.1.2 erhalten wir bereits für  $|\alpha| = 3$  eine nicht mehr integrierbare Abschätzung. Im Falle vierer Raumdimensionen gibt die Degeneration von  $K_4(\cdot, y)$  nahe  $\partial B$  Anlaß zu einem unbeschränkten Faktor  $\frac{1}{d(x)}$  in (83). Das könnte zu einem Positivitätsverlust des Randwertproblems (75) bzgl. des Randdatums  $\psi$  bereits bei Störungen nullter Ordnung  $\Delta^2 u + b u$  des biharmonischen Operators führen.

**Beweis von Hilfssatz 1.24.** Im folgenden werden wir wiederholt auf Abschätzungen aus Satz 1.4, Satz 1.5 und Hilfssatz 1.11 zurückgreifen, ohne dieses jeweils gesondert

zu erwähnen. Man beachte, daß  $|y| = 1$  und deshalb insbesondere  $d(z) \leq |y - z|$  gilt. Wir behandeln zunächst die Raumdimensionen  $n = 1, 2, 3$ .

**Der Fall:**  $n = 1, 3$  und  $|\alpha| \leq 4 - n$ , oder  $n = 2$  und  $|\alpha| < 4 - n = 2$ .

Hier verwenden wir (55).

$$\begin{aligned}
\frac{|D_z^\alpha G_{2,n}(x, z)| K_n(z, y)}{K_n(x, y)} &\preceq \frac{d(x)^{2-\frac{n}{2}} d(z)^{2-\frac{n}{2}-|\alpha|} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^{n/2} d(z)^{n/2}}{|x-z|^n} \right\} \frac{d(z)^2}{|z-y|^{n+1}}}{\frac{d(x)^2}{|x-y|^n}} \\
&\preceq d(x)^{-\frac{n}{2}} d(z)^{4-\frac{n}{2}-|\alpha|} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^{\frac{n}{2}} d(z)^{\frac{n}{2}}}{|x-z|^n} \right\} |y-z|^{-n-1} (|x-z|^n + |y-z|^n) \\
&\preceq d(z)^{4-|\alpha|} |y-z|^{-n-1} + d(x)^{-\frac{n}{2}} d(z)^{4-\frac{n}{2}-|\alpha|} \left( \frac{d(x)}{d(z)} \right)^{\frac{n}{2}} |y-z|^{-1} \\
&= d(z)^{4-|\alpha|} |y-z|^{-n-1} + d(z)^{4-n-|\alpha|} |y-z|^{-1} \preceq |y-z|^{3-n-|\alpha|}.
\end{aligned}$$

**Der Fall:**  $n = 2$  und  $|\alpha| = 4 - n = 2$ .

$$\begin{aligned}
\frac{|D_z^\alpha G_{2,2}(x, z)| K_2(z, y)}{K_2(x, y)} &\preceq \frac{\log \left( 2 + \frac{d(x)}{|x-z|} \right) \min \left\{ 1, \frac{d(x)^2}{|x-z|^2} \right\} \frac{d(z)^2}{|z-y|^3}}{\frac{d(x)^2}{|x-y|^2}} \\
&\preceq d(x)^{-2} d(z)^2 \left( 1 + \frac{d(x)}{|x-z|} \right) \min \left\{ 1, \frac{d(x)^2}{|x-z|^2} \right\} |y-z|^{-3} (|x-z|^2 + |y-z|^2) \\
&\preceq d(x)^{-2} d(z)^2 \frac{d(x)^2}{|x-z|^2} |y-z|^{-3} |x-z|^2 + d(x)^{-2} d(z)^2 \left( \frac{d(x)}{d(z)} \right)^2 |y-z|^{-1} \\
&\quad + d(x)^{-2} d(z)^2 \frac{d(x)}{|x-z|} \frac{d(x)}{|x-z|} |y-z|^{-3} |x-z|^2 \\
&\quad + d(x)^{-2} d(z)^2 \frac{d(x)}{|x-z|} \frac{d(x)}{d(z)} |y-z|^{-1} \\
&\preceq \frac{d(z)^2}{|y-z|^3} + |y-z|^{-1} + |x-z|^{-1} \frac{d(z)}{|y-z|} \preceq |x-z|^{-1} + |y-z|^{-1}.
\end{aligned}$$

**Der Fall:**  $n = 1, 2, 3$  und  $|\alpha| > 4 - n$ .

Insbesondere ist  $|\alpha| \geq 2$ .

$$\begin{aligned}
\frac{|D_z^\alpha G_{2,n}(x, z)| K_n(z, y)}{K_n(x, y)} &\preceq \frac{|x-z|^{4-n-|\alpha|} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^2}{|x-z|^2} \right\} \frac{d(z)^2}{|z-y|^{n+1}}}{\frac{d(x)^2}{|x-y|^n}} \\
&\preceq d(x)^{-2} d(z)^2 |x-z|^{4-n-|\alpha|} |y-z|^{-n-1} \min \left\{ 1, \frac{d(x)^2}{|x-z|^2} \right\} (|x-z|^n + |y-z|^n) \\
&\preceq d(x)^{-2} d(z)^2 |x-z|^{4-|\alpha|} |y-z|^{-n-1} \frac{d(x)^2}{|x-z|^2} \\
&\quad + d(x)^{-2} d(z)^2 |x-z|^{4-n-|\alpha|} |y-z|^{-1} \frac{d(x)^2}{d(z)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\preceq |x-z|^{2-|\alpha|}|y-z|^{1-n} + |x-z|^{4-n-|\alpha|}|y-z|^{-1} \\ &\preceq |x-z|^{3-n-|\alpha|} + |y-z|^{3-n-|\alpha|}. \end{aligned}$$

**Der Fall:**  $n = 4$  und  $\alpha = 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{G_{2,4}(x,z)K_4(z,y)}{K_4(x,y)} &\preceq \frac{\log\left(2 + \frac{d(z)}{|x-z|}\right) \min\left\{1, \frac{d(x)^2 d(z)^2}{|x-z|^4}\right\} \frac{d(z)^3}{|z-y|^6}}{\frac{d(x)^3}{|x-y|^6}} \\ &\preceq d(x)^{-3} d(z)^3 \log\left(2 + \frac{d(z)}{|x-z|}\right) \min\left\{1, \frac{d(x)^2 d(z)^2}{|x-z|^4}\right\} |y-z|^{-6} \\ &\quad \cdot (|x-z|^6 + |y-z|^6) \\ &\preceq d(x)^{-3} d(z)^3 \left(1 + \frac{d(z)}{|x-z|}\right) \frac{d(x)^2 d(z)^2}{|x-z|^4} |y-z|^{-6} |x-z|^6 \\ &\quad + d(x)^{-3} d(z)^3 \log\left(\frac{3}{|x-z|}\right) \left(\frac{d(x)}{d(z)}\right)^2 \\ &\preceq d(x)^{-1} d(z)^5 |x-z|^2 |y-z|^{-6} + d(x)^{-1} d(z)^6 |x-z| |y-z|^{-6} \\ &\quad + \frac{d(z)}{d(x)} \log\left(\frac{3}{|x-z|}\right) \preceq \frac{1}{d(x)} \left(\log\left(\frac{3}{|x-z|}\right) + |y-z|^{-1} + 1\right). \end{aligned}$$

**Der Fall:**  $n = 4$  und  $|\alpha| > 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{|D_z^\alpha G_{2,4}(x,z)| K_4(z,y)}{K_4(x,y)} &\preceq \frac{|x-z|^{-|\alpha|} \min\left\{1, \frac{d(x)^2 d(z)^{\max\{2-|\alpha|,0\}}}{|x-z|^{2+\max\{2-|\alpha|,0\}}}\right\} \frac{d(z)^3}{|z-y|^6}}{\frac{d(x)^3}{|x-y|^6}} \\ &\preceq d(x)^{-3} d(z)^3 |x-z|^{-|\alpha|} |y-z|^{-6} \min\left\{1, \frac{d(x)^2 d(z)^{\max\{2-|\alpha|,0\}}}{|x-z|^{2+\max\{2-|\alpha|,0\}}}\right\} \\ &\quad \cdot (|x-z|^6 + |y-z|^6) \\ &\preceq d(x)^{-1} d(z)^{3+\max\{2-|\alpha|,0\}} |x-z|^{4-|\alpha|-\max\{2-|\alpha|,0\}} |y-z|^{-6} \\ &\quad + d(x)^{-3} d(z)^3 |x-z|^{-|\alpha|} \left(\frac{d(x)}{d(z)}\right)^2 \\ &\preceq d(x)^{-1} |x-z|^{\min\{2,4-|\alpha|\}} |y-z|^{-\min\{|\alpha|+1,3\}} + d(x)^{-1} d(z) |x-z|^{-|\alpha|}. \end{aligned}$$

Die Betrachtung der verschiedenen Fälle für  $|\alpha|$  und nötigenfalls die Anwendung der Youngschen Ungleichung vollenden den Beweis.  $\blacksquare$

Der vorhergehende Hilfssatz 1.24 erlaubt es, für  $n = 1, 2$  und  $3$  die Stabilität der Positivitätserhaltenden Eigenschaft des Randwertproblems (75) gegen kleine Störungen von  $\Delta^2$  maximal zweiter Ordnung zu zeigen.

**Satz 1.25.** *Sei  $n = 1, 2$  oder  $3$ . Dann gibt es ein  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n) > 0$  derart, daß gilt:*

Seien für  $|\alpha| \leq 2$  Koeffizienten  $b_\alpha \in C^{|\alpha|}(\overline{B})$  mit  $\|b_\alpha\|_{C^{|\alpha|}(\overline{B})} \leq \varepsilon_0$  gegeben. Dann hat das Randwertproblem

$$(84) \quad \begin{cases} \Delta^2 u + \sum_{|\alpha| \leq 2} b_\alpha(x) D^\alpha u = f \text{ in } B, \\ u|_{\partial B} = \psi, \quad -\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial B} = \varphi, \end{cases}$$

für alle  $f \in C^0(\overline{B})$ ,  $\psi \in C^1(\partial B)$ ,  $\varphi \in C^0(\partial B)$  eine Lösung  $u \in W_{\text{loc}}^{4,p}(B) \cap C^1(\overline{B})$ ,  $p > 1$  beliebig, für die aus  $f \geq 0$ ,  $\psi \geq 0$ ,  $\varphi \geq 0$ ,  $f \not\equiv 0$  oder  $\psi \not\equiv 0$  oder  $\varphi \not\equiv 0$ , die Positivität  $u > 0$  in  $B$  folgt.

**Beweis.** Mit Blick auf Folgerung 1.19 und die Linearität des Problems können wir ohne Einschränkung  $f = 0$  und  $\varphi = 0$  annehmen. Sei  $0 \not\equiv \psi \geq 0$ .

Für die Existenz- und Regularitätstheorie verweisen wir auf [Ag] und [ADN].

Wir setzen zunächst zusätzlich  $\psi \in C^{4,\gamma}(\partial B)$  voraus und definieren  $\mathcal{K}_n \psi(x) := \int_{\partial B} K_n(x, y) \psi(y) d\omega(y)$ . Gemäß [ADN] bildet  $\mathcal{K}_n : C^{4,\gamma}(\partial B) \rightarrow C^{4,\gamma}(\overline{B}) \hookrightarrow W^{4,p}(B)$  ab. Dabei wird  $p > 1$  beliebig gewählt. Mit  $\mathcal{A} := \sum_{|\alpha| \leq 2} b_\alpha(\cdot) D^\alpha$  läßt sich die Lösung  $u$  von (84) schreiben als  $u = -\mathcal{G}_{2,n} \mathcal{A} u + \mathcal{K}_n \psi$  bzw.  $(\mathcal{I} + \mathcal{G}_{2,n} \mathcal{A}) u = \mathcal{K}_n \psi$ , dabei fassen wir  $\mathcal{I} + \mathcal{G}_{2,n} \mathcal{A}$  als beschränkten linearen Operator in  $W^{4,p}(B)$  auf. Für hinreichend kleine Koeffizienten von  $\mathcal{A}$  ist  $\mathcal{I} + \mathcal{G}_{2,n} \mathcal{A}$  beschränkt invertierbar, und es gilt:

$$u = (\mathcal{I} + \mathcal{G}_{2,n} \mathcal{A})^{-1} \mathcal{K}_n \psi = \mathcal{K}_n \psi + \sum_{i=1}^{\infty} (-\mathcal{G}_{2,n} \mathcal{A})^i \mathcal{K}_n \psi.$$

Für  $i \geq 1$  integrieren wir partiell. Da  $\mathcal{A}$  Ableitungen maximal zweiter Ordnung enthält und  $G_{2,n}(x, \cdot)$  für jedes  $x \in B$  von zweiter Ordnung auf  $\partial B$  verschwindet, treten keine zusätzlichen Randintegrale auf. Weiter verwenden wir den Satz von Fubini und Tonelli und erhalten für  $x \in B$ :

$$\begin{aligned} (-\mathcal{G}_{2,n} \mathcal{A})^i \mathcal{K}_n \psi(x) &= (-1)^i \int_{z_1 \in B} G_{2,n}(x, z_1) \mathcal{A}_{z_1} \int_{z_2 \in B} G_{2,n}(z_1, z_2) \cdots \\ &\quad \cdots \mathcal{A}_{z_{i-1}} \int_{z_i \in B} G_{2,n}(z_{i-1}, z_i) \mathcal{A}_{z_i} \int_{y \in \partial B} K_n(z_i, y) \psi(y) d\omega(y) dz_i \cdots dz_1 \\ &= (-1)^i \int_{z_1 \in B} (\mathcal{A}_{z_1}^* G_{2,n}(x, z_1)) \int_{z_2 \in B} (\mathcal{A}_{z_2}^* G_{2,n}(z_1, z_2)) \cdots \\ &\quad \cdots \int_{z_i \in B} (\mathcal{A}_{z_i}^* G_{2,n}(z_{i-1}, z_i)) \int_{y \in \partial B} K_n(z_i, y) \psi(y) d\omega(y) dz_i \cdots dz_1 \\ &= (-1)^i \int_B \cdots \int_B \int_{\partial B} (\mathcal{A}_{z_1}^* G_{2,n}(x, z_1)) (\mathcal{A}_{z_2}^* G_{2,n}(z_1, z_2)) \cdots \\ &\quad \cdots (\mathcal{A}_{z_i}^* G_{2,n}(z_{i-1}, z_i)) K_n(z_i, y) \psi(y) d\omega(y) d(z_1, \dots, z_i), \end{aligned}$$

dabei ist  $\mathcal{A}^* \cdot = \sum_{|\alpha| \leq 2} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (b_\alpha \cdot)$  der zur Störung  $\mathcal{A}$  (formal) adjungierte Operator. Aufgrund der 3-G-artigen Abschätzungen (81) aus Hilfssatz 1.24 folgt weiter mit

einer von  $i$  unabhängigen Konstanten  $C_0 = C_0(n)$ :

$$\begin{aligned}
\left| (-\mathcal{G}_{2,n}\mathcal{A})^i \mathcal{K}_n \psi(x) \right| &\leq \int_{\partial B} \int_B \cdots \int_B K_n(x, y) \frac{|\mathcal{A}_{z_1}^* G_{2,n}(x, z_1)| K_n(z_1, y)}{K_n(x, y)} \\
&\quad \cdot \frac{|\mathcal{A}_{z_2}^* G_{2,n}(z_1, z_2)| K_n(z_2, y)}{K_n(z_1, y)} \cdots \\
&\quad \cdots \frac{|\mathcal{A}_{z_i}^* G_{2,n}(z_{i-1}, z_i)| K_n(z_i, y)}{K_n(z_{i-1}, y)} \psi(y) d(z_1, \dots, z_i) d\omega(y) \\
&\leq (C_0 \varepsilon_0)^i \int_{\partial B} K_n(x, y) \psi(y) d\omega(y) = (C_0 \varepsilon_0)^i (\mathcal{K}_n \psi)(x).
\end{aligned}$$

Indem  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n) > 0$  hinreichend klein gewählt wird, folgt völlig analog zum Beweis von Satz 1.14:

$$(85) \quad u \geq \frac{1}{C} \mathcal{K}_n \psi > 0;$$

zunächst unter der Zusatzvoraussetzung  $\psi \in C^{4,\gamma}(\partial B)$ . Die Abschätzung (85), und damit die Behauptung des Satzes für  $\psi \in C^1(\partial B)$ , folgt durch Approximation unter Verwendung der  $C^1$ -Abschätzungen aus [Ag] und der lokalen  $L^p$ -Abschätzungen aus [ADN, §15].  $\blacksquare$

## 1.2 Resultate für zwei Raumdimensionen

Wie bereits in der Einleitung 0.1 und zu Beginn des Kapitels 1 erwähnt, lassen sich in zwei Raumdimensionen weiterreichende Resultate als bei allgemeinem  $n$  herleiten: Auch die nur “annähernd” kreisförmige Platte biegt sich überall nach unten durch, falls die Belastung überall nach unten wirkt. D.h., für  $n = 2$  können auch Störungen des Gebietes und darüber hinaus, was aber hier modulo Theorie der Normalformen elliptischer Differentialoperatoren zweiter Ordnung dazu äquivalent ist, auch der führenden Koeffizienten zugelassen werden. Wir betrachten also hier das Dirichletproblem:

$$(86) \quad \begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m-1, \end{cases}$$

wobei

$$(87) \quad Lu := \left( - \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right)^m u + \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} b_\alpha(x) D^\alpha u,$$

$a_{ij} = a_{ji} \in C^{2m-1,\gamma}(\overline{\Omega})$ ,  $b_\alpha \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ . Wir führen zunächst einen für unsere Zwecke geeigneten Begriff der Nähe von Gebieten bzw. von Differentialoperatoren zu einander ein.



**Definition 1.3.** Seien  $\Omega^*, \Omega$  beschränkte,  $C^{k,\gamma}$ -glatte Gebiete,  $\varepsilon > 0$ . Wir nennen  $\Omega$   $\varepsilon$ -nahe zu  $\Omega^*$  im  $C^{k,\gamma}$ -Sinn, falls es eine surjektive Abbildung  $g : \overline{\Omega^*} \rightarrow \overline{\Omega}$ ,  $g \in C^{k,\gamma}(\overline{\Omega^*})$ , gibt mit

$$\|g - Id\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega^*})} \leq \varepsilon.$$

**Bemerkung.** Für konvexes  $\Omega^*$ ,  $k \geq 1$  und hinreichend kleines  $\varepsilon$  existiert  $g^{-1} \in C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$  und erfüllt  $\|g^{-1} - Id\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ .

**Definition 1.4.** Sei  $\varepsilon > 0$ . Der Operator  $L$  aus (87) heißt  $\varepsilon$ -nahe zu  $(-\Delta)^m$  im  $C^{k,\gamma}$ -Sinn, falls nötigenfalls zusätzlich  $a_{ij} \in C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$  gilt, und sofern die Abschätzungen

$$\|a_{ij} - \delta_{ij}\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon,$$

$$\|b_\alpha\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon \text{ für } |\alpha| \leq 2m - 1$$

erfüllt sind.

**Bemerkung.** Für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  ist  $L$  gleichmäßig elliptisch.

Das folgende Resultat legt zusammen mit den Gegenbeispielen aus [Ga1] und [CD] die Interpretation nahe, daß ein ähnlich gleichmäßiges “Biegungsverhalten” des Randes  $\partial\Omega$  wie beim Kreis  $\partial B$  zu positiver Greenscher Funktion führt, während starke Schwankungen im “Biegungsverhalten” von  $\partial\Omega$  zu Vorzeichenwechseln Anlaß geben. Die Frage, ob möglicherweise die Krümmung  $\kappa$  bzw. ihre Abweichung von der Konstanten 1 selbst schon über die Positivität der Greenschen Funktion entscheidet, muß hier offen bleiben. Die im folgenden verwendeten Techniken lassen eine Beantwortung dieser geometrisch naheliegenden Frage nicht zu.

**Satz 1.26.** Es gibt ein  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m) > 0$  derart, daß für  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$  gilt:

Das beschränkte,  $C^{2m,\gamma}$ -glatte Gebiet  $\Omega$  sei  $\varepsilon$ -nahe zu  $B$  im  $C^{2m}$ -Sinn. Der Differentialoperator  $L$  aus (87) sei  $\varepsilon$ -nahe zu  $(-\Delta)^m$  im  $C^{2m-1,\gamma}$ -Sinn. Dann besitzt das Randwertproblem (86) für jedes  $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$  eine Lösung  $u \in C^{2m,\gamma}(\overline{\Omega})$ , die für nicht-triviale nichtnegative rechte Seite  $0 \neq f \geq 0$  strikt positiv ausfällt:

$$u > 0 \text{ in } \Omega.$$

**Bemerkungen.** 1) Sei  $E_{a,b}$  eine Ellipse mit Halbachsen  $a, b > 0$ . Bei mäßiger Exzentrizität, d.h.  $\frac{a}{b} \approx 1$ , ist die Greensche Funktion zu  $\Delta^2$  in  $E_{a,b}$  positiv, während sie gemäß dem Beispiel von Garabedian [Ga1] bei größerer Exzentrizität, etwa  $\frac{a}{b} \approx 2$ , das Vorzeichen wechselt.

2) Der Beweis von Satz 1.26 wird die Vermutung nahelegen, daß für wachsendes  $m \nearrow \infty$  notwendigerweise  $\varepsilon_0(m) \searrow 0$  gilt.

Zum Beweis von Satz 1.26 gehen wir in drei Schritten vor:

1. Zunächst betrachten wir  $a_{ij} = \delta_{ij}$  und Gebiete  $\Omega$ , die dem Kreis in einem konformen Sinne nahe sind. In diesem Fall kann die Behauptung mit Hilfe konformer Abbildungen, die den Hauptteil  $(-\Delta)^m$  invariant lassen, aus Satz 1.14 gefolgert werden, s. Hilfssatz 1.27.
2. Konforme Abbildungen  $B \rightarrow \Omega$  können auf eine Weise charakterisiert werden, die es erlaubt, "differenzierbare" Nähe in "konforme" Nähe umzusetzen, s. Hilfssatz 1.28.
3. Die Theorie der Normalformen für elliptische Operatoren zweiter Ordnung gestattet es, unter Inkaufnahme einer weiteren (kleinen) Störung des Gebietes die führenden Koeffizienten  $a_{ij}$  in  $\delta_{ij}$  zu transformieren, s. Hilfssatz 1.29.

Ebenso wie die Theorie konformer Abbildungen steht die Reduktion beliebiger elliptischer Differentialoperatoren zweiter Ordnung auf Normalform nur in zwei Raumdimensionen zur Verfügung.

### 1.2.1 Störungen des Gebiets

**Hilfssatz 1.27.** *Es gibt ein  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(m) > 0$  derart, daß gilt:*

*Sei  $\Omega$  ein einfach zusammenhängendes, beschränktes,  $C^{2m,\gamma}$ -glattes Gebiet. Der Differentialoperator  $L$  sei wie in (87), jedoch mit  $a_{ij} = \delta_{ij}$ . Ferner sei  $h : B \rightarrow \Omega$  eine biholomorphe Abbildung mit  $h \in C^{2m,\gamma}(\overline{B})$ ,  $h^{-1} \in C^{2m,\gamma}(\overline{\Omega})$ .*

*Falls die Bedingung  $\|h - Id\|_{C^{2m-1}(\overline{B})} \leq \varepsilon_1$  sowie  $\|b_\alpha\|_{C^0(\overline{B})} \leq \varepsilon_1$  für alle  $|\alpha| \leq 2m-1$  erfüllt ist, so existiert die Greensche Funktion  $G_{m,\Omega,L}$  zum Randwertproblem (86) in  $\Omega$  und ist positiv.*

**Beweis.** Um den entsprechenden, im Kreis  $B$  gültigen Satz 1.14 anwenden zu können, soll das Randwertproblem (86) nach  $B$  "zurückgeholt" werden. Entscheidend wird dabei die Beobachtung sein, daß konforme Abbildungen den Hauptteil  $(-\Delta)^m$  invariant lassen und lediglich zu zusätzlichen Termen niederer Ordnung führen.

Sei  $\varepsilon := \max \left\{ \max_{|\alpha| \leq 2m-1} \|b_\alpha\|_{C^0(\overline{\Omega})}, \|h - Id\|_{C^{2m-1}(\overline{B})} \right\}$  hinreichend klein. Für die zurückgeholte Lösung  $v : \overline{B} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v(x) := u(h(x))$  ist wegen  $\Delta v(x) = \frac{1}{2} |\nabla h(x)|^2 ((\Delta u) \circ h)(x)$  das Randwertproblem

$$\begin{cases} \left( -\frac{2}{|\nabla h|^2} \Delta \right)^m v + \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} \hat{b}_\alpha D^\alpha v = f \circ h & \text{in } B, \\ D^\alpha v|_{\partial B} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m-1, \end{cases}$$

mit geeigneten Koeffizienten  $\hat{b}_\alpha \in C^{0,\gamma}(\overline{B})$ ,  $\|\hat{b}_\alpha\|_{C^0(\overline{B})} = \mathcal{O}(\varepsilon)$  zu betrachten. Ausdifferenzieren der Potenz  $\left( -\frac{2}{|\nabla h|^2} \Delta \right)^m$  ergibt zusätzliche Koeffizienten  $D^\alpha \left( \frac{1}{|\nabla h|^2} \right)$  mit  $0 < |\alpha| \leq 2m-2$  für die Terme niederer Ordnung, der führende Term lautet  $\left( \frac{2}{|\nabla h|^2} \right)^m$

$(-\Delta)^m v$ . Dabei ist  $\|\frac{2}{|\nabla h|^2} - 1\|_{C^{2m-2}(\overline{B})} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ . Wir erhalten also für  $v$  ein Randwertproblem

$$\begin{cases} (-\Delta)^m v + \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} \tilde{b}_\alpha D^\alpha v = \tilde{f} & \text{in } B, \\ D^\alpha v|_{\partial B} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m-1, \end{cases}$$

mit  $\tilde{f} := \left(\frac{|\nabla h|^2}{2}\right)^m \cdot f \circ h$  und geeigneten Koeffizienten  $\tilde{b}_\alpha \in C^{0,\gamma}(\overline{B})$ , die der Abschätzung  $\|\tilde{b}_\alpha\|_{C^0(\overline{B})} = \mathcal{O}(\varepsilon)$  genügen. Offensichtlich ist  $0 \not\equiv f \geq 0$  in  $\Omega \Leftrightarrow 0 \not\equiv \tilde{f} \geq 0$  in  $B$ . Somit übertragen sich für hinreichend kleines  $\varepsilon$  alle Aussagen von Satz 1.14 auf das Randwertproblem (86).  $\blacksquare$

Der Riemannsche Abbildungssatz zusammen mit den Resultaten von Kellogg-Warschawski, dazu s. z.B. [Pom], zeigt, daß konforme Abbildungen, die den qualitativen Anforderungen aus Hilfssatz 1.27 genügen, unter den dort formulierten Voraussetzungen an das Gebiet  $\Omega$  stets existieren.

Selbst bei sehr einfachen Gebieten ist jedoch die explizite Angabe solcher konformen Abbildungen  $h : B \rightarrow \Omega$  und vor allem die Überprüfung der Kleinheitsbedingung an  $\|h - Id\|_{C^{2m-1}(\overline{B})}$  zumindest ausgesprochen schwierig. Für Ellipsen beispielsweise wurden solche Abbildungen von H. A. Schwarz [Schw] unter Verwendung elliptischer Funktionen konstruiert.

Hilfssatz 1.27 ist also so wenig praktikabel. Es ist daher naheliegend, “konforme” Nähe von Gebieten in “differenzierbare” Nähe zu übersetzen.

**Hilfssatz 1.28.** *Sei  $\varepsilon_1 > 0$  gegeben,  $m > 1$ . Dann existiert ein  $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(m, \varepsilon_1) > 0$  derart, daß für  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2$  gilt:*

*Ist das  $C^{2m,\gamma}$ -glatte Gebiet  $\Omega$   $\varepsilon$ -nahe zu  $B$  im  $C^{2m}$ -Sinn, so existiert eine biholomorphe Abbildung  $h : B \rightarrow \Omega$ ,  $h \in C^{2m,\gamma}(\overline{B})$ ,  $h^{-1} \in C^{2m,\gamma}(\overline{\Omega})$  mit*

$$\|h - Id\|_{C^{2m-1}(\overline{B})} \leq \varepsilon_1.$$

**Beweis.** Sei  $g : \overline{B} \rightarrow \overline{\Omega}$  eine Abbildung gemäß Definition 1.3 mit  $\varepsilon := \|g - Id\|_{C^{2m}(\overline{B})}$ . Für das folgende nehmen wir stets  $\varepsilon \geq 0$  als hinreichend klein an.  $\Omega$  ist dann insbesondere einfach zusammenhängend und beschränkt,  $0 \in \Omega$ .

Gemäß [Cou], vgl. auch [Swe2, Sect. 4.2], läßt sich eine biholomorphe Abbildung  $h : B \rightarrow \Omega$  mit  $h \in C^{2m,\gamma}(\overline{B})$ ,  $h^{-1} \in C^{2m,\gamma}(\overline{\Omega})$  wie folgt konstruieren:

Bezeichne  $G_{1,\Omega}$  die Greensche Funktion zu  $-\Delta$  in  $\Omega$  unter Dirichletrandbedingungen. Wir setzen für  $x \in \overline{\Omega}$

$$w(x) := 2\pi G_{1,\Omega}(x, 0)$$

sowie die konjugiert harmonische Funktion

$$w^*(x) := \int_{1/2}^x \left( -\frac{\partial}{\partial \xi_2} w(\xi) d\xi_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_1} w(\xi) d\xi_2 \right),$$

dabei wird das Integral längs irgendeiner Kurve von  $\frac{1}{2}$  nach  $x$  in  $\Omega \setminus \{0\}$  berechnet,  $w^*$  ist bis auf ganzzahlige Vielfache von  $2\pi$  wohldefiniert. Indem wir  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{C}$  identifizieren, erhalten wir durch

$$h^{-1}(x) := \exp(-w(x) - iw^*(x)), \quad x \in \overline{\Omega},$$

eine wohldefinierte holomorphe Abbildung  $\overline{\Omega} \rightarrow \overline{B}$  mit den gewünschten qualitativen Eigenschaften. Ferner ist  $h^{-1}(0) = 0$  und  $\frac{1}{2}$  wird auf die positive reelle Halbachse abgebildet.

Die Greensche Funktion  $G_{1,\Omega}$  wird durch

$$G_{1,\Omega}(x, 0) = -\frac{1}{2\pi} (\log |x| - r(x)), \quad x \in \overline{\Omega},$$

gegeben, wobei  $r : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  dem Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta r = 0 & \text{in } \Omega, \\ r(x) = \varphi(x) & \text{auf } \partial\Omega, \quad \varphi(x) := \log |x|, \end{cases}$$

genügt. Es reicht,

$$(88) \quad \|r\|_{C^{2m-1}(\overline{\Omega})} = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

zu zeigen, denn aufgrund von

$$h^{-1}(x) = x \cdot \exp(-r(x) - ir^*(x)), \quad x \in \overline{\Omega},$$

folgt dann  $\|h^{-1} - Id\|_{C^{2m-1}(\overline{\Omega})} = \mathcal{O}(\varepsilon)$  und schließlich auch  $\|h - Id\|_{C^{2m-1}(\overline{B})} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ . Die Abschätzung  $\|r\|_{C^0(\overline{\Omega})} = \mathcal{O}(\varepsilon)$  ist dabei aufgrund des Maximumprinzips offensichtlich.

Wir nehmen zunächst an, daß  $\varphi|_{\partial\Omega}$  so durch  $\hat{\varphi} \in C^{2m}(\overline{\Omega})$  fortgesetzt werden kann, daß

$$(89) \quad \|\hat{\varphi}\|_{C^{2m}(\overline{\Omega})} = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

gilt. Dann folgt aus den Schauder-Abschätzungen [ADN, Theorem 7.3], [GT, Chapt. 6.4] für höhere Normen von Lösungen harmonischer Randwertprobleme:  $\|r\|_{C^{2m-1,\gamma}(\overline{\Omega})} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ . Dabei ist zu beachten, daß wegen der  $\varepsilon$ -Nähe von  $\Omega$  zu  $B$  im  $C^{2m}$ -Sinn die Abschätzkonstanten für hinreichend kleine  $\varepsilon$  unabhängig von  $\varepsilon$  gewählt werden können.

Es bleibt also zu zeigen, daß Fortsetzungen  $\hat{\varphi}$  von  $\varphi|_{\partial\Omega}$ , die (89) genügen, auch tatsächlich existieren. Dafür sind nur die ‘‘Tangentialableitungen’’ von  $\varphi|_{\partial\Omega}$  abzuschätzen, d.h. es reicht, für die mit Hilfe der Abbildung  $g|_{\partial B} : \partial B \rightarrow \partial\Omega$  und der Parametrisierung von  $\partial B$  ‘‘abgewickelten’’ Randdaten

$$\psi(t) := \varphi(g(\cos t, \sin t))$$

zu zeigen:

$$(90) \quad \max_{j=0,\dots,2m} \max_{t \in \mathbb{R}} \left| \left( \frac{d}{dt} \right)^j \psi \right| = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Für  $j = 0$  ist dieses wegen  $\|g - Id\|_{C^0(\overline{B})} = \mathcal{O}(\varepsilon)$  und wegen  $|\log(1 + \varepsilon)| = \mathcal{O}(\varepsilon)$  offensichtlich. Bezeichne  $\tilde{g}(t) = g(\cos t, \sin t)$ ,  $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \partial\Omega$ . Für  $j \geq 1$  folgt durch eine allgemeine Kettenregel:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} \right)^j \psi &= \left( \frac{d}{dt} \right)^j (\varphi \circ \tilde{g}) \\ &= \sum_{|\alpha|=1}^j ((D^\alpha \varphi) \circ \tilde{g}) \left( \sum_{\substack{p_1+\dots+p_{|\alpha|}=j \\ 1 \leq p_l}} d_{j,\alpha,\vec{p}} \prod_{l=1}^{|\alpha|} \left( \frac{d}{dt} \right)^{p_l} \tilde{g}^{(\beta_l)} \right) \end{aligned}$$

mit geeigneten Koeffizienten  $d_{j,\alpha,\vec{p}}$ ,  $\beta_l = 1$  für  $l = 1, \dots, \alpha_1$  und  $\beta_l = 2$  für  $l = \alpha_1 + 1, \dots, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ . Um zu zeigen, daß diese zunächst recht unübersichtliche Summe  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  ist, ist die Beobachtung wesentlich, daß diese Summe gleich 0 ist, falls  $\Omega = B$  und  $g = Id$  ist. Wir setzen also  $\tilde{g}_0(t) = Id \circ (\cos t, \sin t) = (\cos t, \sin t)$  und vergleichen einander entsprechende Terme:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} \right)^j \psi &= \sum_{|\alpha|=1}^j \left( ((D^\alpha \varphi) \circ \tilde{g} - (D^\alpha \varphi) \circ \tilde{g}_0) + (D^\alpha \varphi) \circ \tilde{g}_0 \right) \\ &\quad \times \left( \sum_{\substack{p_1+\dots+p_{|\alpha|}=j \\ 1 \leq p_l}} d_{j,\alpha,\vec{p}} \prod_{l=1}^{|\alpha|} \left( \left( \frac{d}{dt} \right)^{p_l} \tilde{g}^{(\beta_l)} - \left( \frac{d}{dt} \right)^{p_l} \tilde{g}_0^{(\beta_l)} \right) + \left( \frac{d}{dt} \right)^{p_l} \tilde{g}_0^{(\beta_l)} \right). \end{aligned}$$

Wie bereits bemerkt, ist wegen  $\varphi(\tilde{g}_0(t)) = \log |(\cos t, \sin t)| \equiv 0$  die Summe über alle diejenigen Terme, die nur  $\tilde{g}_0$  (und keine Differenz) enthalten, gleich 0. In der verbleibenden Summe enthält jeder Term wenigstens einen Faktor der Art

$$(D^\alpha \varphi) \circ \tilde{g} - (D^\alpha \varphi) \circ \tilde{g}_0 \quad \text{oder} \quad \left( \frac{d}{dt} \right)^{p_l} \left( \tilde{g}^{(\beta_l)} - \tilde{g}_0^{(\beta_l)} \right).$$

Für hinreichend kleines  $\varepsilon$  ist jeder dieser Faktoren  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , und die übrigen Faktoren bleiben unabhängig von  $\varepsilon$  gleichmäßig beschränkt. Es folgt (90) und damit die Behauptung des Hilfssatzes.  $\blacksquare$

### 1.2.2 Störungen des Hauptteils

Bezeichne

$$(91) \quad L_0 u = - \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad a_{ij} = a_{ji} \in C^{2m-1,\gamma}(\overline{\Omega}),$$

den Operator zweiter Ordnung, dessen  $m$ -te Potenz den Hauptteil des zu untersuchenden Operators  $L$  in (87) bildet. Durch eine geeignete Koordinatentransformation  $(x_1, x_2) \mapsto (\xi_1, \xi_2)$ ,  $\Omega \rightarrow \Omega^*$  läßt sich (91) in Normalform

$$(92) \quad \tilde{L}_0 v = -A(\xi)\Delta v - B_1(\xi)\frac{\partial v}{\partial \xi_1} - B_2(\xi)\frac{\partial v}{\partial \xi_2}$$

transformieren, s. z.B. [Ga2, pp. 66-68]. Dadurch wird der Operator  $L$  in eine Hilfssatz 1.27 gemäße Form  $\tilde{L}$  transformiert. Wir haben hier zu prüfen, ob  $\tilde{L}$  "nahe"  $(-\Delta)^m$  bzw.  $\Omega^*$  "nahe"  $B$  bleibt, falls entsprechendes für  $L$  bzw.  $\Omega$  vorausgesetzt wird. Die neuen Koordinaten  $\xi_1 = \varphi(x_1, x_2)$ ,  $\xi_2 = \psi(x_1, x_2)$  werden durch das Beltrami-System:

$$(93) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{a_{21}\psi_{x_1} + a_{22}\psi_{x_2}}{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = -\frac{a_{11}\psi_{x_1} + a_{12}\psi_{x_2}}{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}},$$

in  $\Omega$  gegeben. Angenommen, wir hätten bereits eine bijektive, wenigstens zweimal stetig differenzierbare Transformation

$$(94) \quad \Phi = (\varphi, \psi) : \Omega \rightarrow \Omega^*$$

gefunden, dann rechnet man mit [Ga2] nach, daß

$$(95) \quad L_0 u = (\tilde{L}_0 v) \circ \Phi$$

gilt, wobei

$$(96) \quad \begin{cases} v(\xi_1, \xi_2) &= u \circ \Phi^{-1}(\xi_1, \xi_2), \\ A(\Phi(x)) &= a_{11}(x)\varphi_{x_1}^2 + 2a_{12}(x)\varphi_{x_1}\varphi_{x_2} + a_{22}(x)\varphi_{x_2}^2 \\ &= a_{11}(x)\psi_{x_1}^2 + 2a_{12}(x)\psi_{x_1}\psi_{x_2} + a_{22}(x)\psi_{x_2}^2 > 0, \\ B_1(\Phi(x)) &= a_{11}(x)\varphi_{x_1x_1} + 2a_{12}(x)\varphi_{x_1x_2} + a_{22}(x)\varphi_{x_2x_2}, \\ B_2(\Phi(x)) &= a_{11}(x)\psi_{x_1x_1} + 2a_{12}(x)\psi_{x_1x_2} + a_{22}(x)\psi_{x_2x_2} \end{cases}$$

gesetzt wird.

Wir bestimmen zunächst  $\psi$  als Lösung des Randwertproblems:

$$(97) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{a_{11}\psi_{x_1} + a_{12}\psi_{x_2}}{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{a_{21}\psi_{x_1} + a_{22}\psi_{x_2}}{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}} \right) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \psi(x) = x_2 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

und rekonstruieren dann  $\varphi$  mit Hilfe der Beltrami-Gleichungen (93) und der Normierung  $\varphi(0) = 0$ .

In unserer speziellen Situation lassen sich die benötigten Resultate über die Transformation  $\Phi$  leicht direkt nachweisen:

**Hilfssatz 1.29.** Sei  $\varepsilon_2 > 0$  gegeben. Dann existiert ein  $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(m, \varepsilon_2)$  derart, daß für  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_3$  das folgende gilt:

Sei das  $C^{2m, \gamma}$ -glatte Gebiet  $\Omega$   $\varepsilon$ -nahe zu  $B$  im  $C^{2m}$ -Sinn. Der Operator  $L$  aus (87) sei  $\varepsilon$ -nahe zu  $(-\Delta)^m$  im  $C^{2m-1, \gamma}$ -Sinn.

Dann gilt für die in (93), (94) und (97) erklärte Transformation  $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega^* = \Phi(\Omega)$ :

$$\begin{aligned} \Phi \text{ ist bijektiv, } \Phi &\in C^{2m, \gamma}(\overline{\Omega}), \Phi^{-1} \in C^{2m, \gamma}(\overline{\Omega^*}), \\ \Omega^* &\text{ ist } \varepsilon_2\text{-nahe zu } B \text{ im } C^{2m}\text{-Sinn.} \end{aligned}$$

Mit der Setzung  $v := u \circ \Phi^{-1}$ , vgl. (96), transformiert sich das Randwertproblem

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m-1, \end{cases}$$

in das Randwertproblem

$$\begin{cases} \hat{L}v = A^{-m} \cdot (f \circ \Phi^{-1}) & \text{in } \Omega^*, \\ D^\alpha v|_{\partial\Omega^*} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m-1. \end{cases}$$

Dabei ist  $\hat{L}v = (-\Delta)^m v + \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} \hat{b}_\alpha(\cdot) D^\alpha v$  mit geeigneten Koeffizientenfunktionen  $\hat{b}_\alpha \in C^{0, \gamma}(\overline{\Omega^*})$  derart, daß für alle  $|\alpha| \leq 2m-1$  die Kleinheitsbedingung

$$\|\hat{b}_\alpha\|_{C^0(\overline{\Omega^*})} \leq \varepsilon_2$$

erfüllt ist.

**Beweis.** Wir können stets  $\varepsilon$  als hinreichend klein und folglich insbesondere  $\Omega$  als beschränkt und gleichmäßig konvex annehmen. Wir betrachten zunächst das Randwertproblem (97), das wegen  $\|a_{ij} - \delta_{ij}\|_{C^{2m-1, \gamma}(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon$  gleichmäßig elliptisch mit Koeffizienten in  $C^{2m-1, \gamma}(\overline{\Omega})$  ist. Nun zeigen Existenz- und Regularitätstheorie [ADN, chapt. 7], [GT, chapt. 6], daß wegen der  $C^{2m, \gamma}$ -Glattheit von  $\Omega$  eine Lösung  $\psi \in C^{2m, \gamma}(\overline{\Omega})$  von (97) existiert. Diese Differentialgleichung ist gleichzeitig die Integrabilitätsbedingung für (93) im konvexen Gebiet  $\Omega$ ; das Beltrami-System läßt sich also mit einem  $\varphi \in C^{2m, \gamma}(\overline{\Omega})$ ,  $\varphi(0) = 0$  auflösen.

Nun zur quantitativen Untersuchung der Abbildung  $\Phi = (\varphi, \psi)$ . Dazu betrachten wir zunächst die Differenz:  $\Psi(x) := \psi(x) - x_2$ . Diese Hilfsfunktion  $\Psi$  genügt dem Randwertproblem:

$$(98) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{a_{11}\Psi_{x_1} + a_{12}\Psi_{x_2}}{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{a_{21}\Psi_{x_1} + a_{22}\Psi_{x_2}}{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}} \right) \\ = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{a_{22}}{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}} \right) =: F(x_1, x_2) \\ = \mathcal{O}(\varepsilon) \text{ in } C^{2m-2, \gamma}(\overline{\Omega}), \\ \Psi|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Die Schauder-Abschätzungen für die Normen höherer Ordnung liefern, s. [ADN, Theorem 7.3]:

$$\begin{aligned} \|\psi - x_2\|_{C^{2m,\gamma}(\overline{\Omega})} &= \|\Psi\|_{C^{2m,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C(\Omega)\|F\|_{C^{2m-2,\gamma}(\overline{\Omega})}, \\ (99) \quad \|\psi - x_2\|_{C^{2m}(\overline{\Omega})} &\leq C\|F\|_{C^{2m-2,\gamma}(\overline{\Omega})}. \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, daß die  $C^{2m-1,\gamma}(\overline{\Omega})$ -Normen der Koeffizienten in (98) unabhängig von  $\varepsilon$  beschränkt sind; die Elliptizitätsmoduln sind gleichmäßig nahe 1. Wegen der gleichmäßigen  $C^{2m}$ -Nähe der Gebiete zum Kreis  $B$  schließlich kann unabhängig von  $\Omega$  in (99) eine feste Abschätzungskonstante gewählt werden. Durch Beachtung von (93) folgt insgesamt:

$$(100) \quad \|\Phi - Id\|_{C^{2m}(\overline{\Omega})} = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

damit die Bijektivität von  $\Phi$ , die qualitativen Aussagen über  $\Phi^{-1}$  und  $\Omega^* = \Phi(\Omega)$ , sowie

$$(101) \quad \|\Phi^{-1} - Id\|_{C^{2m}(\overline{\Omega^*})} = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Es sind noch die Eigenschaften des transformierten Differentialoperators  $\hat{L}$  zu untersuchen. Aus (95) folgt:

$$\begin{aligned} Lu &= L_0^m u + \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} b_\alpha D^\alpha u \\ &= \left\{ \tilde{L}_0^m v + \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} (b_\alpha \circ \Phi^{-1}) \cdot (D^\alpha(v \circ \Phi)) \circ \Phi^{-1} \right\} \circ \Phi \\ &= \left\{ \tilde{L}_0^m v + \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} \tilde{b}_\alpha D^\alpha v \right\} \circ \Phi =: \left\{ A^m \cdot \hat{L}v \right\} \circ \Phi. \end{aligned}$$

Dabei treten in den neuen Koeffizienten  $\tilde{b}_\alpha$  zusätzlich höchstens  $(2m-1)$ -te Ableitungen von  $\Phi$  auf, also ist  $\|\tilde{b}_\alpha\|_{C^0(\overline{\Omega^*})} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ . Schließlich ist  $\tilde{L}_0 v = -A\Delta v - B_1 \frac{\partial v}{\partial \xi_1} - B_2 \frac{\partial v}{\partial \xi_2}$ , wir benötigen also noch:

$$\|A - 1\|_{C^{2m-2}(\overline{\Omega^*})} = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \|B_j\|_{C^{2m-2}(\overline{\Omega^*})} = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Das ergibt sich jedoch anhand der Definition (96) von  $A, B_1, B_2$  aus den bereits bewiesenen Eigenschaften (100) und (101) von  $\Phi$  und den Voraussetzungen an die Koeffizienten  $a_{ij}$ . ■

**Beweis von Satz 1.26.** Wir verwenden die Hilfssätze 1.27-1.29 und können dabei o.B.d.A.  $m > 1$  annehmen. ■

**Bemerkung.** Ähnlich wie im Abschnitt 1.1.5 lassen sich auch hier Aussagen über das qualitative Randverhalten von Lösungen gewinnen. Indem man die hier in  $\Omega$  zu untersuchenden Randwertprobleme mittels der oben diskutierten Abbildungstheorie auf



Folgerung 1.20 statt auf Satz 1.14 zurückspielt, bleibt die Aussage von Folgerung 1.20 über das Vorzeichen der  $m$ -ten Ableitung der Lösung auf dem Rand  $\partial\Omega$  bei homogener Vorgabe der Dirichletdaten auch unter den Voraussetzungen des Satzes 1.26 richtig.

Ist man umgekehrt an dem Einfluß des Vorzeichens von  $D^{m-1}u|_{\partial\Omega}$  bei gleichzeitiger homogener Vorgabe der ersten  $(m-2)$  Ableitungen auf  $\partial\Omega$  auf das Vorzeichen der Lösung in  $\Omega$  interessiert, so ist sicherzustellen, daß  $L^*$  den Voraussetzungen von Satz 1.26 genügt. Ist also  $\Omega$  nahe  $B$  im  $C^{2m}$ -Sinn,  $L$  nahe  $(-\Delta)^m$  im  $C^{2m}$ -Sinn,  $b_\alpha \in C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})$  und  $\|b_\alpha\|_{C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})}$  klein, so bleibt die Aussage von Folgerung 1.19 erhalten.

Die weitergehenden Aussagen aus Abschnitt 1.1.5 über den Einfluß von  $u|_{\partial B}$  auf das Vorzeichen von  $u$  in  $B$  bei Randwertproblemen vierter Ordnung können mit den hier entwickelten Methoden nicht auf die Situation von Satz 1.26 übertragen werden, denn in dem relevanten Satz 1.25 können nur Störungen maximal zweiter Ordnung behandelt werden. Entscheidend wäre jedoch die Stabilität der Positivitätserhaltenden Eigenschaft gegen Störungen zweithöchster, d.h. dritter Ordnung.

### 1.3 Lokales Maximumprinzip für Differentialungleichungen

Die bezüglich des Gebietes globalen und bezüglich der zulässigen Klasse von Operatoren lokalen Vergleichssätze aus Kapitel 1.1 lassen sich ummünzen in lokale Maximumprinzipien für Differentialungleichungen, die für eine große Klasse von Operatoren gelten: Störungen niedriger Ordnung werden keinen quantitativen Einschränkungen mehr unterworfen.

Wir betrachten beschränkte,  $C^{2m,\gamma}$ -glatte Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und Differentialoperatoren  $L$  der Art

$$(102) \quad Lu := \left( - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right)^m u + \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} b_\alpha(\cdot) D^\alpha u$$

mit konstanten führenden Koeffizienten  $a_{ij} = a_{ji}$ , die der Elliptizitätsbedingung

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n : \quad \lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \Lambda |\xi|^2$$

mit den Elliptizitätsmoduln  $0 < \lambda \leq \Lambda$  genügen, und mit glatten Koeffizienten niedriger Ordnung:

$$b_\alpha \in C^{|\alpha|,\gamma}(\bar{\Omega}).$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt:

**Satz 1.30.** *Sei  $q \geq 1$ ,  $q > \frac{n}{2m}$ ;  $K \subset \Omega$  sei eine kompakte Teilmenge.*

*Dann existiert eine Konstante  $C = C\left(n, m, \lambda, \Lambda, q, \max_{|\alpha| \leq 2m-1} \|b_\alpha\|_{C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})}, \text{dist}(K, \partial\Omega)\right)$  derart, daß für jede Unterlösung  $u \in C^{2m}(\bar{\Omega})$ ,  $f \in C^0(\bar{\Omega})$  der Differentialungleichung*

$$Lu \leq f$$

die lokale Maximumabschätzung gilt:

$$(103) \sup_K u \leq C \left\{ \|f^+\|_{L^q(\Omega)} + \|u\|_{W^{m-1,1}(\Omega)} \right\}.$$

**Beweis.** Wir können ohne Einschränkung  $a_{ij} = \delta_{ij}$  annehmen, indem wir gegebenenfalls eine lineare Koordinatentransformation vornehmen. Im folgenden betrachten wir also den Hauptteil  $(-\Delta)^m$ .

Wir wollen Satz 1.14 und Hilfssatz 1.22 verwenden. Sei  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m, n) > 0$  eine Zahl derart, daß die Aussagen dieser beiden Sätze auf der Einheitskugel  $B$  für alle Differentialoperatoren  $\tilde{L} = (-\Delta)^m + \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} \tilde{b}_\alpha D^\alpha$  mit  $\max_{|\alpha| \leq 2m-1} \|\tilde{b}_\alpha\|_{C^{|\alpha|}(\bar{B})} \leq \varepsilon_0$  gelten. Diese erforderliche Kleinheit wollen wir im folgenden für den in  $\Omega$  erklärten Differentialoperator  $L = (-\Delta)^m + \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} b_\alpha D^\alpha$  durch Skalierung erreichen.

Sei  $x_0 \in K$  beliebig, nach einer Translation können wir  $x_0 = 0$  annehmen. Bezeichne  $M := \max_{|\alpha| \leq 2m-1} \|b_\alpha\|_{C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})}$ , wir setzen:

$$(104) \rho_0 := \min \left\{ 1, \frac{1}{2} \text{dist}(K, \partial\Omega), \frac{\varepsilon_0}{M} \right\}$$

und führen für  $\rho \in (0, \rho_0]$  Funktionen  $\bar{B} \rightarrow \mathbb{R}$  ein:

$$u_\rho(x) := u(\rho x), \quad f_\rho(x) := \rho^{2m} f(\rho x), \quad b_{\alpha,\rho}(x) := \rho^{2m-|\alpha|} b_\alpha(\rho x).$$

Mit diesen Setzungen haben wir auf  $\bar{B}$  die Differentialungleichung:

$$(105) L_\rho u_\rho(x) := (-\Delta)^m u_\rho(x) + \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} b_{\alpha,\rho}(x) D^\alpha u_\rho(x) \leq f_\rho(x),$$

wobei die Koeffizientenfunktionen  $b_{\alpha,\rho}$ ,  $|\alpha| \leq 2m-1$ , aufgrund der Wahl (104) von  $\rho_0$  auf  $\bar{B}$  der Kleinheitsbedingung

$$\begin{aligned} \|b_{\alpha,\rho}\|_{C^{|\alpha|}(\bar{B})} &= \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \max_{x \in \bar{B}} |D^\beta b_{\alpha,\rho}(x)| \\ &= \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \max_{x \in \bar{B}} (\rho^{2m-|\alpha|+|\beta|} |(D^\beta b_\alpha)(\rho x)|) \leq \rho_0 \|b_\alpha\|_{C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})} \leq \rho_0 M \leq \varepsilon_0 \end{aligned}$$

genügen. Bezeichne  $G_{m,n,L_\rho}$  die Greensche Funktion zu  $L_\rho$  in  $B$ . Satz 1.14 und Hilfssatz 1.22 zeigen, daß mit von  $\rho \in (0, \rho_0]$  unabhängigen Konstanten  $C = C(m, n, \varepsilon_0(m, n)) = C(m, n)$  gilt:

$$(106) \left\{ \begin{array}{ll} G_{m,n,L_\rho}(x, y) > 0 & \text{in } B \times B, \\ G_{m,n,L_\rho}(x, y) \leq C|x-y|^{2m-n} & \text{in } B \times B, \text{ falls } n > 2m, \\ G_{m,n,L_\rho}(x, y) \leq C \log \left( \frac{3}{|x-y|} \right) & \text{in } B \times B, \text{ falls } n = 2m, \\ G_{m,n,L_\rho}(x, y) \leq C & \text{in } B \times B, \text{ falls } n < 2m, \\ |D_y^\alpha G_{m,n,L_\rho}(0, y)| \leq C & \text{für } |\alpha| \leq 2m-1, y \in \partial B. \end{array} \right.$$

Um  $u(0) = u_\rho(0)$  abzuschätzen, verwenden wir die Darstellungsformel für  $u_\rho$ : Die Randintegrale enthalten neben den Dirichletdaten  $D^\alpha u_\rho$ ,  $|\alpha| \leq m-1$ , und Termen der Art  $D_y^\alpha G_{m,n,L_\rho}(0,y)$ ,  $m \leq |\alpha| \leq 2m-1$ , noch Faktoren  $b_{\alpha,\rho}$  und deren Ableitungen bis zur Ordnung  $\leq |\alpha| - m - 1$ , sofern diese Zahl nichtnegativ ausfällt. Unter Verwendung von (106) folgt unabhängig von  $\rho \in (0, \rho_0]$ :

$$\begin{aligned}
u(0) &= u_\rho(0) \leq \int_B G_{m,n,L_\rho}(0,y) f_\rho^+(y) dy \\
&\quad + C(m,n,M) \sum_{|\alpha| \leq m-1} \int_{\partial B} |D^\alpha u_\rho(y)| d\omega(y) \\
&\leq C(m,n,q) \|f_\rho^+\|_{L^q(B)} + C(m,n,M) \sum_{|\alpha| \leq m-1} \rho^{|\alpha|} \int_{\partial B} |(D^\alpha u)(\rho y)| d\omega(y) \\
&\leq C(m,n,q) \rho^{2m-(n/q)} \|f^+\|_{L^q(B_\rho)} \\
&\quad + C(m,n,M) \sum_{|\alpha| \leq m-1} \rho^{|\alpha|-n+1} \int_{|y|=\rho} |D^\alpha u(y)| d\omega(y).
\end{aligned}$$

Durch Integration bzgl.  $\rho \in [\frac{1}{2}\rho_0, \rho_0]$  folgt mit einer Konstanten  $C = C(m,n,q,M,\rho_0)$ :

$$u(0) \leq C \{ \|f^+\|_{L^q(\Omega)} + \|u\|_{W^{m-1,1}(\Omega)} \}.$$

Dabei ist  $C = \mathcal{O}(\rho_0^{-n})$  für  $\rho_0 \searrow 0$ . ■

Mit Hilfe dieses lokalen Maximumprinzips lassen sich a-priori-Abschätzungen für Lösungen gewisser semilinearer Differentialgleichungen und infolgedessen Existenzresultate für klassische Lösungen herleiten:

**Folgerung 1.31.** *Seien  $\Omega$  und  $L$  wie in Satz 1.30, ferner sei  $L$  in  $H_0^m(\Omega)$  positiv definit, d.h. für alle  $u \in C^{2m}(\overline{\Omega}) \cap H_0^m(\Omega)$  gelte  $\int_\Omega Lu \cdot u dx \geq \frac{1}{C} \|u\|_{H_0^m}^2$ . Schließlich sei  $g \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  eine Nichtlinearität, die der Vorzeichenbedingung  $g(x,t) \cdot t \geq 0$ ,  $x \in \overline{\Omega}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , genügt und deren Negativteil (oder deren Positivteil) höchstens linear wächst:  $g(t) \geq -C(1+|t|)$ ,  $t \leq 0$ .*

*Dann existiert zu jedem  $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$  eine Lösung  $u \in C^{2m,\gamma}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$  des Dirichletproblems*

$$\begin{cases} Lu(x) + g(x, u(x)) = f(x) & \text{in } \Omega, \\ D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m-1. \end{cases}$$

Für einen Beweis verweisen wir auf [GS2], hier wollen wir nur kurz auf die Wachstumsbedingungen an  $g$  eingehen. Für Gleichungen zweiter Ordnung sind natürlich viel weiterreichende Resultate bekannt; es reicht, von  $g$  allein Hölderstetigkeit und die Vorzeichenbedingung zu verlangen, s. etwa [GT]. Tomi [To] konnte für Gleichungen vierter Ordnung ein entsprechendes Resultat zeigen, indem er darüber hinaus  $g$  als monoton

voraussetzte. Für Gleichungen beliebiger Ordnung scheinen dagegen bislang zusätzliche Wachstumsbedingungen an  $g$  unvermeidlich zu sein. “Üblicherweise” verlangt man von  $g$  “kontrolliertes” Wachstum:  $|g(t)| \leq C(1 + |t|)^{(n+2m)/(n-2m)}$ , falls  $n > 2m$ , s. z.B. [Lu], [Wa1], [Wa2]. Die in Folgerung 1.31 gestellte Bedingung  $-g^-$  wächst höchstens linear,  $g^+$  beliebig- läßt sich für große  $n$  als schwächer als die Forderung “kontrollierten Wachstums” interpretieren, von der Allgemeinheit der Resultate für Gleichungen zweiter Ordnung trennen uns allerdings noch Welten.

In diesen Beobachtungen spiegeln sich die in Kapitel 1.1 erreichten Positivitätsresultate ebenso wie deren in Satz 1.16 nachgewiesene eingeschränkte Gültigkeit wider. Nur wenn man in Folgerung 1.18  $b_c = \infty$  hätte beweisen können, wäre der völlige Verzicht auf Wachstumsbedingungen in Folgerung 1.31 evident gewesen. Ob letzteres überhaupt möglich ist, muß weiterhin offen bleiben.

## 2 Semilineare Eigenwertprobleme: Existenzresultate

Gegenstand dieses Kapitels ist die Existenz von Lösungen des semilinearen polyharmonischen Eigenwertproblems

$$(107) \begin{cases} (-\Delta)^m u = \lambda u + |u|^{p-1} u, & u \neq 0 \quad \text{in } B, \\ D^\alpha u|_{\partial B} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m - 1. \end{cases}$$

Dabei ist  $B \subset \mathbb{R}^n$  die Einheitskugel,  $n > 2m$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $1 < p \leq s$ ;  $s = (n + 2m)/(n - 2m)$  ist der kritische Sobolev-Exponent.

Bei subkritischem  $p$ , d.h.  $p \in (1, s)$ , ergibt sich die Existenz unendlich vieler nicht-trivialer Lösungen zu jedem  $\lambda \in \mathbb{R}$  durch offensichtliche Vereinfachung der Argumente aus dem kritischen Fall  $p = s$ , vgl. die Bemerkung auf S. 76. In einer Hinsicht jedoch ist das subkritische schwieriger als das kritische Problem, nämlich hinsichtlich der Existenz positiver Lösungen: Ist  $m > 1$ , so ergeben sich für  $\lambda \rightarrow -\infty$  selbst in der Kugel  $B$  noch unbewältigte Schwierigkeiten. Auf diese Problematik wird in Abschnitt 2.1.1 kurz eingegangen.

Im übrigen konzentrieren wir uns auf kritisches Wachstum:  $p = s$ . Lösungen von (107) werden mit Hilfe von Variationstechniken gewonnen. Durch das kritische Wachstum sind notwendige Kompaktheitsschlüsse nicht mehr uneingeschränkt, sondern nur noch unterhalb gewisser Energieniveaus möglich. Diese Niveaus werden durch optimale Konstanten zugehöriger Sobolev-Ungleichungen gegeben. Die Erkenntnis, daß die Palais-Smale-Bedingung in solchen Fällen *lokal* erfüllt ist (vgl. Definition 2.2 auf S. 72), geht wohl wesentlich auf die grundlegenden Arbeiten von Brezis, Coron und Nirenberg [BrCN], [BrN] zurück. Die Kompaktheitseigenschaften der zu untersuchenden Variationsfunktionale werden in Hilfssatz 2.6 und Hilfssatz 2.9 präzise formuliert. Daß Verlust von Kompaktheit tatsächlich auftritt, äußert sich beispielsweise in den Resultaten von Pohožaev [Poh] ( $m = 1$ ) und Pucci, Serrin [PS1] ( $m > 1$ ), wonach Problem (107) mit *kritischem Exponenten* höchstens für

$$(108) \lambda \geq 0$$

eine nichttriviale Lösung hat. Dieses Resultat gilt allgemein in sternförmigen Gebieten, jedoch nicht in Annuli. In Kapitel 3 werden weitere Nichtexistenzphänomene für Problem (107) diskutiert, die ebenfalls den Verlust von Kompaktheit widerspiegeln.

Abschnitt 2.1.2 behandelt die Existenz positiver Lösungen, während in Kapitel 2.2 das Problem (107) ohne weitere Einschränkungen an die Lösung studiert wird. Die Spezialisierung auf kugelförmige Gebiete läßt sich bei der Konstruktion positiver Lösungen derzeit nicht vermeiden, denn das zu verwendende Positivitätsresultat Folgerung 1.18 in Kombination mit Satz 1.1 konnte (außer im Fall  $n = 2$ ) nur für Kugeln gezeigt werden. Die Argumentation in Kapitel 2.2 gilt dagegen in beliebigen beschränkten glatten Gebieten.

## 2.1 Positive Lösungen: “Grundzustände”

Die Überschrift suggeriert, daß es sich um besonders einfache Lösungen handelt. Das trifft auch im Fall  $m > 1$  insofern zu, als die geometrische Gestalt dieser Lösungen sehr einfach ist und diese, falls überhaupt, durch Minimierung unter einer Nebenbedingung gewonnen werden können. Kompliziertere Min-Max-Methoden werden erst in Kapitel 2.2 benötigt.

Auf einer anderen Ebene jedoch erweist sich die Konstruktion positiver Lösungen im Fall höherer Ordnung  $m > 1$  als ein außerordentlich heikles Problem. Bei Gleichungen zweiter Ordnung wird nämlich die Positivität einer Lösung durch einen einfachen Trick erreicht: Mit  $u \in H_0^1$  ist auch  $|u|$  Minimum des Variationsproblems, denn:  $|u| \in H_0^1$ ,  $|\nabla|u|| = |\nabla u|$  in  $H_0^1$ . Dieser Trick versagt bei Gleichungen höherer Ordnung vollkommen:

$$m > 1: \quad u \in H_0^m \not\Rightarrow |u| \in H_0^m.$$

Einen Ausweg, allerdings bislang nur in Kugeln, bieten die Positivitätsresultate aus Kapitel 1, Satz 1.1 und Folgerung 1.18.

**Hilfssatz 2.1.** *Es gibt Zahlen  $\lambda_c = \lambda_c(n, m)$ ,  $\tilde{\lambda}_c = \tilde{\lambda}_c(n, m)$ ,  $\lambda_c \leq \tilde{\lambda}_c$ ,*

$$\lambda_c, \tilde{\lambda}_c \begin{cases} = -\infty & , \text{ falls } m = 1, \\ \in (-\infty, 0) & , \text{ falls } m > 1, \end{cases}$$

*derart, daß gilt:*

*Löst  $u \in W^{2m,p}(B) \cap W_0^{m,p}(B)$  das Dirichletproblem*

$$(109) \begin{cases} (-\Delta)^m u - \lambda u = f & \text{in } B, \\ D^\alpha u|_{\partial B} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m - 1, \end{cases}$$

*mit  $f \in L^p(B)$ ,  $p > 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , so gelten die Implikationen:*

$$\lambda \in [\lambda_c, \Lambda_{m,1}), f \geq 0 \quad \Rightarrow u \geq 0;$$

$$\lambda \in (\tilde{\lambda}_c, \Lambda_{m,1}), 0 \neq f \geq 0 \quad \Rightarrow u > 0.$$

*Für  $\lambda < \lambda_c$  ist das Problem (109) nicht positivitätserhaltend.  $\Lambda_{m,1}$  ist dabei der erste Dirichlet-Eigenwert von  $(-\Delta)^m$  in  $B$ .*

Für  $\lambda = 0$  wurde dieses Resultat bereits von Boggio [Bo2] gezeigt, die zugehörige Greensche Funktion ist in  $B \times B$  sogar strikt positiv. Unter Verwendung des Satzes von Jenč bzw. Krein-Rutman (s. z.B. [SH]) folgt sofort:

**Folgerung 2.2.** *Der Eigenraum zum ersten Eigenwert  $\Lambda_{m,1}$  ist eindimensional und wird von einer positiven Eigenfunktion aufgespannt.*

Um positive Lösungen für (107) zu konstruieren, wird zunächst ein modifiziertes Dirichletproblem gelöst:

$$(110) \quad \begin{cases} (-\Delta)^m u - \lambda u = |u|^p, & u \neq 0 \quad \text{in } B, \\ D^\alpha u|_{\partial B} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m-1. \end{cases}$$

Zumindest für  $\Lambda_{m,1} > \lambda > \tilde{\lambda}_c$  liefert dann Hilfssatz 2.1  $u > 0$  und damit eine positive Lösung des ursprünglichen Problems (107).

Diese einleitenden Bemerkungen über positive Lösungen sollen abgeschlossen werden durch eine einfache Beobachtung hinsichtlich der Monotonie dieser Lösungen, die sich auch beim Beweis des Nichtexistenzresultates in Kapitel 3.1 als nützlich erweisen wird.

**Hilfssatz 2.3.** *Sei  $u \in C^{2m}(\overline{B})$  radialsymmetrisch,  $u = u(r)$ ,  $r = |x|$ ; es gelte:*

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u > 0 & \text{in } B, \\ \left(\frac{d}{dr}\right)^j u|_{\partial B} = 0 & \text{für } j = 0, \dots, m-1. \end{cases}$$

*Dann ist  $u > 0$  in  $B$ , und  $u = u(r)$  ist streng monoton fallend in  $r \in (0, 1)$ .*

**Beweis.** Dieser Hilfssatz findet sich auch in [Sor, Proposition 1]. Hier soll jedoch ein besonders einfaches Argument gegeben werden. Daß  $u$  positiv ist, ist bereits gemäß Hilfssatz 2.1 klar, läßt sich aber auch durch eine einfache Ergänzung der folgenden Argumente zeigen.

Ohne Einschränkung sei  $m \geq 2$  gerade, für ungerades  $m$  verläuft der Beweis vollkommen analog. Wir benutzen die Polarform des Laplace-Operators:  $\Delta u = r^{1-n} \frac{d}{dr} (r^{n-1} \frac{d}{dr} u)$ . Angenommen,  $u$  ist nicht streng monoton fallend in  $(0, 1)$ . Dann hat  $\frac{du}{dr}$  (mindestens) eine Nullstelle in  $(0, 1)$ . Wiederholte Anwendung des Satzes von Rolle unter Beachtung des Randwerte von  $u$  ergibt:  $r^{n-1} \frac{du}{dr}$  hat außerdem Nullstellen in  $r = 0$  und  $r = 1$ , also in  $[0, 1]$  drei Nullstellen.  $\Delta u$  hat in  $(0, 1)$  zwei Nullstellen. Usw.  $\Delta^{m/2} u$  hat  $(\frac{m}{2} + 1)$  Nullstellen in  $(0, 1)$ .  $\Delta^{(m/2)+1} u$  hat  $\frac{m}{2}$  Nullstellen in  $(0, 1)$ . Usw. Schließlich hat  $\Delta^m u$  noch mindestens eine Nullstelle in  $(0, 1)$ . Widerspruch! ■

### 2.1.1 Subkritisches Wachstum

**Satz 2.4.** *Seien  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $p \in (1, s)$  mit  $s = (n + 2m)/(n - 2m)$  im Falle  $n > 2m$  und  $p \in (1, \infty)$  im Falle  $1 \leq n \leq 2m$ .  $\Lambda_{m,1}$  sei der erste Dirichlet-Eigenwert von  $(-\Delta)^m$  in  $B$ ,  $\tilde{\lambda}_c < 0$  die Zahl aus Hilfssatz 2.1.*

*Dann hat für alle  $\lambda < \Lambda_{m,1}$  das Dirichletproblem (107) eine nichttriviale radialsymmetrische Lösung. Gilt zusätzlich  $\lambda \in (\tilde{\lambda}_c, \Lambda_{m,1})$ , so existiert sogar eine radialsymmetrische Lösung  $u \in C^\infty(B) \cap C^{2m+1}(\overline{B})$  des Dirichletproblems:*

$$(111) \quad \begin{cases} (-\Delta)^m u = \lambda u + u^p & \text{in } B, \\ u > 0 & \text{in } B, \\ D^\alpha u|_{\partial B} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m-1. \end{cases}$$

Im Fall  $\lambda \geq 0$  ist  $u$  als Funktion von  $r = |x|$  in  $(0, 1)$  auch streng monoton fallend.

**Bemerkungen.** 1) Für  $\lambda \geq \Lambda_{m,1}$  hat Problem (111) keine Lösung, s. [PS3, p. 69]. Sei nämlich  $\varphi$  eine positive Dirichlet-Eigenfunktion zu  $\Lambda_{m,1}$  gemäß Folgerung 2.2, so ergibt skalare Multiplikation der Differentialgleichung (111) mit  $\varphi$ :

$$\Lambda_{m,1} \int_B u \varphi \, dx = \lambda \int_B u \varphi \, dx + \int_B u^p \varphi \, dx > \lambda \int_B u \varphi \, dx.$$

Es folgt:  $\lambda < \Lambda_{m,1}$ .

2) Ob es möglicherweise die spezielle Struktur von Problem (111) erlaubt, im Satz die Zahl  $\tilde{\lambda}_c$  durch eine kleinere oder sogar durch  $-\infty$  zu ersetzen, muß hier leider offen bleiben.

3) Im Spezialfall  $\lambda = 0, m = 2$ , folgt Satz 2.4 aus Resultaten von Dalmaso [Da1] und Oswald [Osw], im Fall  $0 \leq \lambda < \Lambda_{m,1}, m \geq 2$ , aus einer Arbeit von Soranzo [Sor].

4) Der folgende Beweis ist so angelegt, daß er mit Ausnahme der Symmetrie und Monotonie von  $u$  in jedem Gebiet richtig bleibt, in dem man ein Positivitätsresultat wie Hilfssatz 2.1 zur Verfügung hat.

Ist beispielsweise  $n = 2, p < \infty$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  eine Ellipse, deren Verhältnis der Halbachsen ausreichend nahe an 1 ist, so gibt es eine Zahl  $\tilde{\lambda}_c = \tilde{\lambda}_c(\Omega, m) < 0$  derart, daß Problem (111) für  $\lambda \in (\tilde{\lambda}_c, \Lambda_{m,1})$  in der Ellipse eine *positive* Lösung hat.

Lösungen von (107) ohne Vorzeichenbedingung an  $u$  lassen sich mit dem folgenden Beweis in allen glatten beschränkten Gebieten  $\Omega$  konstruieren.

**Beweis von Satz 2.4.** Die zusätzlichen Aussagen über Symmetrie und Monotonie von  $u$  erhält man, indem man die Funktionenräume im folgenden auf radialsymmetrische Funktionen beschränkt und Hilfssatz 2.3 anwendet.

Definiere die Variationsfunktionale

$$(112) \quad S_\lambda(v) = \begin{cases} \int_B \left( (\Delta^{m/2} v)^2 - \lambda v^2 \right) dx, & \text{falls } m \text{ gerade,} \\ \int_B \left( |\nabla \Delta^{(m-1)/2} v|^2 - \lambda v^2 \right) dx, & \text{falls } m \text{ ungerade,} \end{cases}$$

$$(113) \quad S_0(v) = \begin{cases} \int_B (\Delta^{m/2} v)^2 dx, & \text{falls } m \text{ gerade,} \\ \int_B |\nabla \Delta^{(m-1)/2} v|^2 dx, & \text{falls } m \text{ ungerade,} \end{cases}$$

und die Nebenbedingungen

$$N = \{v \in H_0^m(B) : \int_B |v|^p v \, dx = 1\},$$

$$\tilde{N} = \{v \in H_0^m(B) : \int_B |v|^{p+1} \, dx = 1\}.$$



Das Funktional  $S_\lambda$  ist koerzitiv und auf  $N \cup \tilde{N}$  nach unten beschränkt; es gilt für alle  $v \in H_0^m(B) \cap (N \cup \tilde{N})$ :

$$(114) \quad S_\lambda(v) \geq \left(1 - \max \left\{0, \frac{\lambda}{\Lambda_{m,1}}\right\}\right) S_0(v) \geq \frac{1}{C} \|v\|_{L^{s+1}}^2 \geq \frac{1}{C} \|v\|_{L^{p+1}}^2 \geq \frac{1}{C}.$$

Minimalfolgen für die Probleme

$$(115) \quad S_\lambda := \inf_{v \in N} S_\lambda(v) > 0, \quad \tilde{S}_\lambda := \inf_{v \in \tilde{N}} S_\lambda(v) > 0$$

konvergieren deshalb nach Auswahl einer Teilfolge schwach in  $H_0^m$  und aufgrund des Rellichschen Auswahlssatzes stark in  $L^{p+1}$  gegen  $v_0 \in N$  bzw.  $\tilde{v}_0 \in \tilde{N}$ . Wegen der schwachen Unterhalbstetigkeit von  $S_\lambda(\cdot)$  ist

$$S_\lambda(v_0) = S_\lambda, \quad \text{bzw.} \quad S_\lambda(\tilde{v}_0) = \tilde{S}_\lambda.$$

Die Berechnung der Euler-Lagrange-Gleichung ergibt, daß  $v_0$  bzw.  $\tilde{v}_0$  schwache Lösung von

$$(116) \quad (-\Delta)^m v_0 - \lambda v_0 = S_\lambda |v_0|^p \quad \text{bzw.} \quad (-\Delta)^m \tilde{v}_0 - \lambda \tilde{v}_0 = \tilde{S}_\lambda |\tilde{v}_0|^{p-1} \tilde{v}_0$$

ist. Dabei ist zu beachten, daß für beliebige Testfunktionen  $\varphi \in C_0^\infty(B)$  gilt:  $\int_B |v_0 + t\varphi|^p (v_0 + t\varphi) dx > 0$ , falls  $|t|$  hinreichend klein ist. D.h. durch Renormieren kann erreicht werden, daß  $v_0 + t\varphi$  der Nebenbedingung  $N$  genügt.

Das Luckhaussche Regularitätsresultat [Lu] liefert:  $v_0, \tilde{v}_0 \in C^\infty(B) \cap C^{2m+1}(\bar{B})$  lösen (116) klassisch. Für  $\lambda \in (\lambda_c, \Lambda_{m,1})$  ergibt Hilfssatz 2.1 auf jeden Fall, daß  $v_0 > 0$  ist. Die skalierten Funktionen  $u = S_\lambda^{1/(p-1)} v_0$  bzw.  $\tilde{u} = \tilde{S}_\lambda^{1/(p-1)} \tilde{v}_0$  ergeben die gewünschten Lösungen. Hierbei geht (115), d.h. die Positivität der Infima  $S_\lambda$  und  $\tilde{S}_\lambda$ , und damit die Voraussetzung  $\lambda < \Lambda_{m,1}$  nochmals entscheidend ein. ■

### 2.1.2 Kritisches Wachstum

**Satz 2.5.** Sei  $n > 2m$ ,  $s = (n + 2m)/(n - 2m)$  der kritische Sobolexponent,  $B \subset \mathbb{R}^n$  die Einheitskugel,  $\Lambda_{m,1}$  der erste Dirichlet-Eigenwert von  $(-\Delta)^m$  in  $B$ .

a) Ist  $n \geq 4m$ , so existiert für jedes  $\lambda \in (0, \Lambda_{m,1})$  eine radialsymmetrische Lösung  $u \in C^\infty(B) \cap C^{2m+1}(\bar{B})$  des Dirichletproblems:

$$(117) \quad \begin{cases} (-\Delta)^m u = \lambda u + u^s & \text{in } B, \\ u > 0 & \text{in } B, \\ D^\alpha u|_{\partial B} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m-1. \end{cases}$$

$u = u(r)$  ist in  $r \in (0, 1)$  streng monoton fallend.

b) Ist  $2m + 1 \leq n \leq 4m - 1$ , so existiert eine Zahl  $\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}(n, m) \in (0, \Lambda_{m,1})$  derart, daß für jedes  $\lambda \in (\bar{\Lambda}, \Lambda_{m,1})$  das Dirichletproblem (117) eine Lösung  $u$  wie in a) hat.

**Bemerkungen.** In Satz 3.1 wird gezeigt, daß Satz 2.5 insofern scharf ist, als daß Problem (117) für  $n \in \{2m+1, \dots, 4m-1\}$  und  $\lambda$  in gewissen Nullumgebungen *keine radialsymmetrische Lösung* hat. Im Anschluß an Satz 2.4 wurde bereits gezeigt, daß (117) auch für  $\lambda \geq \Lambda_{m,1}$  keine Lösung hat. Schließlich sei bemerkt, daß gemäß [PS1] sogar Problem (107) für  $\lambda < 0$  keine Lösung hat. Der Fall  $\lambda = 0$  wird in Kapitel 3.3 diskutiert. Bemerkung 4 zu Satz 2.4 gilt ganz entsprechend.

Wie im Abschnitt 2.1.1 soll das Funktional  $v \mapsto S_\lambda(v)$  unter der Nebenbedingung  $v \in N$  minimiert werden, wobei  $p = s$  zu setzen ist. Dort war der benötigte Kompaktheitsschluß offensichtlich. Dieser Schluß ist jedoch hier nicht mehr uneingeschränkt richtig, sondern ähnlich wie in [BrN] nur, falls das Infimum einen gewissen “gefährlichen” Wert, die optimale Sobolev-Einbettungs-Konstante

$$(118) \quad S := \inf_{v \in D^{m,2} \setminus \{0\}} \frac{\tilde{S}_0(v)}{\|v\|_{L^{s+1}}^2} > 0,$$

unterschreitet. Dabei ist

$$\tilde{S}_0(v) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta^{m/2} v)^2 dx, & \text{falls } m \text{ gerade,} \\ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \Delta^{(m-1)/2} v|^2 dx, & \text{falls } m \text{ ungerade,} \end{cases}$$

$D^{m,2}$  ist die Vervollständigung von  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  bezüglich der Norm  $\tilde{S}_0(\cdot)^{1/2}$ .

$S$  wird in  $D^{m,2}$  angenommen, die minimierenden Funktionen sind aus einer Arbeit von Swanson [Swa] explizit bekannt. Das Variationsproblem (118) kann natürlich auch in  $H_0^m(B)$  betrachtet werden, es ergibt sich aufgrund der Skalierungseigenschaften von  $S_0(\cdot)$  und  $\|\cdot\|_{L^{s+1}}$  dasselbe Infimum  $S$ . Dieses kann wegen des Prinzips der eindeutigen Fortsetzbarkeit für die entsprechende Euler-Lagrange Gleichung in  $H_0^m(B)$  nicht angenommen werden. Details werden im Beweis von Hilfssatz 2.7 ausgeführt, vgl. auch S. 118.

**Hilfssatz 2.6.** *Sei  $\lambda < \Lambda_{m,1}$ ,  $(v_k) \subset H_0^m(B) \cap N$  eine Minimalfolge für  $S_\lambda(\cdot)|_N$ . Außerdem gelte  $S_\lambda < S$ . Dann nimmt  $S_\lambda(\cdot)|_N$  sein Minimum in einer Funktion  $v_0 \in H_0^m(B) \cap N$  an:  $S_\lambda(v_0) = S_\lambda$ . Außerdem hat man nach Auswahl einer Teilfolge starke Konvergenz:  $v_k \rightarrow v_0$  in  $H_0^m(B)$ .*

**Beweis. 1.** Gemäß (114) ist  $S_\lambda > 0$  und die Minimalfolge  $(v_k)$  in  $H_0^m(B)$  beschränkt. Daher kann man nach Auswahl einer Teilfolge annehmen, daß ein  $v_0 \in H_0^m(B)$  existiert mit

$$v_k \rightharpoonup v_0 \text{ in } H_0^m(B), \quad v_k \rightharpoonup v_0 \text{ in } L^{s+1}(B), \quad v_k \rightarrow v_0 \text{ in } L^2(B),$$

$$v_k \rightarrow v_0 \text{ punktweise fast überall in } B.$$

Wie Struwe [Str4, Chapter III.2] aufgezeigt hat, läßt sich unter Verwendung des Vitalischen Konvergenzsatzes präzisieren, wie weit das Grenzelement von der Nebenbedingung  $N$  abweicht:

$$\begin{aligned}
& \int_B \left( |v_k|^s v_k - |v_k - v_0|^s (v_k - v_0) \right) dx \\
&= \int_B \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left( |v_k + (t-1)v_0|^s (v_k + (t-1)v_0) \right) dt dx \\
&= (s+1) \int_B \int_0^1 |v_k + (t-1)v_0|^s v_0 dt dx \\
&\rightarrow (s+1) \int_B \int_0^1 t^s |v_0|^s v_0 dt dx = \int_B |v_0|^s v_0 dx.
\end{aligned}$$

Da  $v_k \in N$ , haben wir also:

$$(119) \quad 1 - \int_B |v_k - v_0|^s (v_k - v_0) dx = \int_B |v_0|^s v_0 dx + \mathcal{O}(1).$$

Durch Ausmultiplizieren der quadratischen Formen sieht man leicht:

$$(120) \quad S_0(v_k) - S_0(v_k - v_0) = S_0(v_0) + \mathcal{O}(1),$$

$$(121) \quad S_\lambda(v_k) - S_\lambda(v_k - v_0) = S_\lambda(v_0) + \mathcal{O}(1).$$

**2.** Um den Kompaktheitsschluß durchführen zu können, muß ein *positives* Vielfaches von  $v_0$  der Nebenbedingung genügen. Deshalb wird zunächst

$$(122) \quad \int_B |v_0|^s v_0 dx > 0$$

gezeigt. Tatsächlich ergeben (119), (121) sowie die Voraussetzungen  $S_\lambda(v_k) = S_\lambda + \mathcal{O}(1)$  und  $S_\lambda < S$ :

$$\begin{aligned}
& \int_B |v_0|^s v_0 dx = 1 - \int_B |v_k - v_0|^s (v_k - v_0) dx + \mathcal{O}(1) \\
&\geq 1 - \int_B |v_k - v_0|^{s+1} dx + \mathcal{O}(1) \geq 1 - S^{-(s+1)/2} S_0(v_k - v_0)^{(s+1)/2} + \mathcal{O}(1) \\
&= 1 - S^{-(s+1)/2} \left( S_\lambda(v_k) - S_\lambda(v_0) + \mathcal{O}(1) \right)^{(s+1)/2} + \mathcal{O}(1) \\
&\geq 1 - S^{-(s+1)/2} \left( S_\lambda(v_k) + \mathcal{O}(1) \right)^{(s+1)/2} + \mathcal{O}(1) \\
&= 1 - S^{-(s+1)/2} \left( S_\lambda + \mathcal{O}(1) \right)^{(s+1)/2} + \mathcal{O}(1) \\
&= 1 - \left( \frac{S_\lambda}{S} \right)^{(s+1)/2} + \mathcal{O}(1) > 0 \text{ für ausreichend großes } k.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\tilde{v}_0 := \frac{v_0}{\left(\int_B |v_0|^s v_0 dx\right)^{1/(s+1)}} \in N;$$

es folgt aufgrund von  $S_\lambda(\tilde{v}_0) \geq S_\lambda$ :

$$(123) \quad S_\lambda(v_0) \geq S_\lambda \cdot \left(\int_B |v_0|^s v_0 dx\right)^{2/(s+1)}.$$

**3.** Nun stehen ausreichend viele Informationen zur Verfügung, um zunächst die starke Konvergenz  $v_k \rightarrow v_0$  in  $L^{s+1}$  zu zeigen. Die einfache Ungleichung

$$\forall a, b \geq 0 : (a + b)^{2/(s+1)} \leq a^{2/(s+1)} + b^{2/(s+1)},$$

die aufgrund von  $2/(s+1) \leq 1$  (mit Konstante 1) gilt, wird sich als außerordentlich nützlich erweisen.

$$\begin{aligned} S_\lambda &= S_\lambda(v_k) + \mathcal{o}(1) = S_0(v_k - v_0) + S_\lambda(v_0) + \mathcal{o}(1) \quad \text{mittels (121)} \\ &\geq S \|v_k - v_0\|_{L^{s+1}}^2 + S_\lambda \cdot \left(\int_B |v_0|^s v_0 dx\right)^{2/(s+1)} + \mathcal{o}(1) \quad \text{mittels (118), (123)} \\ &= (S - S_\lambda) \|v_k - v_0\|_{L^{s+1}}^2 \\ &\quad + S_\lambda \cdot \left( \left(\int_B |v_k - v_0|^{s+1} dx\right)^{2/(s+1)} + \left(\int_B |v_0|^s v_0 dx\right)^{2/(s+1)} \right) + \mathcal{o}(1) \\ &\geq (S - S_\lambda) \|v_k - v_0\|_{L^{s+1}}^2 \\ &\quad + S_\lambda \cdot \left( \int_B |v_k - v_0|^{s+1} dx + \int_B |v_0|^s v_0 dx \right)^{2/(s+1)} + \mathcal{o}(1) \\ &= (S - S_\lambda) \|v_k - v_0\|_{L^{s+1}}^2 + S_\lambda \cdot \left( \int_B |v_k - v_0|^{s+1} dx \right. \\ &\quad \left. + 1 - \int_B |v_k - v_0|^s (v_k - v_0) dx + \mathcal{o}(1) \right)^{2/(s+1)} + \mathcal{o}(1) \quad \text{mittels (119)} \\ &\geq (S - S_\lambda) \|v_k - v_0\|_{L^{s+1}}^2 + S_\lambda \cdot (1 + \mathcal{o}(1))^{2/(s+1)} + \mathcal{o}(1) \\ &= (S - S_\lambda) \|v_k - v_0\|_{L^{s+1}}^2 + S_\lambda + \mathcal{o}(1). \end{aligned}$$

Die Voraussetzung  $S - S_\lambda > 0$  liefert nun

$$v_k \rightarrow v_0 \text{ in } L^{s+1}$$

und folglich  $v_0 \in N$ . Schließlich erkennt man an (121) die schwache Unterhalbstetigkeit von  $S_\lambda(\cdot)$ :

$$S_\lambda \geq S_\lambda(v_0) \text{ und wegen } v_0 \in N \text{ sogar: } S_\lambda = S_\lambda(v_0).$$

Da für  $v \in H_0^m(B)$  gilt:  $\|v\|_{H_0^m}^2 = S_0(v)$ , liefert dieses zusammen mit (121):

$v_k \rightarrow v_0$  in  $H_0^m(B)$ . ■

Um den Beweis von Satz 2.5 zu erbringen, bleibt im wesentlichen nur noch die Voraussetzung  $S_\lambda < S$  aus Hilfssatz 2.6 zu verifizieren. Hierbei hilft eine Arbeit von Swanson [Swa] weiter, in der die minimierenden Funktionen für das Variationsproblem (118), d.h. für die optimale Einbettung  $H_0^m \hookrightarrow L^{s+1}$ , explizit bestimmt werden. Die Existenz dieser minimierenden Funktionen wurde von Lions [Li] mit Hilfe des “concentration compactness principle” bewiesen.

Die Infima  $S$ ,  $S_\lambda$ ,  $S_0$  werden unter verschiedenen Nebenbedingungen gebildet. Daß sie dennoch vergleichbar sind, liegt daran, daß die minimierenden Funktionen positiv (und radialsymmetrisch) sind, und daß  $(-\Delta)^m$  eine positive (radialsymmetrische) erste Eigenfunktion hat.

**Hilfssatz 2.7.** a)  $S = S_0 := \inf_{v \in N} S_0(v)$ .

b) Sei  $n \geq 4m$ . Dann gilt für jedes  $\lambda > 0$ :  $S_\lambda < S$ .

c) Sei  $2m + 1 \leq n \leq 4m - 1$ . Dann gibt es eine Zahl  $\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}(n, m) < \Lambda_{m,1}$  derart, daß für alle  $\lambda > \bar{\Lambda}$  gilt:  $S_\lambda < S$ .

**Beweis.** Sei  $v \in N$ , man kann  $v$  als Element von  $D^{m,2}$  auffassen,  $\|v\|_{L^{s+1}}^{s+1} = \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{s+1} dx = \int_B |v|^{s+1} dx \geq \int_B |v|^s v dx = 1$ . Also gilt:

$$S_0(v) \geq \frac{\tilde{S}_0(v)}{\|v\|_{L^{s+1}}^2} \geq S,$$

(124)  $S_0 \geq S$ .

Für  $\varepsilon \searrow 0$  betrachten wir:

$$(125) \quad v_\varepsilon(x) = c_{m,n} \frac{\varepsilon^{(n-2m)/2}}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{(n-2m)/2}},$$

dabei ist  $c_{m,n}$  so gewählt, daß unabhängig von  $\varepsilon$  gilt:

$$(126) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left( v_\varepsilon(x) \right)^{s+1} dx = 1.$$

Aus Swansons Arbeit [Swa] entnehmen wir für jedes  $\varepsilon > 0$ :

$$(127) \quad S = \tilde{S}_0(v_\varepsilon).$$

In jener Arbeit wird außerdem bewiesen [Swa, Lemma 2], daß für  $j = 0, \dots, m - 1$ ,  $|x| \geq 1$  gilt:

$$|\Delta^j v_1(x)| \leq C \frac{|x|^{2j}}{(1 + |x|^2)^{(n-2m+4j)/2}},$$

$$|\nabla \Delta^j v_1(x)| \leq C \frac{|x|^{2j+1}}{(1 + |x|^2)^{(n-2m+4j+2)/2}}.$$

Diese Abschätzungen liefern für  $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ ,  $|x| \geq \frac{1}{2}$ :

$$(128) \quad \begin{aligned} |\Delta^j v_\varepsilon(x)| &\leq C \frac{\varepsilon^{(n-2m)/2} |x|^{2j}}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{(n-2m+4j)/2}}, \\ |\nabla \Delta^j v_\varepsilon(x)| &\leq C \frac{\varepsilon^{(n-2m)/2} |x|^{2j+1}}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{(n-2m+4j+2)/2}}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich für  $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2} \leq |x| \leq 1$ :

$$|\Delta^j v_\varepsilon(x)| \leq C \varepsilon^{(n-2m)/2}, \quad |\nabla \Delta^j v_\varepsilon(x)| \leq C \varepsilon^{(n-2m)/2}.$$

Da  $v_\varepsilon$  radialsymmetrisch ist, gilt für alle  $|\alpha| \leq m$ ,  $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2} \leq |x| \leq 1$  insbesondere:

$$(129) \quad |D^\alpha v_\varepsilon(x)| \leq C \varepsilon^{(n-2m)/2}.$$

Sei  $\xi \in C_0^\infty(B)$  eine feste (radialsymmetrische) Abschneidefunktion,  $0 \leq \xi \leq 1$ ,  $\xi(x) = 1$  auf  $\{|x| \leq \frac{1}{2}\}$ . Durch Lokalisieren der  $\tilde{S}_0$  minimierenden Funktionen  $v_\varepsilon$  soll nun für  $\lambda > 0$ ,  $n \geq 4m$  gezeigt werden, daß  $S_\lambda < S$  gilt. Setze

$$(130) \quad w_\varepsilon := \xi \cdot v_\varepsilon \in C_0^\infty(B).$$

Für gerades  $m$  erhält man mit Hilfe von (128), (129):

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta^{m/2} v_\varepsilon)^2 dx - \int_B (\Delta^{m/2} w_\varepsilon)^2 dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\frac{1}{2} \leq |x| \leq 1} \left( (\Delta^{m/2} v_\varepsilon)^2 - (\Delta^{m/2} (\xi v_\varepsilon))^2 \right) dx \right| + \int_{|x| \geq 1} (\Delta^{m/2} v_\varepsilon)^2 dx \\ &\leq C \varepsilon^{n-2m} \left( 1 + \int_1^\infty r^{2m-n-1} dr \right) = \mathcal{O}(\varepsilon^{n-2m}). \end{aligned}$$

Ist  $m$  ungerade, so gilt eine ganz entsprechende Abschätzung. Wegen (127) haben wir folglich:

$$(131) \quad S_0(w_\varepsilon) = S + \mathcal{O}(\varepsilon^{n-2m}).$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} v_\varepsilon^{s+1} dx - \int_B w_\varepsilon^{s+1} dx \right| \leq \int_{|x| \geq \frac{1}{2}} v_\varepsilon^{s+1} dx \leq C \int_{|x| \geq \frac{1}{2}} \frac{\varepsilon^n}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^n} dx = \mathcal{O}(\varepsilon^n).$$

Unter Verwendung von (126) erhalten wir:

$$(132) \quad \int_B w_\varepsilon^{s+1} dx = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^n).$$

Schließlich gilt mit Konstanten  $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ :

$$\begin{aligned}
\int_B w_\varepsilon^2 dx &\geq c_{m,n}^2 \varepsilon^{n-2m} \int_{|x| \leq \varepsilon} \frac{1}{(2\varepsilon^2)^{n-2m}} + c_{m,n}^2 \varepsilon^{n-2m} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq \frac{1}{2}} \frac{1}{(2|x|^2)^{n-2m}} dx \\
&= c_1 \varepsilon^{2m} + c_2 \varepsilon^{n-2m} \int_\varepsilon^{1/2} r^{4m-n-1} dr \\
(133) \quad &= \begin{cases} c_3 \varepsilon^{2m} + \mathcal{O}(\varepsilon^{n-2m}), & \text{falls } n > 4m, \\ c_2 \varepsilon^{2m} |\log \varepsilon| + \mathcal{O}(\varepsilon^{2m}), & \text{falls } n = 4m, \\ c_4 \varepsilon^{n-2m} + \mathcal{O}(\varepsilon^{2m}), & \text{falls } n < 4m. \end{cases}
\end{aligned}$$

Es sei bemerkt, daß  $w_\varepsilon$  nichtnegativ ist. Deshalb gilt:

$$\tilde{w}_\varepsilon := \frac{w_\varepsilon}{\left(\int_B w_\varepsilon^{s+1} dx\right)^{1/(s+1)}} \in C_0^\infty(B) \cap N.$$

Folglich erhalten wir vermittels (131) und (132):

$$S_0(\tilde{w}_\varepsilon) = \frac{S_0(w_\varepsilon)}{\left(\int_B w_\varepsilon^{s+1} dx\right)^{2/(s+1)}} = \frac{S + \mathcal{O}(\varepsilon^{n-2m})}{(1 + \mathcal{O}(\varepsilon^n))^{2/(s+1)}} = S + \mathcal{O}(\varepsilon^{n-2m}),$$

$$S_0 \leq S.$$

Zusammen mit (124) ergibt sich Behauptung a).

Im Falle  $n > 4m$  folgt durch zusätzliche Verwendung von (133) weiter:

$$S_\lambda(\tilde{w}_\varepsilon) \leq \frac{S + \mathcal{O}(\varepsilon^{n-2m}) - \lambda c_3 \varepsilon^{2m}}{(1 + \mathcal{O}(\varepsilon^n))^{2/(s+1)}} = S - \lambda c_3 \varepsilon^{2m} + \mathcal{O}(\varepsilon^{n-2m}),$$

ist  $n = 4m$ , so gilt:

$$S_\lambda(\tilde{w}_\varepsilon) \leq S - \lambda c_2 \varepsilon^{2m} |\log \varepsilon| + \mathcal{O}(\varepsilon^{2m}).$$

Indem  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein gewählt wird, erhalten wir Behauptung b):

$$S_\lambda < S.$$

Um c) zu beweisen, betrachten wir eine positive (radialsymmetrische) Eigenfunktion

$$(-\Delta)^m \varphi = \Lambda_{m,1} \varphi, \quad \varphi > 0 \text{ in } B, \quad D^\alpha \varphi|_{\partial B} = 0 \text{ für } |\alpha| \leq m-1,$$

dazu siehe Folgerung 2.2. Ohne Einschränkung können wir annehmen:  $\|\varphi\|_{L^{s+1}}^{s+1} = 1$ , d.h. aufgrund der Positivität von  $\varphi$  ist auch  $\varphi \in N$ . Wir setzen  $\bar{\Lambda} = \Lambda_{m,1} - S|B|^{-2m/n}$ , es folgt für  $\lambda > \bar{\Lambda}$ :

$$S_\lambda \leq S_\lambda(\varphi) = (\Lambda_{m,1} - \lambda) \int_B \varphi^2 dx < (\Lambda_{m,1} - \bar{\Lambda}) \left(\int_B \varphi^{s+1} dx\right)^{2/(s+1)} |B|^{2m/n} = S$$

und damit c). ■

**Beweis von Satz 2.5.** Der Beweis läßt sich wörtlich wie der Beweis von Satz 2.4 führen, indem man dort  $p = s$  setzt und das Zitat des Rellichschen Auswahlssatzes durch den Verweis auf das Kompaktheitslemma 2.6 und auf Hilfssatz 2.7 ersetzt. Der Grenzexponent für das Luckhausche Regularitätsresultat ist ebenfalls  $s$ . ■

## 2.2 Existenz von Lösungen jenseits des ersten Eigenwertes

Hier soll die Frage untersucht werden, ob Problem (107) mit kritischem Exponenten  $p = s$  für alle positiven Parameterwerte  $\lambda > 0$  eine Lösung hat. Dabei ist, wie die Bemerkungen im Anschluß an Satz 2.5 zeigen, natürlich auf die Positivitätsforderung an die Lösung zu verzichten. Wir orientieren uns an der Arbeit von Capozzi, Fortunato, Palmieri ([CFP]), in der unter der Voraussetzung  $n \geq 5$  und mit Einschränkungen auch für  $n = 4$  ein entsprechendes Resultat für Gleichungen zweiter Ordnung bewiesen wurde. Wir beschränken uns auf kritisches Wachstum, der subkritische Fall ergibt sich aus der folgenden Argumentation durch eine einfache Bemerkung, s. S. 76. Da in diesem Abschnitt qualitative Eigenschaften von Lösungen keine Rolle spielen, können wir die Beschränkung auf kugelförmige Gebiete aufgeben. Im folgenden sei also  $\Omega$  ein beschränktes,  $C^{2m,\gamma}$ -glattes Gebiet.

Zunächst ist zu bemerken, daß gemäß dem Verzweigungsergebnis von Böhme [Böh] jeder Dirichlet-Eigenwert  $\Lambda_{m,j}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , von  $(-\Delta)^m$  in  $\Omega$  Verzweigungspunkt für das semilineare Problem (107) ist. Aufgrund der Variationsstruktur von (107) spielt dabei die Vielfachheit der Eigenwerte für die Gültigkeit dieses Resultats keine Rolle.

Der folgende Satz unterstützt die *Vorstellung*, daß diese Zweige sogar global existieren.

**Satz 2.8.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes,  $C^{2m,\gamma}$ -glattes Gebiet,  $n > 2m$ ,  $s = (n + 2m)/(n - 2m)$  der kritische Sobolevexponent.*

a) *Gilt zusätzlich für die Raumdimension  $n > (\sqrt{8} + 2)m$ , so besitzt das Dirichletproblem:*

$$(134) \begin{cases} (-\Delta)^m u = \lambda u + |u|^{s-1}u, & u \not\equiv 0 \quad \text{in } \Omega, \\ D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m - 1, \end{cases}$$

für jedes  $\lambda > 0$  mindestens eine (nichttriviale) Lösung  $u \in C^{2m,\gamma}(\overline{\Omega})$ .

b) *Ist  $4m \leq n < (\sqrt{8} + 2)m$ , so hat (134) für alle diejenigen  $\lambda > 0$ , welche nicht Dirichlet-Eigenwert von  $(-\Delta)^m$  in  $\Omega$  sind, eine Lösung wie in a).*

c) *Ist  $2m + 1 \leq n \leq 4m - 1$ , so gibt es eine Zahl  $\lambda_0 = \lambda_0(m, n, \Omega) \in (0, \Lambda_{m,1})$  derart, daß für alle  $\lambda \in (\Lambda_{m,j} - \lambda_0, \Lambda_{m,j})$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , das Problem (134) eine Lösung wie in a) hat.*

Die in Kapitel 2.1 verwendeten direkten Methoden der Variationsrechnung –Minimierung unter Nebenbedingungen– sind nur zur Konstruktion der “Grundzustände” geeignet. Um das globale Lösungsbild von (134) zu verstehen, ist auf  $H_0^m(\Omega)$  das “freie” Funktional:

$$(135) \begin{aligned} E_\lambda(u) &:= \frac{1}{2} S_\lambda(u) - \frac{1}{s+1} \int_\Omega |u|^{s+1} dx \\ &= \begin{cases} \int_\Omega \left( \frac{1}{2} (\Delta^{m/2} u)^2 - \frac{1}{2} \lambda u^2 - \frac{1}{s+1} |u|^{s+1} \right) dx, & \text{falls } m \text{ gerade,} \\ \int_\Omega \left( \frac{1}{2} |\nabla \Delta^{(m-1)/2} u|^2 - \frac{1}{2} \lambda u^2 - \frac{1}{s+1} |u|^{s+1} \right) dx, & \text{falls } m \text{ ungerade,} \end{cases} \end{aligned}$$



zu untersuchen. Auf  $H_0^m$  ist das Funktional  $E_\lambda(\cdot)$  offensichtlich stetig Fréchet-differenzierbar.

Die Grundzustände hätten in Kapitel 2.1 auch mit Hilfe eines “mountain pass lemma” konstruiert werden können: Das lokale Minimum 0 von  $E_\lambda(\cdot)$  wird durch Wege mit einem Punkt  $u$  mit negativer  $E_\lambda$ -Energie verbunden. Manche dieser Wege verlaufen unterhalb eines hinsichtlich der Kompaktheitseigenschaften von  $E_\lambda(\cdot)$  “gefährlichen” Niveaus. Die Richtungen dieser “geeigneten” geradlinigen Wege werden mit Hilfe von Minimalfolgen für die optimale Sobolevkonstante  $S$  in (118) gegeben. Durch  $\inf_{\text{alle Wege } P} \sup_{v \in P} E_\lambda(v)$ , das Niveau des “Passes”, erhält man dann einen nichttrivialen kritischen Wert von  $E_\lambda(\cdot)$ . Dazu vgl. z.B. [Str4, Chapt. III.2].

Für das weitere Vorgehen soll zunächst die Bedeutung des soeben erwähnten “gefährlichen” Niveaus präzisiert werden; es handelt sich um ein ganz zentrales Phänomen bei Variationsproblemen mit kritischem Wachstum.

**Definition 2.1.** Sei  $H$  ein Hilbertraum,  $E : H \rightarrow \mathbb{R}$  ein stetig Fréchet-differenzierbares Funktional. Eine Folge  $(u_k) \subset H$  heißt **Palais-Smale Folge**, falls gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} E(u_k) \text{ existiert,} \\ dE(u_k) \rightarrow 0 \text{ stark in } H^* \simeq H. \end{aligned}$$

**Definition 2.2.** Sei  $H$  ein Hilbertraum,  $E : H \rightarrow \mathbb{R}$  ein stetig Fréchet-differenzierbares Funktional. Man sagt,  $E$  genügt einer **lokalen Palais-Smale Bedingung** zum Niveau  $c_0$ , falls jede Palais-Smale Folge mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} E(u_k) < c_0$  eine in  $H$  stark konvergente Teilfolge besitzt.

Tatsächlich genügt das oben in (135) eingeführte Funktional  $E_\lambda(\cdot)$  einer lokalen Palais-Smale Bedingung. Wie im Abschnitt 2.1.2 spielt dabei die optimale Konstante  $S$  für die Sobolev-Einbettung  $H_0^m \hookrightarrow L^{s+1}$ , s. (118), eine zentrale Rolle.

**Hilfssatz 2.9.** Das auf  $H_0^m(\Omega)$  erklärte Funktional  $E_\lambda(\cdot)$  genügt einer lokalen Palais-Smale Bedingung zum Niveau  $c_0 = \frac{m}{n} S^{n/2m}$ .

**Beweis.** Sei  $(u_k) \subset H_0^m(\Omega)$  eine Palais-Smale Folge mit “Grenzenergie” unterhalb  $\frac{m}{n} S^{n/2m}$ , d.h.:

$$(136) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} E_\lambda(u_k) < c_0 = \frac{m}{n} S^{n/2m},$$

$$(137) \quad dE_\lambda(u_k) \rightarrow 0 \text{ stark in } H^{-m}.$$

1. Zunächst wird die Beschränktheit von  $(u_k)$  in  $H_0^m$  gezeigt. Eine geeignete Differenz von Funktional und seinem Differential ergibt:

$$\begin{aligned} 2E_\lambda(u_k) - \langle dE_\lambda(u_k), u_k \rangle &= \frac{2m}{n} \int_\Omega |u_k|^{s+1} dx, \\ \Rightarrow \|u_k\|_{L^{s+1}}^{s+1} &\leq C \{ |E_\lambda(u_k)| + \|dE_\lambda(u_k)\|_{H^{-m}} \|u_k\|_{H_0^m} \} \\ &= \mathcal{O}(1) + \mathcal{o}(1) \|u_k\|_{H_0^m}. \end{aligned}$$

Diese Abschätzung wird noch einmal mit der Voraussetzung (136) beschränkter  $E_\lambda$ -Energie kombiniert:

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{H_0^m}^2 &= S_0(u_k) = 2E_\lambda(u_k) + \lambda \int_\Omega u_k^2 dx + \frac{2}{s+1} \int_\Omega |u_k|^{s+1} dx \\ &\leq \mathcal{O}(1) + C \|u_k\|_{L^{s+1}}^{s+1} \leq \mathcal{O}(1) + \mathfrak{o}(1) \|u_k\|_{H_0^m} \leq \mathcal{O}(1) + \frac{1}{2} \|u_k\|_{H_0^m}^2. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\|u_k\|_{H_0^m} \leq \mathcal{O}(1).$$

**2.** Nach Auswahl einer Teilfolge kann man also annehmen:

$$(138) \quad \begin{aligned} u_k &\rightharpoonup u \text{ in } H_0^m, & u_k &\rightarrow u \text{ in } L^{s+1}, \\ u_k &\rightarrow u \text{ in } L^p, p < s+1, & u_k &\rightarrow u \text{ punktweise fast überall in } \Omega. \end{aligned}$$

Für jede feste Testfunktion  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  ist  $\langle dE_\lambda(u_k), \varphi \rangle = \mathfrak{o}(1)$ , daher ist wegen der Konvergenzeigenschaften (138) von  $(u_k)$  die Grenzfunktion  $u$  schwache Lösung des Dirichletproblems:

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u = \lambda u + |u|^{s-1} u & \text{in } \Omega, \\ D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m-1. \end{cases}$$

Das Luckhaussche Regularitätsresultat [Lu] gibt sofort  $u \in C^{2m,\gamma}(\overline{\Omega})$ . Testen der Differentialgleichung mit  $u$  ergibt

$$\begin{aligned} S_\lambda(u) &= \int_\Omega |u|^{s+1} dx, \\ (139) \quad E_\lambda(u) &= \frac{m}{n} \int_\Omega |u|^{s+1} dx \geq 0. \end{aligned}$$

Jeder (zunächst schwache) Grenzwert einer solchen Palais-Smale Folge hat also nicht-negative  $E_\lambda$ -Energie.

**3.** Wie in Teil 1 des Beweises von Hilfssatz 2.6 zeigt man folgende Identitäten, die die mögliche Abweichung von starker Konvergenz quantifizieren:

$$(140) \quad \int_\Omega |u_k|^{s+1} dx - \int_\Omega |u_k - u|^{s+1} dx = \int_\Omega |u|^{s+1} dx + \mathfrak{o}(1),$$

$$(141) \quad S_\lambda(u_k) - S_0(u_k - u) = S_\lambda(u) + \mathfrak{o}(1),$$

$$(142) \quad E_\lambda(u_k) - E_0(u_k - u) = E_\lambda(u) + \mathfrak{o}(1).$$

Weiter erhält man durch Verwendung des Vitalischen Konvergenzsatzes:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (|u_k|^{s-1}u_k - |u|^{s-1}u) (u_k - u) dx \\
&= \int_{\Omega} |u_k|^{s+1} dx - \int_{\Omega} |u_k|^{s-1}u_k u dx - \int_{\Omega} |u|^{s-1}u u_k dx + \int_{\Omega} |u|^{s+1} dx \\
&= \int_{\Omega} |u_k|^{s+1} dx - \int_{\Omega} |u|^{s+1} dx + \mathcal{o}(1).
\end{aligned}$$

Durch Kombination mit (140) erhält man:

$$(143) \int_{\Omega} (|u_k|^{s-1}u_k - |u|^{s-1}u) (u_k - u) dx = \int_{\Omega} |u_k - u|^{s+1} dx + \mathcal{o}(1).$$

4. Die Voraussetzung (137) an das Differential  $dE_{\lambda}(u_k)$  und die soeben hergeleitete Gleichung (143) liefern, zusammen mit  $u_k \rightharpoonup u$  in  $H_0^m$ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{o}(1) &= \langle dE_{\lambda}(u_k) - dE_{\lambda}(u), u_k - u \rangle \\
&= S_{\lambda}(u_k - u) - \int_{\Omega} (|u_k|^{s-1}u_k - |u|^{s-1}u) (u_k - u) dx \\
&= S_0(u_k - u) - \int_{\Omega} |u_k - u|^{s+1} dx + \mathcal{o}(1),
\end{aligned}$$

$$(144) S_0(u_k - u) = \int_{\Omega} |u_k - u|^{s+1} dx + \mathcal{o}(1),$$

$$(145) E_0(u_k - u) = \frac{m}{n} S_0(u_k - u) + \mathcal{o}(1).$$

Aus (144) folgt nun zusammen mit der optimalen Sobolev-Einbettung (118):

$$\begin{aligned}
S_0(u_k - u) &\leq S^{-(s+1)/2} S_0(u_k - u)^{(s+1)/2} + \mathcal{o}(1) \\
&= S^{-(s+1)/2} S_0(u_k - u) \left( \frac{n}{m} E_0(u_k - u) \right)^{(s-1)/2} + \mathcal{o}(1) \quad \text{gemäß (145)} \\
&= S^{-(s+1)/2} S_0(u_k - u) \left( \frac{n}{m} E_{\lambda}(u_k) - \frac{n}{m} E_{\lambda}(u) + \mathcal{o}(1) \right)^{(s-1)/2} + \mathcal{o}(1) \\
&\quad \text{gemäß (142)} \\
&\leq S^{-(s+1)/2} S_0(u_k - u) \left( \frac{n}{m} \lim_{k \rightarrow \infty} E_{\lambda}(u_k) + \mathcal{o}(1) \right)^{(s-1)/2} + \mathcal{o}(1) \quad \text{gemäß (139)} \\
&\leq \left[ S^{-(s+1)/2} \left( \frac{n}{m} \lim_{k \rightarrow \infty} E_{\lambda}(u_k) \right)^{(s-1)/2} \right] S_0(u_k - u) + \mathcal{o}(1).
\end{aligned}$$

Die eckige Klammer ist gemäß Voraussetzung (136) kleiner als 1:

$$S^{-(s+1)/2} \left( \frac{n}{m} \lim_{k \rightarrow \infty} E_{\lambda}(u_k) \right)^{(s-1)/2} < S^{-n/(n-2m)} (S^{n/2m})^{2m/(n-2m)} = 1. \quad \blacksquare$$

Wie bereits auf S. 72 angedeutet, ist ein geeignetes Hilfsmittel aus der Variationsrechnung zum Beweis von Satz 2.8 ein allgemeines “symmetrisches mountain pass lemma”, das auf Ambrosetti, Rabinowitz [AR] zurückgeht. Wir zitieren es in einer Version von Bartolo, Benci, Fortunato [BBF, Theorem 2.4]:

**Hilfssatz 2.10.** *Sei  $H$  ein reeller Hilbertraum,  $E : H \rightarrow \mathbb{R}$  ein stetig Fréchet-differenzierbares Funktional, das eine lokale Palais-Smale Bedingung zum Niveau  $c_0 > 0$  erfüllt. Weiter gelte:*

i)  $E(0) = 0$ .

ii)  $E$  ist gerade, d.h. für alle  $u \in H$  ist  $E(u) = E(-u)$ .

iii) Es gibt zwei abgeschlossene Teilräume  $V^+, V^- \subset H$  und positive Zahlen  $\rho, \delta > 0$  derart, daß gilt:

$$(146) \sup_{u \in V^-} E(u) < c_0,$$

$$(147) E(u) \geq \delta \text{ für alle } u \in V^+ \text{ mit } \|u\|_H = \rho,$$

$$(148) \text{codim } V^+ < \infty.$$

Dann hat  $E$  neben 0 noch mindestens

$$(149) \ell = \dim(V^+ \cap V^-) - \text{codim}(V^+ + V^-)$$

Paare kritischer Punkte.

Der Teil c) von Satz 2.8, der die Existenz von Lösungen in Linksumgebungen von Eigenwerten betrifft, läßt sich nun relativ leicht zeigen. Dabei erhält man sogar ein Vielfachheitsresultat, das in allen Raumdimensionen interessant ist, vgl. auch [CFS].

**Beweis von Satz 2.8.c.** Sei  $\Lambda_{m,j}$  der  $j$ -te Eigenwert von  $(-\Delta)^m$  in  $\Omega$  mit Vielfachheit  $\ell \geq 1$ , wir können annehmen:  $\Lambda_{m,j-1} < \Lambda_{m,j} = \dots = \Lambda_{m,j+\ell-1} < \Lambda_{m,j+\ell}$ . Mit Blick auf Satz 2.5 und die Bemerkungen im Anschluß an Satz 2.4 können wir uns auf  $j > 1$  beschränken. Sei  $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  ein zur Eigenwertfolge  $(\Lambda_{m,i})_{i \in \mathbb{N}}$  gehöriges, in  $H_0^m(\Omega)$  orthonormiertes System von Eigenfunktionen für  $(-\Delta)^m$ . Setze:

$$\begin{aligned} V^+ &= \langle \varphi_1, \dots, \varphi_{j-1} \rangle^\perp \text{ in } H_0^m \\ V^- &= \langle \varphi_1, \dots, \varphi_{j+\ell-1} \rangle, \\ \lambda_0 &= S|\Omega|^{-2m/n}. \end{aligned}$$

Sei  $\lambda \in (\Lambda_{m,j} - \lambda_0, \Lambda_{m,j})$ . Für  $u \in V^-$  gibt es Zahlen  $t > 0, \tau_1, \dots, \tau_{j+\ell-1} \in \mathbb{R}$  mit

$$u = t \sum_{i=1}^{j+\ell-1} \tau_i \varphi_i, \quad \left\| \sum_{i=1}^{j+\ell-1} \tau_i \varphi_i \right\|_{L^{s+1}(\Omega)} = 1.$$

Aufgrund der Orthogonalität der  $(\varphi_i)$  sowohl in  $L^2$  als auch in  $H_0^m$  gilt:

$$\begin{aligned}
S_\lambda \left( \sum_{i=1}^{j+\ell-1} \tau_i \varphi_i \right) &= \sum_{i=1}^{j+\ell-1} (\Lambda_{m,i} - \lambda) \tau_i^2 \|\varphi_i\|_{L^2}^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{j+\ell-1} (\Lambda_{m,j} - \lambda) \tau_i^2 \|\varphi_i\|_{L^2}^2 = (\Lambda_{m,j} - \lambda) \left\| \sum_{i=1}^{j+\ell-1} \tau_i \varphi_i \right\|_{L^2}^2 \\
&\leq (\Lambda_{m,j} - \lambda) |\Omega|^{(s-1)/(s+1)} \left\| \sum_{i=1}^{j+\ell-1} \tau_i \varphi_i \right\|_{L^{s+1}}^2 = (\Lambda_{m,j} - \lambda) |\Omega|^{2m/n}.
\end{aligned}$$

Für  $u$  folgt damit unter Zuhilfenahme elementarer Differentialrechnung:

$$\begin{aligned}
E_\lambda(u) &= \frac{t^2}{2} S_\lambda \left( \sum_{i=1}^{j+\ell-1} \tau_i \varphi_i \right) - \frac{t^{s+1}}{s+1} \leq \frac{m}{n} ((\Lambda_{m,j} - \lambda) |\Omega|^{2m/n})^{n/2m} \\
\Rightarrow \sup_{u \in V^-} E_\lambda(u) &< \frac{m}{n} (\lambda_0 |\Omega|^{2m/n})^{n/2m} = \frac{m}{n} S^{n/2m},
\end{aligned}$$

d.h. auf  $V^-$  liegen die Werte von  $E_\lambda$  unterhalb des ‘‘gefährlichen’’ Wertes, bis zu dem gemäß Hilfssatz 2.9 die lokale Palais-Smale Bedingung erfüllt ist.

Schließlich gilt für  $u \in V^+$  aufgrund der Variationscharakterisierung der Eigenwerte:

$$\begin{aligned}
(150) \quad E_\lambda(u) &= \frac{1}{2} S_0(u) - \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{s+1} \|u\|_{L^{s+1}}^{s+1} \\
&\geq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\lambda}{\Lambda_{m,j}} \right) S_0(u) - \frac{1}{s+1} S^{-(s+1)/2} S_0(u)^{(s+1)/2} \\
&\geq \delta
\end{aligned}$$

für ein  $\delta > 0$ , falls  $S_0(u) = \|u\|_{H_0^m}^2 = \rho^2$  und  $\rho > 0$  geeignet gewählt ist.

Hilfssatz 2.10 liefert nun die Existenz von  $\ell = \dim(V^+ \cap V^-)$  verschiedenen Paaren nichttrivialer kritischer Punkte und damit Lösungen von (134). ■

**Bemerkung.** Im Falle subkritischen Wachstums in Problem (134), in dem das Funktional  $E_\lambda$  eine globale Palais-Smale Bedingung erfüllt, kann der Raum  $V^-$  von beliebig hoher endlicher Dimension gewählt werden. Es folgt die Existenz unendlich vieler verschiedener Lösungen für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Im folgenden können wir also stets  $n \geq 4m$  annehmen. In diesem Fall soll das weiterreichende Resultat Satz 2.8.a, b bewiesen werden. Die wesentliche Schwierigkeit besteht darin, für jedes  $\lambda > 0$  Teilräume  $V^+$ ,  $V^-$  derart anzugeben, daß neben den anderen Voraussetzungen von Hilfssatz 2.10 insbesondere  $\sup_{u \in V^-} E_\lambda(u) < \frac{m}{n} S^{n/2m}$  gilt. Genau wie in Kapitel 2.1.2, s.a. S. 72, spielen dabei Minimalfolgen für die optimale Sobolev-Einbettung (118) eine zentrale Rolle, allerdings jetzt in Kombination

mit Eigenfunktionen. Nach Skalieren und Translatieren können wir o.B.d.A.  $B \subset \Omega$  annehmen und die Definition (130) der Funktionenschar  $w_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$  übernehmen.

Die Teilräume  $V^+$ ,  $V^-$  sind in Abhängigkeit davon zu definieren, ob  $\lambda > 0$  Dirichlet-Eigenwert zu  $(-\Delta)^m$  ist. Mit Blick auf Satz 2.5 können wir ohne Einschränkung  $\lambda \geq \Lambda_{m,1}$  annehmen. Die folgenden Definitionen enthalten  $w_\varepsilon$  und sind deshalb von  $\varepsilon > 0$  abhängig. Dieser Parameter wird im Beweis von Hilfssatz 2.13 so fixiert werden, daß die Voraussetzungen von Hilfssatz 2.10 erfüllt sein werden.

**Fall 1:  $\lambda$  ist kein Eigenwert.**

D.h. für geeignetes  $j \geq 2$  ist  $\Lambda_{m,j-1} < \lambda < \Lambda_{m,j}$ . Seien  $(\varphi_j)$  in  $H_0^m(\Omega)$  orthonormierte Dirichlet-Eigenfunktionen zu  $(-\Delta)^m$ , dann setzen wir:

$$(151) \quad \begin{cases} V^+ := \langle \varphi_1, \dots, \varphi_{j-1} \rangle^\perp \text{ in } H_0^m, \\ V^- := \langle \varphi_1, \dots, \varphi_{j-1} \rangle + \langle w_\varepsilon \rangle. \end{cases}$$

**Fall 2:  $\lambda$  ist Eigenwert.**

D.h. es gibt  $j \geq 1$  mit  $\lambda = \Lambda_{m,j} = \dots = \Lambda_{m,j+\ell-1}$ , wobei  $\ell$  die genaue Vielfachheit des Eigenwertes  $\lambda$  ist. Wir setzen:

$$(152) \quad \begin{cases} V^+ := \langle \varphi_1, \dots, \varphi_{j+\ell-1} \rangle^\perp \text{ in } H_0^m, \\ V^- := \langle \varphi_1, \dots, \varphi_{j+\ell-1} \rangle + \langle w_\varepsilon \rangle. \end{cases}$$

Außerdem sei  $P_\lambda$  der Orthogonalprojektor in  $H_0^m$  auf den zugehörigen Eigenraum:

$$(153) \quad P_\lambda := \sum_{i=1}^{\ell} (\cdot, \varphi_{j+i-1})_{H_0^m} \varphi_{j+i-1}.$$

Wir stellen zunächst einige Eigenschaften der Familie  $(w_\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$  zusammen:

**Hilfssatz 2.11.** *Es gibt positive Konstanten  $c_1, c_2$ , so daß gilt:*

$$(154) \quad S_0(w_\varepsilon) = S + \mathcal{O}(\varepsilon^{n-2m}),$$

$$(155) \quad \int_{\Omega} w_\varepsilon^{s+1} dx = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^n),$$

$$(156) \quad \int_{\Omega} w_\varepsilon^2 dx \geq \begin{cases} c_1 \varepsilon^{2m} + \mathcal{O}(\varepsilon^{n-2m}), & \text{falls } n > 4m, \\ c_2 \varepsilon^{2m} |\log \varepsilon| + \mathcal{O}(\varepsilon^{2m}), & \text{falls } n = 4m, \end{cases}$$

$$(157) \quad \int_{\Omega} w_\varepsilon dx = \mathcal{O}(\varepsilon^{(n-2m)/2}),$$

$$(158) \quad \int_{\Omega} w_\varepsilon^s dx = \mathcal{O}(\varepsilon^{(n-2m)/2}).$$

**Beweis.** Die Formeln (154) bis (156) sind (131) bis (133) aus dem Beweis von Hilfssatz 2.7.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} w_{\varepsilon} dx &\leq \int_{|x|\leq 1} v_{\varepsilon} dx = c_{m,n} \int_{|x|\leq 1} \frac{\varepsilon^{(n-2m)/2}}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{(n-2m)/2}} dx \\
&\leq c_{m,n} \varepsilon^{(n-2m)/2} \int_{|x|\leq 1} |x|^{2m-n} dx = \mathcal{O}(\varepsilon^{(n-2m)/2}); \\
\int_{\Omega} w_{\varepsilon}^s dx &\leq C \int_{|x|\leq 1} \left( \frac{\varepsilon^{(n-2m)/2}}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{(n-2m)/2}} \right)^{(n+2m)/(n-2m)} dx \\
&\leq C \varepsilon^{(n+2m)/2} \left\{ \int_{|x|\leq \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^{n+2m}} dx + \int_{\varepsilon \leq |x|\leq 1} \frac{1}{|x|^{n+2m}} dx \right\} = \mathcal{O}(\varepsilon^{(n-2m)/2}). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Hilfssatz 2.12.** Sei  $V \subset H_0^m$  ein endlichdimensionaler Teilraum. Dann gibt es eine Konstante  $c_3$ , die insbesondere von  $n, m$  und  $V$  abhängt, derart, daß für alle  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $v \in V$  gilt:

$$(159) \quad \int_{\Omega} |v + tw_{\varepsilon}|^{s+1} dx \geq \int_{\Omega} |tw_{\varepsilon}|^{s+1} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v|^{s+1} dx - c_3 |t|^{s+1} \varepsilon^{n(n-2m)/(n+2m)}.$$

**Beweis.** Auf endlichdimensionalen Teilräumen sind alle Normen äquivalent. Deshalb können wir auf  $V$  unter Inkaufnahme von Konstanten, die möglicherweise stark von  $V$  abhängen, beliebig von einer Norm zu einer anderen übergehen. Für alle  $v \in V$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$  gilt also:

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\Omega} |v + tw_{\varepsilon}|^{s+1} dx - \int_{\Omega} |tw_{\varepsilon}|^{s+1} dx - \int_{\Omega} |v|^{s+1} dx \right| \\
&= \left| \int_{\Omega} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau} |\tau v + tw_{\varepsilon}|^{s+1} d\tau dx - \int_{\Omega} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau} |\tau v|^{s+1} d\tau dx \right| \\
&= \left| \int_{\Omega} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \sigma} |\tau v + \sigma tw_{\varepsilon}|^{s+1} d\sigma d\tau dx \right| \\
&= (s+1)s \left| \int_{\Omega} \int_0^1 \int_0^1 tvw_{\varepsilon} |\tau v + \sigma tw_{\varepsilon}|^{s-1} d\sigma d\tau dx \right| \\
&\leq C \int_{\Omega} (|tw_{\varepsilon}| \cdot |v|^s + |tw_{\varepsilon}|^s \cdot |v|) dx \\
&\leq C \left( |t| \|w_{\varepsilon}\|_{L^1} \|v\|_{L^{\infty}}^s + |t|^s \|w_{\varepsilon}\|_{L^s}^s \|v\|_{L^{\infty}} \right) \\
&\leq C \left( |t| \|v\|_{L^{s+1}}^s \varepsilon^{(n-2m)/2} + |t|^s \|v\|_{L^{s+1}} \varepsilon^{(n-2m)/2} \right) \quad \text{gemäß (157), (158)} \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v|^{s+1} dx + C |t|^{s+1} (\varepsilon^n + \varepsilon^{n(n-2m)/(n+2m)}).
\end{aligned}$$

Wegen  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$  folgt die Behauptung. \blacksquare

Nun folgt der für Satz 2.8.a, b entscheidende Nachweis, daß sich  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$  so wählen läßt, daß  $E_\lambda$  auf dem in (151) bzw. (152) erklärten Teilraum  $V^-$  tatsächlich unter dem hinsichtlich Kompaktheit “gefährlichen” Niveau bleibt.

**Hilfssatz 2.13.** *Sei  $\lambda$  wie in Satz 2.8.a oder b. Für ein geeignetes  $\varepsilon > 0$  gilt:*

$$\sup_{u \in V^-} E_\lambda(u) < \frac{m}{n} S^{n/2m}.$$

**Beweis.** Mittels elementarer Differentialrechnung überzeugt man sich davon, daß es zu zeigen reicht:

$$(160) \sup \{ S_\lambda(u) : u \in V^-, \|u\|_{L^{s+1}} = 1 \} < S.$$

Im folgenden ist danach zu unterscheiden, ob  $\lambda$  Dirichlet-Eigenwert von  $(-\Delta)^m$  ist oder nicht.

**Fall 1:  $\lambda$  ist kein Eigenwert,  $n \geq 4m$ .**

Wir verwenden die Bezeichnungen von S. 77. Sei  $u = v + tw_\varepsilon \in V^-$ ,  $v \in V := \langle \varphi_1, \dots, \varphi_{j-1} \rangle$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\|u\|_{L^{s+1}} = 1$ . Gemäß (155) gilt  $\int_\Omega w_\varepsilon^{s+1} dx = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^n)$ . Folglich zeigt Hilfssatz 2.12, daß  $t$  unabhängig von  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  beschränkt ist, sofern  $\varepsilon_0 > 0$  geeignet gewählt wird. Entsprechendes gilt infolgedessen auch für  $\|v\|$ . Auch hier werden wir wieder auf dem endlichdimensionalen Teilraum  $V$  Normen beliebig gegeneinander austauschen. Außerdem ist zu beachten, daß  $v$  eine Linearkombination aus Eigenfunktionen ist.

Im folgenden sind die Konstanten von  $t$ ,  $v$  und  $\varepsilon$  unabhängig, sie können jedoch u.a. von  $n, m, \Omega, \lambda, V$  und den Schranken für  $t$  abhängen.

$$\begin{aligned} (161) \quad S_\lambda(u) &= S_\lambda(v + tw_\varepsilon) \\ &= S_\lambda(v) + t^2 S_\lambda(w_\varepsilon) + 2t \int_\Omega (-\Delta)^m v \cdot w_\varepsilon dx - 2t\lambda \int_\Omega v \cdot w_\varepsilon dx \\ &\leq S_\lambda(v) + t^2 S_\lambda(w_\varepsilon) + C \|w_\varepsilon\|_{L^1} \cdot \{ \|\Delta^m v\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty} \} \\ &\leq (\Lambda_{m,j-1} - \lambda) \|v\|_{L^2}^2 + C \|v\|_{L^2} \varepsilon^{(n-2m)/2} + t^2 S_\lambda(w_\varepsilon) \quad \text{mittels (157)}. \end{aligned}$$

Die Nebenbedingung  $\|u\|_{L^{s+1}} = 1$  soll ausgenutzt werden, um Kontrolle über den Term  $t^2 S_\lambda(w_\varepsilon)$  zu erlangen. Wir entnehmen dem Beweis von Hilfssatz 2.12 unter Verwendung von  $\int_\Omega |v + tw_\varepsilon|^{s+1} dx = 1$  und der Beschränktheit von  $t$ :

$$\begin{aligned} 1 - \int_\Omega |tw_\varepsilon|^{s+1} dx - \int_\Omega |v|^{s+1} dx &\geq -C\varepsilon^{(n-2m)/2} \|v\|_{L^{s+1}}^s - C\varepsilon^{(n-2m)/2} \|v\|_{L^2} \\ &\geq - \int_\Omega |v|^{s+1} dx - C\varepsilon^n - C\varepsilon^{(n-2m)/2} \|v\|_{L^2}, \end{aligned}$$

folglich:

$$\begin{aligned} (162) \quad \|tw_\varepsilon\|_{L^{s+1}}^2 &= \left( \int_\Omega |tw_\varepsilon|^{s+1} dx \right)^{2/(s+1)} \leq (1 + C\varepsilon^n + C\varepsilon^{(n-2m)/2} \|v\|_{L^2})^{2/(s+1)} \\ &\leq 1 + C\varepsilon^n + C\varepsilon^{(n-2m)/2} \|v\|_{L^2}. \end{aligned}$$



Diese Information ergibt, eingesetzt in (161), falls  $n > 4m$ :

$$\begin{aligned}
S_\lambda(u) &\leq (\Lambda_{m,j-1} - \lambda) \|v\|_{L^2}^2 + C \|v\|_{L^2} \varepsilon^{(n-2m)/2} + \frac{S_\lambda(w_\varepsilon)}{\|w_\varepsilon\|_{L^{s+1}}^2} \|tw_\varepsilon\|_{L^{s+1}}^2 \\
&\leq (\Lambda_{m,j-1} - \lambda) \|v\|_{L^2}^2 + C \|v\|_{L^2} \varepsilon^{(n-2m)/2} \\
&\quad + \frac{S - c_1 \varepsilon^{2m} + \mathcal{O}(\varepsilon^{n-2m})}{1 + \mathcal{O}(\varepsilon^n)} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon^n) + C \varepsilon^{(n-2m)/2} \|v\|_{L^2}) \\
&\hspace{15em} \text{mittels (154)-(156), (162)} \\
&\leq (\Lambda_{m,j-1} - \lambda) \|v\|_{L^2}^2 + C \|v\|_{L^2} \varepsilon^{(n-2m)/2} \\
&\quad + (S - c_1 \varepsilon^{2m} + \mathcal{O}(\varepsilon^{n-2m})) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon^n)) \\
&\leq S - c_1 \varepsilon^{2m} + \mathcal{O}(\varepsilon^{n-2m}) \quad \text{verm\u00f6ge der Youngschen Ungleichung} \\
&\leq S - \frac{c_1}{2} \varepsilon^{2m},
\end{aligned}$$

sofern  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ,  $\varepsilon_0$  hinreichend klein.

Ist  $n = 4m$ , so erh\u00e4lt man entsprechend:

$$S_\lambda(u) \leq S - c_2 \varepsilon^{2m} |\log \varepsilon| + \mathcal{O}(\varepsilon^{2m}) \leq S - \frac{c_2}{2} \varepsilon^{2m} |\log \varepsilon|$$

f\u00fcr kleines  $\varepsilon > 0$ . Damit ist (160) in diesem Falle bewiesen.

**Fall 2:  $\lambda$  ist Eigenwert**,  $\lambda = \Lambda_{m,j}$ ,  $n > (\sqrt{8} + 2)m$ .

Der Spektralprojektor  $P_\lambda$  auf den zugeh\u00f6rigen Eigenraum wurde auf S. 77 zusammen mit einigen anderen Notationen eingef\u00fchrt. Setze  $Q_\lambda := Id - P_\lambda$ , der Einfachheit halber lassen wir im folgenden den Index  $\lambda$  weg. Wie in (152) eingef\u00fchrt, betrachten wir

$$V^- = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_{j+\ell-1} \rangle + \langle w_\varepsilon \rangle.$$

Sei  $u = v + tw_\varepsilon$ ,  $v \in V = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_{j+\ell-1} \rangle$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\|u\|_{L^{s+1}} = 1$ . Mit Ausnahme der Absch\u00e4tzung von  $S_\lambda(u)$  gehen wir genauso wie im ersten Fall vor. Insbesondere ist f\u00fcr hinreichend kleines  $\varepsilon_0 > 0$  der Parameterwert  $t$  gleichm\u00e4\u00dfig f\u00fcr alle  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  beschr\u00e4nkt. Der wesentliche Unterschied zu den \u00dcberlegungen oben auf S. 79 besteht darin, da\u00df  $v = Pv + Qv$  zerlegt wird. Der Anteil  $Pv$  ist wegen  $S_\lambda(Pv) = 0$  bez\u00fcglich des Funktional  $S_\lambda(\cdot)$  "kritisch". Im Falle  $j = 1$  ist sogar  $Qv = 0$ ,  $v = Pv$ . Es gilt unter Verwendung von  $(-\Delta)^m(Pv) = \lambda(Pv)$ :

$$\begin{aligned}
S_\lambda(u) &= S_\lambda(v) + t^2 S_\lambda(w_\varepsilon) + 2t \int_{\Omega} ((-\Delta)^m v - \lambda v) w_\varepsilon dx \\
&= S_\lambda(Qv) + t^2 S_\lambda(w_\varepsilon) + 2|t| \|(-\Delta)^m(Qv) - \lambda(Qv)\|_{L^\infty} \|w_\varepsilon\|_{L^1} \\
&\leq (\Lambda_{m,j-1} - \lambda) \|Qv\|_{L^2}^2 + C \|Qv\|_{L^2} \varepsilon^{(n-2m)/2} + \frac{S_\lambda(w_\varepsilon)}{\|w_\varepsilon\|_{L^{s+1}}^2} \|tw_\varepsilon\|_{L^{s+1}}^2 \\
&\hspace{15em} \text{gem\u00e4\u00df (157)} \\
&\leq \frac{S_\lambda(w_\varepsilon)}{\|w_\varepsilon\|_{L^{s+1}}^2} \|tw_\varepsilon\|_{L^{s+1}}^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^{n-2m}).
\end{aligned}$$

Da  $\lambda$  Eigenwert ist, müssen wir nun wesentlich von der Argumentation auf S. 80 abweichen. Selbst wenn wir in der Zeile oben einen Term  $\|Qv\|^2$  mit negativem Faktor behalten hätten, ist die Verwendung von (162) nicht angebracht, weil dadurch ein zusätzlicher Term  $\|v\|$  und damit  $\|Pv\|$  auf der rechten Seite entsteht. Stattdessen ist direkt Hilfssatz 2.12 einzusetzen. Für  $n > 4m$  gilt mit von  $v, t, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  unabhängigen Konstanten:

$$\begin{aligned} S_\lambda(u) &\leq \frac{S - c_1\varepsilon^{2m} + \mathcal{O}(\varepsilon^{n-2m})}{1 + \mathcal{O}(\varepsilon^n)} \cdot (1 + c_4\varepsilon^{n(n-2m)/(n+2m)})^{2/(s+1)} \\ &\leq (S - c_1\varepsilon^{2m} + \mathcal{O}(\varepsilon^{n-2m})) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon^{n(n-2m)/(n+2m)})) \\ &\leq S - c_1\varepsilon^{2m} + \mathcal{O}(\varepsilon^{n(n-2m)/(n+2m)}). \end{aligned}$$

Für  $n > (\sqrt{8} + 2)m$  ist  $n(n - 2m)/(n + 2m) > 2m$ , in diesem Falle gilt also:

$$S_\lambda(u) \leq S - \frac{c_1}{2}\varepsilon^{2m},$$

sofern  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein gewählt wird. ■

**Beweis von Satz 2.8.a und b.**  $V^+$  und  $V^-$  werden gemäß (151) bzw. (152) gewählt, dabei fixiert man  $\varepsilon > 0$  gemäß Hilfssatz 2.13. Infolge dieser Wahl bleibt das Funktional  $E_\lambda(\cdot)$  auf  $V^-$  unterhalb des “gefährlichen” Niveaus, bis zu dem  $E_\lambda(\cdot)$  gemäß Hilfssatz 2.9 einer lokalen Palais-Smale Bedingung genügt. Um den “Paß” zu finden, bleibt also die Existenz der “Berge”, d.h. von (147), nachzuweisen. Mit Hilfe der Variationscharakterisierung der Eigenwerte gelingt dieser Nachweis völlig analog zu (150).

Da  $\dim(V^+ \cap V^-) = 1$ , existiert somit zumindest ein Paar nichttrivialer kritischer Punkte von  $E_\lambda$  und daher ein Paar nichttrivialer Lösungen von (134). ■

**Bemerkung.** Die auf S. 81 am Ende des Beweises von Hilfssatz 2.13 erwähnte Komplikation wurde von Capozzi, Fortunato, Palmieri [CFP] nicht beachtet. Es scheint so, daß ihr Beweis in vier Raumdimensionen,  $m = 1$ , in dem Fall nicht gilt, in dem  $\lambda$  Eigenwert von  $-\Delta$  ist.

Tatsächlich sprechen Plausibilitätsbetrachtungen für eine Sonderrolle der Eigenwerte in vier Dimensionen. Atkinson, Brezis, Peletier [ABP] zeigen in Kugeln  $B \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 4, 5$ , daß sich die in  $\Lambda_{1,j+1}$  beginnenden Zweige radialsymmetrischer Lösungen  $u$  für  $\|u\|_{L^\infty} \rightarrow \infty$  an  $\lambda = \Lambda_{1,j}$  anschmiegen. Dort wird für  $\lambda = \Lambda_{1,j}$  allerdings weder die Existenz noch die Nichtexistenz nichttrivialer radialsymmetrischer Lösungen gezeigt.

Andererseits ist die Argumentation zum Beweis von Satz 2.8 auch zur Konstruktion radialsymmetrischer Lösungen geeignet. Es ist also nicht auszuschließen, daß sich das Verfehlen der Kompaktheitsschranke für  $n < (\sqrt{8} + 2)m$ ,  $\lambda$  Eigenwert, in Nichtexistenz radialsymmetrischer Lösungen niederschlägt. Eine Klärung dieser Frage scheint noch nicht gelungen zu sein.

Es sei bemerkt, daß Fortunato, Jannelli [FJ] in der Kugel  $B \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ , für alle  $\lambda > 0$  unsymmetrische Lösungen konstruiert haben. Allerdings ist es nicht offensichtlich, wie ein solches Resultat für Gleichungen höherer Ordnung zu gewinnen ist.

### 3 Semilineare Eigenwertprobleme: Nicht-Existenz-Resultate

In diesem Kapitel werden Nichtexistenzresultate für das semilineare polyharmonische Modellproblem aus Kapitel 2:

$$(163) \begin{cases} (-\Delta)^m u = \lambda u + |u|^{s-1} u, & u \neq 0 \text{ in } B, \\ D^\alpha u|_{\partial B} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m-1, \end{cases}$$

diskutiert, dabei ist  $s = (n+2m)/(n-2m)$  wieder der kritische Sobolevexponent und  $B \subset \mathbb{R}^n$  die Einheitskugel,  $n > 2m$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . In Kapitel 2 wurden Existenzresultate für das Problem (163) und für analoge Probleme mit subkritischem Wachstum einander gegenübergestellt. Dabei konnten im Fall kritischen Wachstums Kompaktheitsschlüsse in gewissen  $\lambda$ -Bereichen nicht mehr durchgeführt werden. Hier soll nun mit Hilfe einiger Nichtexistenzresultate gezeigt werden, daß der Kompaktheitsverlust in gewissen Funktionenklassen tatsächlich auftritt.

Der Fall  $\lambda < 0$  wurde bereits von Pucci und Serrin [PS1] für glatte, beschränkte, sternförmige Gebiete  $\Omega$  (anstelle von  $B$ ) behandelt. Ähnlich wie bei Gleichungen zweiter Ordnung [Poh] können diese Autoren eine ‘‘Pohožaev-Identität’’ herleiten, indem sie (163) mit  $\sum_{i=1}^n x_i u_{x_i}$  und mit  $u$  skalar multiplizieren, jeweils partiell integrieren und geeignete Vielfache der so hergeleiteten Integralidentitäten von einander subtrahieren. Angenommen,  $\Omega$  ist sternförmig bezüglich 0 und  $u \in C^{2m}(\bar{\Omega})$  ist eine Lösung von (163), so gilt:

$$(164) \quad 2m\lambda \int_{\Omega} u^2 dx = \begin{cases} \int_{\partial\Omega} (\Delta^{m/2} u(x))^2 (x \cdot \nu) d\omega(x), & \text{falls } m \text{ gerade,} \\ \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta^{(m-1)/2} u(x) \right)^2 (x \cdot \nu) d\omega(x), & \text{falls } m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dabei ist  $\nu$  die äußere Normale an  $\partial\Omega$ , Sternförmigkeit bezüglich 0 impliziert  $x \cdot \nu \geq 0$  auf  $\partial\Omega$ . Da  $u \neq 0$  angenommen wurde, folgt als notwendige Bedingung für die Existenz einer (nichttrivialen) Lösung von (163):

$$(165) \quad \lambda \geq 0.$$

Zieht man zusätzlich zur Pohožaev-Identität (164) das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit, s. z.B. [Pro], in Betracht, so läßt sich die notwendige Bedingung (165) im Falle  $m = 1$  zu  $\lambda > 0$  verschärfen. Ist jedoch  $m > 1$ , so treten bereits hier ganz erhebliche Schwierigkeiten auf, welche erst zum Teil bewältigt werden konnten. Diese Problematik wird im Abschnitt 3.3 ausführlich diskutiert.

Der überwiegende Teil dieses Kapitels ist der Sonderrolle der Dimensionen  $n = 2m+1, \dots, 4m-1$  bezüglich des Randwertproblems (163) gewidmet, die durch den Existenzsatz 2.5 nahegelegt wird.

Im folgenden Abschnitt 3.1 wird gezeigt, daß Satz 2.5 zumindest qualitativ in der Klasse positiver radialsymmetrischer Funktionen scharf ist, d.h. ist  $n \in \{2m +$

$1, \dots, 4m - 1\}$ , so gibt es Nullumgebungen für  $\lambda$ , in denen derartige Lösungen nicht existieren, s. Satz 3.1.

Im Abschnitt 3.2 untersuchen wir die weitergehende, von Pucci und Serrin [PS3] aufgeworfene Frage, ob ein solches Nichtexistenzphänomen auch in der Klasse lediglich radialsymmetrischer Funktionen zu beobachten ist. Diese Frage kann aufgrund ihrer ganz erheblichen Komplexität in dieser Arbeit erst teilweise beantwortet werden, s. Satz 3.2.

### 3.1 Eine Vermutung von Pucci und Serrin, I: Nichtexistenz positiver radialsymmetrischer Lösungen

In ihrer Arbeit [PS3] setzen sich Pucci und Serrin intensiv mit Nichtexistenzphänomenen des Randwertproblems (163) auseinander. Ihrer Arbeit ist implizit zu entnehmen, daß sie ein Existenzresultat wie Satz 2.5 erwarten. Sie vermuten, daß dieses Resultat in der Klasse radialsymmetrischer Funktionen scharf ist:

**Vermutung von Pucci und Serrin.** *Die kritischen Dimensionen für das Randwertproblem (163) sind genau  $n = 2m + 1, \dots, 4m - 1$ .*

Dabei heißt die Dimension  $n$  gemäß Definition 0.1 kritisch bezüglich des Randwertproblems (163), falls es eine positive Zahl  $\Lambda = \Lambda(n, m) > 0$  gibt derart, daß (nichttriviale) radialsymmetrische Lösungen höchstens für  $\lambda > \Lambda$  existieren.

In dieser Allgemeinheit ist die Pucci-Serrinsche Vermutung noch offen. Durch eine weitere Einschränkung der Lösungsklasse läßt sich allerdings tatsächlich das kritische Verhalten der Dimensionen  $2m + 1, \dots, 4m - 1$  nachweisen. Der folgende Nichtexistenzsatz ist das Gegenstück zum Existenzsatz 2.5:

**Satz 3.1.** *Sei  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \{2m + 1, \dots, 4m - 1\}$ ,  $s = (n + 2m)/(n - 2m)$ ,  $B \subset \mathbb{R}^n$  die Einheitskugel.*

*Dann gibt es eine Zahl  $\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}(n, m) > 0$ , so daß*

$$(166) \quad \lambda > \tilde{\Lambda}$$

*eine notwendige Bedingung ist für die Existenz positiver radialsymmetrischer Lösungen  $u \in C^{2m}(\overline{B})$  des Randwertproblems:*

$$(167) \quad \begin{cases} (-\Delta)^m u = \lambda u + u^s & \text{in } B, \\ u > 0 & \text{in } B, \\ D^\alpha u|_{\partial B} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m - 1. \end{cases}$$

**Beweis. 1.** Angenommen,  $u \in C^{2m}(\overline{B})$  ist eine positive radialsymmetrische Lösung des Randwertproblems (167). Gemäß (165) ist  $\lambda \geq 0$ . Im folgenden bezeichnet stets

$r := |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Wir führen  $w(r) := (1-r^2)^{m-1}$  als Gewichtsfunktion für den positiven Term  $(-\Delta)^m u$  ein. Dabei gilt:

$$(168) \quad \begin{aligned} &(-\Delta)^m w = 0, \\ &\left(\frac{d}{dr}\right)^j w|_{r=1} = 0 \text{ für } j = 0, \dots, m-2, \\ &\text{für gerades } m : \frac{d}{dr} (\Delta^{(m/2)-1} w)|_{r=1} < 0, \\ &\text{für ungerades } m : \Delta^{(m-1)/2} w|_{r=1} > 0. \end{aligned}$$

Die letzte Aussage folgt aus dem Positivitätsresultat Folgerung 1.20 aus Kapitel 1.1.5, denn  $(-\Delta)^{m-1} w > 0$ .

Für gerades  $m$  gilt vermöge partieller Integration und (168):

$$\begin{aligned} \int_B w (-\Delta)^m u \, dx &= \sum_{i=1}^n \int_B \frac{\partial}{\partial x_i} ((-\Delta)^{(m/2)-1} w) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} ((-\Delta)^{m/2} u) \, dx \\ &= (-1)^{m-1} \int_{\partial B} \left(\frac{d}{dr} (\Delta^{(m/2)-1} w)\right) (\Delta^{m/2} u) \, d\omega = C(n, m) \int_{\partial B} \Delta^{m/2} u \, d\omega, \end{aligned}$$

und für ungerades  $m$ :

$$\begin{aligned} \int_B w (-\Delta)^m u \, dx &= \int_B ((-\Delta)^{(m-1)/2} w) \cdot ((-\Delta)^{(m+1)/2} u) \, dx \\ &= (-1)^m \int_{\partial B} (\Delta^{(m-1)/2} w) \left(\frac{d}{dr} \Delta^{(m-1)/2} u\right) \, d\omega \\ &= C(n, m) \int_{\partial B} \left(-\frac{d}{dr} \Delta^{(m-1)/2} u\right) \, d\omega, \end{aligned}$$

die Zahlen  $C(n, m)$  sind dabei strikt positiv. Nach Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung findet man:

$$\left(\int_B w (-\Delta)^m u \, dx\right)^2 \leq \begin{cases} C(n, m) \int_{\partial B} (\Delta^{m/2} u)^2 \, d\omega, & \text{falls } m \text{ gerade,} \\ C(n, m) \int_{\partial B} \left(\frac{d}{dr} \Delta^{(m-1)/2} u\right)^2 \, d\omega, & \text{falls } m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Zusammen mit der Pohožaev-Identität (164) folgt:

$$(169) \quad \left(\int_B w (-\Delta)^m u \, dx\right)^2 \leq C(n, m) \cdot \lambda \int_B u^2 \, dx.$$

**2.** Der Term  $\int_B w (-\Delta)^m u \, dx = \int_B (1-r^2)^{m-1} (-\Delta)^m u \, dx$  kann als gewichtete  $L^1$ -Norm von  $(-\Delta)^m u$  aufgefaßt werden. Um diese nach unten gegen die  $L^2$ -Norm von  $u$  abschätzen zu können, erscheint ein Zwischenschritt notwendig, nämlich die Abschätzung nach unten durch die ungewichtete  $L^1$ -Norm von  $(-\Delta)^m u$ . Das ist natürlich in

allgemeinen Funktionenklassen unmöglich, hier geht wesentlich ein, daß  $u$  positiv und radialsymmetrisch ist. Aufgrund von (165) folgt aus der Differentialgleichung (167):  $(-\Delta)^m u > 0$  in  $B$ . Nach Hilfssatz 2.3 ist  $u$  als Funktion von  $r = |x|$  in  $(0, 1)$  streng monoton fallend. Erneute Betrachtung der Differentialgleichung (167) zeigt, daß auch  $(-\Delta)^m u$  in  $r \in (0, 1)$  streng monoton fallend ist. Diese starke Zusatzinformation erlaubt die folgende Abschätzung mit einer Konstanten, die nicht von  $u$  abhängt:

$$\begin{aligned}
0 &< \int_B (-\Delta)^m u \, dx = \int_{|x| \leq 1/2} (-\Delta)^m u \, dx + \int_{1/2 \leq |x| \leq 1} (-\Delta)^m u \, dx \\
&\leq \int_{|x| \leq 1/2} (-\Delta)^m u \, dx + ((-\Delta)^m u|_{r=1/2}) \cdot e_n \\
&= \int_{|x| \leq 1/2} (-\Delta)^m u \, dx + 2^n \int_{|x| \leq 1/2} dx \cdot ((-\Delta)^m u|_{r=1/2}) \\
&\leq (2^n + 1) \int_{|x| \leq 1/2} (-\Delta)^m u \, dx \leq (2^n + 1) \left(\frac{4}{3}\right)^{m-1} \int_{|x| \leq 1/2} w (-\Delta)^m u \, dx, \\
(170) \Rightarrow \quad 0 &< \int_B (-\Delta)^m u \, dx \leq C(n, m) \int_B w (-\Delta)^m u \, dx.
\end{aligned}$$

**3.** Wir benutzen eine Idee von Brezis und Nirenberg [BrN, Theorem 1.2"], um die  $L^2$ -Norm von  $u$  gegen die  $L^1$ -Norm von  $(-\Delta)^m u$  abzuschätzen.

Sei  $\varphi \in H^{2m}(B) \cap H_0^m(B)$  eine Lösung von  $(-\Delta)^m \varphi = u$ . Elliptische Abschätzungen [ADN] und Soboleveinbettungen liefern unter Beachtung von  $n < 4m$ :

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{C^0} &\leq C \|\varphi\|_{H^{2m}} \leq C \|(-\Delta)^m \varphi\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}; \\
\|u\|_{L^2}^2 &= \int_B u \cdot u \, dx = \int_B (-\Delta)^m \varphi \cdot u \, dx = \int_B \varphi \cdot (-\Delta)^m u \, dx \\
&\leq \|\varphi\|_{C^0} \cdot \|(-\Delta)^m u\|_{L^1} \leq C \|u\|_{L^2} \cdot \|(-\Delta)^m u\|_{L^1}; \\
\|u\|_{L^2} &\leq C(n, m) \|(-\Delta)^m u\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Da mit  $u$  auch  $(-\Delta)^m u$  positiv ist, folgt:

$$\|u\|_{L^2} \leq C \int_B (-\Delta)^m u \, dx.$$

Kombination dieser Abschätzung mit (169) und (170) führt schließlich auf:

$$\begin{aligned}
\int_B u^2 \, dx &\leq C(n, m) \left( \int_B (-\Delta)^m u \, dx \right)^2 \leq C(n, m) \left( \int_B w (-\Delta)^m u \, dx \right)^2 \\
&\leq C(n, m) \lambda \int_B u^2 \, dx.
\end{aligned}$$

Es folgt die notwendige Bedingung:

$$\lambda \geq \frac{1}{C(n, m)}.$$

■

### 3.2 Eine Vermutung von Pucci und Serrin, II: Nichtexistenz radialsymmetrischer Lösungen, Kritische Dimensionen

In diesem Abschnitt erweitern wir die Funktionenklasse, in der wir die Nichtexistenz von Lösungen des Randwertproblems (163) für  $\lambda$  in gewissen Nullumgebungen zeigen wollen: Wir lassen die Positivitätsforderung fallen und betrachten jetzt allgemein radialsymmetrische Funktionen. Diese nur scheinbar wenig allgemeinere Lösungsklasse erhöht die Komplexität des Problems ganz erheblich, im Gegensatz zu Satz 3.1 können wir hier nur ein recht unvollständiges Nichtexistenzresultat erzielen. Wir erinnern an die Definition 0.1 der kritischen Dimensionen und an die Vermutung von Pucci und Serrin auf S. 83.

**Satz 3.2.** *Für  $m \in \{1, 2, 3, 4\}$  sind die Dimensionen  $n = 2m + 1, \dots, 4m - 1$  kritisch. Ist  $m \geq 5$ , so gibt es mindestens fünf kritische Dimensionen, nämlich  $n = 2m + 1, \dots, 2m + 5$ .*

*Genauer gilt: Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 2m$ ,  $s = (n + 2m)/(n - 2m)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $B \subset \mathbb{R}^n$  die Einheitskugel. Sei  $u \in C^{2m}(\overline{B})$  eine nichttriviale radialsymmetrische Lösung von*

$$(171) \quad \begin{cases} (-\Delta)^m u = \lambda u + |u|^{s-1} u & \text{in } B, \\ D^\alpha u|_{\partial B} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m - 1. \end{cases}$$

Dann gilt,

a) falls  $m \geq 1$ ,  $n = 2m + 1$ :

$$(172) \quad \lambda > \frac{1}{2} \left( (2m + 2) - n \right) \left( n + (2m - 2) \right) \Lambda_{m-1,1};$$

b) falls  $m \geq 2$ ,  $n = 2m + 2, 2m + 3$ :

$$(173) \quad \lambda > \frac{1}{4} \left( (2m + 4) - n \right) \left( n - 2m \right) \left( n + 2m \right) \left( n + (2m - 4) \right) \Lambda_{m-2,1};$$

c) falls  $m \geq 3$ ,  $n = 2m + 4, 2m + 5$ :

$$(174) \quad \lambda > \frac{3}{32} \left( (2m + 6) - n \right) \left( n - (2m + 2) \right) \left( n - (2m - 2) \right) \\ \cdot \left( n + (2m + 2) \right) \left( n + (2m - 2) \right) \left( n + (2m - 6) \right) \Lambda_{m-3,1};$$

d) falls  $m = 4$ ,  $n = 14$ :

$$(175) \quad \lambda > 111\,600;$$

und falls  $m = 4$ ,  $n = 15$ :

$$(176) \quad \lambda > \frac{40\,883\,535}{128}.$$

**Bemerkungen.** 1) Die Vermutung von Pucci und Serrin (s. S. 83) ist somit für Gleichungen der Ordnung  $2m = 2, 4, 6$  und  $8$  bewiesen.

2) Teil a) sowie Teil b) für  $m = 2$  wurden bereits von Pucci und Serrin [PS3] bewiesen.

Ähnlich wie beim Nachweis der Notwendigkeit von  $\lambda \geq 0$  für die Existenz nichttrivialer Lösungen mit Hilfe der Pohožaev-Identität (164) spielen solche Testfunktionen eine zentrale Rolle, die die Lösung und ihre Radialableitung enthalten. Die Testfunktion

$$(177) \quad \begin{aligned} h &= \nabla\varphi_b \cdot \nabla u + a_b \cdot u, \\ \varphi_b(r) &= \frac{r^2}{2} - \frac{r^{b+2}}{b+2}, \quad a_b(r) = \mu r^b + \sigma, \quad r = |x|, \end{aligned}$$

$\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ ,  $b \in 2\mathbb{N}$  wurde von Pucci und Serrin [PS3] eingeführt und mit  $b = 2$  bzw.  $b = 4$  benutzt, um Satz 3.2.a) bzw. b) für  $m = 2$  zu beweisen. Durch partielle Integration und entsprechend häufiges Differenzieren von  $h$  erhält man gewichtete Integralidentitäten. Mit Hilfe von optimalen Einbettungs- und Interpolationsungleichungen ist zu versuchen, diese Identitäten zur Herleitung von Abschätzungen wie (172) - (176) auszubehuten. Der erste Schritt ist für große  $m$  vor allem rechnerisch sehr komplex. Allerdings legen die Formeln in den Hilfssätzen 3.5 - 3.7 nahe, daß hier geschlossene Ausdrücke in  $m, n, b$  gefunden werden könnten. Beim zweiten Schritt tauchen jedoch prinzipielle Probleme auf. Schon bei  $b = 8$ ,  $m > 4$  treten in der Abschätzungskette selbst bei der Verwendung optimaler Interpolationsungleichungen negative Koeffizienten vor den jeweiligen Termen höchster Ordnung auf, so daß dort die Argumentation zusammenbricht. Dazu s.u. den Abschnitt 3.2.6. Das heißt: Sollte die Pucci-Serrin-Vermutung allgemein richtig sein, sind zu deren Beweis subtilere Testfunktionen als (177) zu entdecken. Naheliegende Versuche mit Kombinationen aus Eigenfunktionen haben allerdings keinen Fortschritt erbracht.

### 3.2.1 Beweis von Satz 3.2, Teil 1

Hier sind nur (173) - (176) zu zeigen, für (172) verweisen wir auf [PS3].

Sei also  $u \in C^{2m}(\overline{B})$  eine nichttriviale radialsymmetrische Lösung von (171). Gemäß [PS1], s.a. (165), ist dann notwendigerweise

$$(178) \quad \lambda \geq 0.$$

Seien  $a, \varphi$  glatte radialsymmetrische Funktionen mit  $\nabla\varphi|_{\partial B} = 0$ . Multiplikation der Differentialgleichung (171) mit

$$h = \nabla\varphi \cdot \nabla u + a u$$

und partielle Integration unter Beachtung von  $D^\alpha h|_{\partial B} = 0$  für  $|\alpha| \leq m - 1$  ergeben



gemäß [PS3, (5) und (6)]:

$$(179) \Phi = \begin{cases} \int_B (\Delta^{(m/2)}u)^2 \cdot \left( \frac{1}{2} \Delta \varphi - a \right) dx \\ + \int_B \Delta^{(m/2)}u \cdot \{ a \Delta^{(m/2)}u - \Delta^{(m/2)}(au) \} dx \\ - \int_B \Delta^{(m/2)}u \cdot \{ \Delta^{(m/2)}(\nabla \varphi \cdot \nabla u) - \nabla \varphi \cdot \nabla (\Delta^{(m/2)}u) \} dx, \\ \text{falls } m \text{ gerade;} \\ \int_B |\nabla \Delta^{(m-1)/2}u|^2 \left( \frac{1}{2} \Delta \varphi - \varphi'' - a \right) dx \\ + \int_B (\Delta^{(m-1)/2}u)' \{ a \Delta^{(m-1)/2}u - \Delta^{(m-1)/2}(au) \}' dx \\ - \int_B a' (\Delta^{(m-1)/2}u) (\Delta^{(m-1)/2}u)' dx \\ - \int_B (\Delta^{(m-1)/2}u)' \{ \Delta^{(m-1)/2}(\nabla \varphi \cdot \nabla u) - \nabla \varphi \cdot \nabla (\Delta^{(m-1)/2}u) \}' dx, \\ \text{falls } m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dabei ist  $\Phi$  erklärt durch:

$$(180) \Phi := \int_B \left\{ \left( \frac{1}{2} \lambda u^2 + \frac{1}{s+1} |u|^{s+1} \right) \Delta \varphi - (\lambda u^2 + |u|^{s+1}) a \right\} dx.$$

Es werden nur radialsymmetrische Funktionen betrachtet, es bedeutet  $v' = \frac{d}{dr}v = \sum_{i=1}^n v_{x_i} \frac{x_i}{r}$ ,  $r = |x|$ . Die Testfunktionen  $\varphi = \varphi_b$  und  $a = a_b$  werden gemäß (177) gewählt. Mit dieser Setzung fällt die Abschätzung von  $\Phi$  in (180) nach oben nicht schwer. Wählt man für  $a_b$ :

$$(181) \sigma = \frac{n-2m}{2},$$

so berechnet man:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_B \left\{ \left( \frac{\lambda}{2} u^2 + \frac{n-2m}{2n} |u|^{s+1} \right) (n - (n+b)r^b) \right. \\ &\quad \left. - (\lambda u^2 + |u|^{s+1}) \left( \mu r^b + \frac{n-2m}{2} \right) \right\} dx \\ &= m\lambda \int_B u^2 dx - \left( \frac{n+b}{2} + \mu \right) \lambda \int_B r^b u^2 dx \\ &\quad - \left( \frac{(n-2m)(n+b)}{2n} + \mu \right) \int_B r^b |u|^{s+1} dx. \end{aligned}$$

Falls man außerdem noch

$$(182) \mu \geq 0$$

verlangt, so folgt daraus wegen  $u \neq 0$  und  $\lambda \geq 0$ :

$$(183) \quad \Phi < m\lambda \int_B u^2 dx.$$

Es bleibt also die Aufgabe, durch geeignete Wahl von  $b$  und  $\mu$  (179) nach unten durch positive Vielfache von  $\int_B u^2 dx$  abzuschätzen. Wie bereits erwähnt, haben Pucci und Serrin (172) durch die Wahl  $b = 2$  bewiesen. Wir erhalten (173) mit  $b = 4$ , (174) mit  $b = 6$  und schließlich (175), (176) mit  $b = 8$ . Im folgenden Abschnitt 3.2.2 stellen wir einige Hilfssätze zusammen, um (179), (180) in Abschnitt 3.2.3 in eine Identität zwischen gewichteten Seminormen von  $u$  umzuformen. Diese wird in Kapitel 3.2.5 ausgebeutet mittels optimaler Einbettungs- und Interpolationsungleichungen für solche gewichteten Seminormen, die in Abschnitt 3.2.4 zusammengestellt werden.

### 3.2.2 Einige Hilfssätze

Um die Identität (179) = (180) in eine Identität zwischen gewichteten Seminormen der Lösung  $u$  umzuformen, sind einerseits geschlossene Ausdrücke für  $\Delta^j(r^b u)$ ,  $\Delta^j(\nabla\varphi \cdot \nabla u) - \nabla\varphi \cdot \nabla\Delta^j u$ , usw. und andererseits Formeln für partielle Integration nötig. Diese Hilfssätze werden hier ohne Beweise zusammengestellt. Deren Beweise sind rechnerisch sehr aufwendig und können, zumindest in den im folgenden benötigten Fällen, in den Arbeiten [BerG], [Gr3] nachgesehen werden.

Die Hilfssätze werden hier so dargestellt, daß im Grundsatz deutlich wird, wie Verallgemeinerungen für beliebiges gerades  $b$  und beliebiges  $m$  zu entwickeln sind. Die Ursache für die relative Unvollständigkeit des Satzes 3.2 ist also nicht in diesem Abschnitt zu suchen.

Wie schon im vorhergehenden Abschnitt werden nur radialsymmetrische und ausreichend glatte Funktionen betrachtet.

#### Hilfssatz 3.3.

$$a) \quad v_{x_i} = v' \cdot \frac{x_i}{r}, \quad v' = \sum_{i=1}^n v_{x_i} \cdot \frac{x_i}{r}, \quad \nabla v \cdot \nabla w = v' \cdot w',$$

$$v_{x_i x_j} = v'' \cdot \frac{x_i x_j}{r^2} + \frac{v'}{r} \left( \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2} \right),$$

$$\sum_{i,j=1}^n (v_{x_i x_j} w_{x_i x_j}) = v'' \cdot w'' + \frac{n-1}{r^2} v' \cdot w'.$$

$$b) \quad \Delta v = v'' + \frac{n-1}{r} v', \quad (\Delta v)' = v''' + \frac{n-1}{r} v'' - \frac{n-1}{r^2} v',$$

$$\Delta(v \cdot w) = \Delta v \cdot w + 2\nabla v \cdot \nabla w + v \cdot \Delta w,$$

$$\Delta(\nabla v \cdot \nabla w) = \nabla(\Delta v) \cdot \nabla w + 2 \sum_{i,j=1}^n v_{x_i x_j} w_{x_i x_j} + \nabla v \cdot \nabla(\Delta w).$$

c) Sei  $b \in \mathbb{N}_0$  gerade, dann gilt:

$$\Delta(r^b v) = r^b \Delta v + 2br^{b-1}v' + b(n+b-2)r^{b-2}v,$$

$$\Delta(r^{b+1}v') = r^{b+1}(\Delta v)' + 2(b+1)r^b \Delta v - b(n-b-2)r^{b-1}v'.$$

**Hilfssatz 3.4.** Sei  $\varphi = \varphi_b = \frac{r^2}{2} - \frac{r^{b+2}}{b+2}$ ,  $b \in \mathbb{N}$  gerade. Dann gilt für alle  $j \in \mathbb{N}$ :

$$\Delta^j \varphi = \begin{cases} n - (n+b)r^b, & \text{falls } j = 1, \\ -\frac{1}{b+2} \left( \prod_{i=1}^j ((b+4-2i)(n+b+2-2i)) \right) r^{b+2-2j}, & \text{falls } j \geq 2. \end{cases}$$

**Hilfssatz 3.5.** Sei  $j \in \mathbb{N}$ ,  $b \in 2\mathbb{N}$ ,  $v \in C^{2j}(B)$ . Außerdem gelte  $b \leq 8$  oder  $j \leq 4$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \Delta^j(r^b v) - r^b \Delta^j v \\ &= 2jb r^{b-1} (\Delta^{j-1} v)' \\ &+ 2j(j-1) \frac{b(b-2)}{2!} \left\{ \binom{2}{1} \frac{(2j-1)(b-1)}{3} \right\} r^{b-3} (\Delta^{j-2} v)' \\ &+ 2j(j-1)(j-2) \frac{b(b-2)(b-4)}{3!} \left\{ \binom{3}{1} \frac{(2j-1)(2j-3)(b-1)(b-3)}{3 \cdot 5} \right. \\ &\quad \left. + \binom{3}{3} (n-1)(n-3) \right\} r^{b-5} (\Delta^{j-3} v)' \\ &+ 2j(j-1)(j-2)(j-3) \frac{b(b-2)(b-4)(b-6)}{4!} \\ &\quad \cdot \left\{ \binom{4}{1} \frac{(2j-1)(2j-3)(2j-5)(b-1)(b-3)(b-5)}{3 \cdot 5 \cdot 7} \right. \\ &\quad \left. + \binom{4}{3} \frac{(2j-3)(b-3)}{5} (n-1)(n-3) \right\} r^{b-7} (\Delta^{j-4} v)' \\ &+ jb \left\{ \binom{1}{0} (2j-1)(b-1) + \binom{1}{1} (n-1) \right\} r^{b-2} \Delta^{j-1} v \\ &+ j(j-1) \frac{b(b-2)}{2!} \left\{ \binom{2}{0} \frac{(2j-1)(2j-3)(b-1)(b-3)}{1 \cdot 3} \right. \\ &\quad \left. + \binom{2}{1} \frac{(2j-1)(b-1)}{3} (n-1) + \binom{2}{2} (n-1)(n-3) \right\} r^{b-4} \Delta^{j-2} v \\ &+ j(j-1)(j-2) \frac{b(b-2)(b-4)}{3!} \\ &\quad \cdot \left\{ \binom{3}{0} \frac{(2j-1)(2j-3)(2j-5)(b-1)(b-3)(b-5)}{1 \cdot 3 \cdot 5} \right. \\ &\quad \left. + \binom{3}{1} \frac{(2j-1)(2j-3)(b-1)(b-3)}{3 \cdot 5} (n-1) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \binom{3}{2} \frac{(2j-3)(b-3)}{3} (n-1)(n-3) \\
& + \binom{3}{3} (n+1)(n-1)(n-3) \left. \vphantom{\binom{3}{3}} \right\} r^{b-6} \Delta^{j-3} v \\
& + j(j-1)(j-2)(j-3) \frac{b(b-2)(b-4)(b-6)}{4!} \\
& \cdot \left\{ \binom{4}{0} \frac{(2j-1)(2j-3)(2j-5)(2j-7)(b-1)(b-3)(b-5)(b-7)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \right. \\
& + \binom{4}{1} \frac{(2j-1)(2j-3)(2j-5)(b-1)(b-3)(b-5)}{3 \cdot 5 \cdot 7} (n-1) \\
& + \binom{4}{2} \frac{(2j-3)(2j-5)(b-3)(b-5)}{3 \cdot 5} (n-1)(n-3) \\
& + \binom{4}{3} \frac{(2j-3)(b-3)}{5} (n+1)(n-1)(n-3) \\
& \left. + \binom{4}{4} (n+1)(n-1)(n-3)(n-5) \right\} r^{b-8} \Delta^{j-4} v.
\end{aligned}$$

**Bemerkung.** Negative Potenzen von  $\Delta$  treten nicht auf, denn die entsprechenden Vorfaktoren sind 0.

**Hilfssatz 3.6.** Sei  $b \in \mathbb{N}$  gerade,  $\varphi = \varphi_b = \frac{r^2}{2} - \frac{r^{b+2}}{b+2}$ . Weiter sei  $j \in \mathbb{N}$ ,  $v \in C^{2j+1}(B)$ ,  $b \in \{2, 4, 6, 8\}$  oder  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& \Delta^j (\nabla \varphi \cdot \nabla v) - \nabla \varphi \cdot \nabla (\Delta^j v) \\
& = 2j \{1 - (b+1)r^b\} \Delta^j v \\
& - 2j(j-1)b \left\{ \binom{1}{0} \frac{(2j-1)(b+1)(b-1)}{1 \cdot 3} + \binom{1}{1} (n-1) \right\} r^{b-2} \Delta^{j-1} v \\
& - 2j(j-1)(j-2) \frac{b(b-2)}{2!} \left\{ \binom{2}{0} \frac{(2j-1)(2j-3)(b+1)(b-1)(b-3)}{1 \cdot 3 \cdot 5} \right. \\
& \quad \left. + \binom{2}{1} \frac{(2j-1)(b-1)}{3} (n-1) + \binom{2}{2} \frac{(b-1)}{3} (n-1)(n-3) \right\} r^{b-4} \Delta^{j-2} v \\
& - 2j(j-1)(j-2)(j-3) \frac{b(b-2)(b-4)}{3!} \\
& \cdot \left\{ \binom{3}{0} \frac{(2j-1)(2j-3)(2j-5)(b+1)(b-1)(b-3)(b-5)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \right. \\
& + \binom{3}{1} \frac{(2j-1)(2j-3)(b-1)(b-3)}{3 \cdot 5} (n-1) \\
& + \binom{3}{2} \frac{(2j-3)(b-1)(b-3)}{3 \cdot 5} (n-1)(n-3) \\
& \left. + \binom{3}{3} (n+1)(n-1)(n-3) \right\} r^{b-6} \Delta^{j-3} v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2j(j-1)(j-2)(j-3)(j-4) \frac{b(b-2)(b-4)(b-6)}{4!} \\
& \cdot \left\{ \binom{4}{0} \frac{(2j-1)(2j-3)(2j-5)(2j-7)(b+1)(b-1)(b-3)(b-5)(b-7)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \right. \\
& + \binom{4}{1} \frac{(2j-1)(2j-3)(2j-5)(b-1)(b-3)(b-5)}{3 \cdot 5 \cdot 7} (n-1) \\
& + \binom{4}{2} \frac{(2j-3)(2j-5)(b-1)(b-3)(b-5)}{3 \cdot 5 \cdot 7} (n-1)(n-3) \\
& + \binom{4}{3} \frac{(2j-3)(b-3)}{5} (n+1)(n-1)(n-3) \\
& \left. + \binom{4}{4} \frac{(b-3)}{5} (n+1)(n-1)(n-3)(n-5) \right\} r^{b-8} \Delta^{j-4} v \\
& -jb \left\{ \binom{1}{0} \frac{(2j-1)(b+1)}{1} - \binom{1}{1} (n-1) \right\} r^{b-1} (\Delta^{j-1} v)' \\
& -j(j-1) \frac{b(b-2)}{2!} \left\{ \binom{2}{0} \frac{(2j-1)(2j-3)(b+1)(b-1)}{1 \cdot 3} \right. \\
& \left. - \binom{2}{1} \frac{(2j-1)(b-1)}{3} (n-1) + \binom{2}{2} (n-1)(n-3) \right\} r^{b-3} (\Delta^{j-2} v)' \\
& -j(j-1)(j-2) \frac{b(b-2)(b-4)}{3!} \\
& \cdot \left\{ \binom{3}{0} \frac{(2j-1)(2j-3)(2j-5)(b+1)(b-1)(b-3)}{1 \cdot 3 \cdot 5} \right. \\
& - \binom{3}{1} \frac{(2j-1)(2j-3)(b-1)(b-3)}{3 \cdot 5} (n-1) \\
& + \binom{3}{2} \frac{(2j-3)(b-1)}{3} (n-1)(n-3) \\
& \left. - \binom{3}{3} (n+1)(n-1)(n-3) \right\} r^{b-5} (\Delta^{j-3} v)' \\
& -j(j-1)(j-2)(j-3) \frac{b(b-2)(b-4)(b-6)}{4!} \\
& \cdot \left\{ \binom{4}{0} \frac{(2j-1)(2j-3)(2j-5)(2j-7)(b+1)(b-1)(b-3)(b-5)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \right. \\
& - \binom{4}{1} \frac{(2j-1)(2j-3)(2j-5)(b-1)(b-3)(b-5)}{3 \cdot 5 \cdot 7} (n-1) \\
& + \binom{4}{2} \frac{(2j-3)(2j-5)(b-1)(b-3)}{3 \cdot 5} (n-1)(n-3) \\
& \left. - \binom{4}{3} \frac{(2j-3)(b-3)}{5} (n+1)(n-1)(n-3) \right\}
\end{aligned}$$

$$+ \binom{4}{4} (n+1)(n-1)(n-3)(n-5) \left. \right\} r^{b-7} (\Delta^{j-4}v)'$$

**Hilfssatz 3.7 (Partielle Integration).** Sei  $b \in \mathbb{N}$  gerade,  $v$  in  $\overline{B}$  hinreichend glatt.

a) Falls  $v'|_{\partial B} = 0$ , so gilt:

$$\int_B r^{b-1} v' \Delta v \, dx = \frac{1}{2} \left\{ (n-1) - (b-1) \right\} \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 \, dx.$$

b) Falls  $v|_{\partial B} = 0$ , so gilt:

$$\int_B r^b v \Delta v \, dx = - \int_B r^b |\nabla v|^2 \, dx + \frac{1}{2} b \left\{ (n-1) + (b-1) \right\} \int_B r^{b-2} v^2 \, dx.$$

c) Falls  $v'|_{\partial B} = \Delta v|_{\partial B} = 0$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \int_B r^{b-1} v' \Delta^2 v \, dx &= -\frac{1}{2} \left\{ (n-1) - 3(b-1) \right\} \int_B r^{b-2} (\Delta v)^2 \, dx \\ &\quad - \frac{1}{2} (b-2) \left\{ (n-1)(n-3) - 2(b-3)(n-1) + (b-1)(b-3) \right\} \int_B r^{b-4} |\nabla v|^2 \, dx. \end{aligned}$$

d) Falls  $v|_{\partial B} = v'|_{\partial B} = 0$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \int_B r^b v \Delta^2 v \, dx &= \int_B r^b (\Delta v)^2 \, dx - 2b(b-1) \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 \, dx \\ &\quad + \frac{1}{2} b(b-2) \left\{ (n-1)(n-3) + 2(b-1)(n-1) + (b-1)(b-3) \right\} \int_B r^{b-4} v^2 \, dx. \end{aligned}$$

e) Falls  $v'|_{\partial B} = \Delta v|_{\partial B} = (\Delta v)'|_{\partial B} = 0$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \int_B r^{b-1} v' \Delta^3 v \, dx &= \frac{1}{2} \left\{ (n-1) - 5(b-1) \right\} \int_B r^{b-2} |\nabla \Delta v|^2 \, dx \\ &\quad + \frac{1}{2} (b-2) \left\{ (n+1)(n-1) - 2(b-3)(n-1) + 5(b-1)(b-3) \right\} \int_B r^{b-4} (\Delta v)^2 \, dx \\ &\quad + \frac{1}{2} (b-2)(b-4) \left\{ (n+1)(n-1)(n-3) - 3(b-3)(n-1)(n-3) \right. \\ &\quad \left. + 3(b-3)(b-5)(n-1) - (b-1)(b-3)(b-5) \right\} \int_B r^{b-6} |\nabla v|^2 \, dx. \end{aligned}$$

f) Falls  $v|_{\partial B} = v'|_{\partial B} = \Delta v|_{\partial B} = 0$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \int_B r^b v \Delta^3 v \, dx &= - \int_B r^b |\nabla \Delta v|^2 \, dx + \frac{1}{2} b \left\{ (n-1) + 9(b-1) \right\} \int_B r^{b-2} (\Delta v)^2 \, dx \\ &\quad - b(b-2) \left\{ (n-1)(n-3) + 3(b-1)(b-3) \right\} \int_B r^{b-4} |\nabla v|^2 \, dx \\ &\quad + \frac{1}{2} b(b-2)(b-4) \left\{ (n+1)(n-1)(n-3) + 3(b-3)(n-1)(n-3) \right. \\ &\quad \left. + 3(b-1)(b-3)(n-1) + (b-1)(b-3)(b-5) \right\} \int_B r^{b-6} v^2 \, dx. \end{aligned}$$

g) Falls  $v'|\partial B = \Delta v|\partial B = (\Delta v)'|\partial B = \Delta^2 v|\partial B = 0$ , so gilt:

$$\begin{aligned}
\int_B r^{b-1} v' \Delta^4 v \, dx &= -\frac{1}{2} \left\{ (n-1) - 7(b-1) \right\} \int_B r^{b-2} (\Delta^2 v)^2 \, dx \\
&\quad - (b-2) \left\{ (n-1)(n-3) - 4(b-3)(n-1) + 7(b-1)(b-3) \right\} \\
&\quad \cdot \int_B r^{b-4} |\nabla \Delta v|^2 \, dx \\
&\quad - \frac{1}{2} (b-2)(b-4) \left\{ (n+1)(n-1)(n-3) - 5(b-3)(n+1)(n-1) \right. \\
&\quad \left. + 3(b-3)(b-5)(n-1) - 7(b-1)(b-3)(b-5) \right\} \int_B r^{b-6} (\Delta v)^2 \, dx \\
&\quad - \frac{1}{2} (b-2)(b-4)(b-6) \left\{ (n+1)(n-1)(n-3)(n-5) \right. \\
&\quad \left. - 4(b-5)(n+1)(n-1)(n-3) \right. \\
&\quad \left. + 6(b-3)(b-5)(n-1)(n-3) - 4(b-3)(b-5)(b-7)(n-1) \right. \\
&\quad \left. + (b-1)(b-3)(b-5)(b-7) \right\} \int_B r^{b-8} |\nabla v|^2 \, dx.
\end{aligned}$$

h) Falls  $v|\partial B = v'|\partial B = \Delta v|\partial B = (\Delta v)'|\partial B = 0$ , so gilt:

$$\begin{aligned}
\int_B r^b v \Delta^4 v \, dx &= \int_B r^b (\Delta^2 v)^2 \, dx - 8b(b-1) \int_B r^{b-2} |\nabla \Delta v|^2 \, dx \\
&\quad + 2b(b-2) \left\{ (n-1)(n-3) + 2(b-1)(n-1) + 5(b-1)(b-3) \right\} \\
&\quad \cdot \int_B r^{b-4} (\Delta v)^2 \, dx \\
&\quad - 4b(b-2)(b-4) \left\{ (b-3)(n-1)(n-3) + (b-1)(b-3)(b-5) \right\} \\
&\quad \cdot \int_B r^{b-6} |\nabla v|^2 \, dx \\
&\quad + \frac{1}{2} b(b-2)(b-4)(b-6) \left\{ (n+1)(n-1)(n-3)(n-5) \right. \\
&\quad \left. + 4(b-3)(n+1)(n-1)(n-3) \right. \\
&\quad \left. + 6(b-3)(b-5)(n-1)(n-3) + 4(b-1)(b-3)(b-5)(n-1) \right. \\
&\quad \left. + (b-1)(b-3)(b-5)(b-7) \right\} \int_B r^{b-8} v^2 \, dx.
\end{aligned}$$

i) Falls  $v|\partial B = 0$ , so gilt:

$$\int_B r^{b-1} v v' \, dx = -\frac{1}{2} \left\{ (n-1) + (b-1) \right\} \int_B r^{b-2} v^2 \, dx.$$

j) Falls  $v'|\partial B = 0$ , so gilt:

$$\int_B r^b v' (\Delta v)' \, dx = - \int_B r^b (\Delta v)^2 \, dx - \frac{1}{2} b \left\{ (n-1) - (b-1) \right\} \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 \, dx.$$

k) Falls  $v|\partial B = v'|\partial B = 0$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \int_B r^{b-1} v (\Delta v)' dx &= \frac{1}{2} \left\{ (n-1) + 3(b-1) \right\} \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{2} (b-2) \left\{ (n-1)(n-3) + 2(b-1)(n-1) + (b-1)(b-3) \right\} \int_B r^{b-4} v^2 dx. \end{aligned}$$

l) Falls  $v'|\partial B = \Delta v|\partial B = 0$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \int_B r^b v' (\Delta^2 v)' dx &= \int_B r^b |\nabla \Delta v|^2 dx - 2b(b-1) \int_B r^{b-2} (\Delta v)^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} b(b-2) \left\{ (n-1)(n-3) - 2(b-3)(n-1) + (b-1)(b-3) \right\} \\ &\quad \cdot \int_B r^{b-4} |\nabla v|^2 dx. \end{aligned}$$

m) Falls  $v|\partial B = v'|\partial B = \Delta v|\partial B = 0$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \int_B r^{b-1} v (\Delta^2 v)' dx &= -\frac{1}{2} \left\{ (n-1) + 5(b-1) \right\} \int_B r^{b-2} (\Delta v)^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} (b-2) \left\{ (n-1)(n-3) + 2(b-3)(n-1) + 5(b-1)(b-3) \right\} \\ &\quad \cdot \int_B r^{b-4} |\nabla v|^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{2} (b-2)(b-4) \left\{ (n+1)(n-1)(n-3) + 3(b-3)(n-1)(n-3) \right. \\ &\quad \left. + 3(b-1)(b-3)(n-1) + (b-1)(b-3)(b-5) \right\} \int_B r^{b-6} v^2 dx. \end{aligned}$$

n) Falls  $v'|\partial B = \Delta v|\partial B = (\Delta v)'|\partial B = 0$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \int_B r^b v' (\Delta^3 v)' dx &= - \int_B r^b (\Delta^2 v)^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{2} b \left\{ (n-1) - 9(b-1) \right\} \int_B r^{b-2} |\nabla \Delta v|^2 dx \\ &\quad - b(b-2) \left\{ (n+1)(n-1) + 3(b-1)(b-3) \right\} \int_B r^{b-4} (\Delta v)^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{2} b(b-2)(b-4) \left\{ (n+1)(n-1)(n-3) - 3(b-3)(n-1)(n-3) \right. \\ &\quad \left. + 3(b-3)(b-5)(n-1) - (b-1)(b-3)(b-5) \right\} \int_B r^{b-6} |\nabla v|^2 dx. \end{aligned}$$

### 3.2.3 Beweis von Satz 3.2, Teil 2

Mit Hilfe der im vorhergehenden Abschnitt 3.2.2 bereitgestellten Formeln kann nun  $\Phi$  aus (179) in eine Kombination aus gewichteten Seminormen von  $u$  umgerechnet werden.



Wir führen die Rechnungen für gerades  $m$  und ungerades  $m$  jeweils separat durch. Im folgenden sei stets  $b \in \{2, 4, 6, 8\}$  oder  $m \leq 8$ .

### 1. Der Fall “ $m \in \mathbb{N}$ ist gerade”.

Durch Verwendung der Hilfssätze 3.5 und 3.6 folgt aus (179):

$$\begin{aligned}
\Phi &= \left( m(b+1) - \frac{n+b}{2} - \mu \right) \int_B r^b (\Delta^{m/2} u)^2 dx \\
&+ \frac{mb}{2} \left\{ (m-1)(b+1) - (n-1) - 2\mu \right\} \int_B r^{b-1} (\Delta^{(m/2)-1} u)' (\Delta^{m/2} u) dx \\
&+ \frac{1}{6} m(m-2)b \left\{ (m-1)(b+1)(b-1) + 3(n-1) \right\} \\
&\quad \cdot \int_B r^{b-2} (\Delta^{(m/2)-1} u) (\Delta^{m/2} u) dx \\
&- \frac{1}{2} \mu mb \left\{ (m-1)(b-1) + (n-1) \right\} \int_B r^{b-2} (\Delta^{(m/2)-1} u) (\Delta^{m/2} u) dx \\
&+ \frac{1}{24} m(m-2)b(b-2) \left\{ (m-1)(m-3)(b+1)(b-1) \right. \\
&\quad \left. - 2(m-1)(b-1)(n-1) + 3(n-1)(n-3) \right\} \\
&\quad \cdot \int_B r^{b-3} (\Delta^{(m/2)-2} u)' (\Delta^{m/2} u) dx \\
&- \frac{1}{6} \mu m(m-1)(m-2)b(b-1)(b-2) \int_B r^{b-3} (\Delta^{(m/2)-2} u)' (\Delta^{m/2} u) dx \\
&+ \frac{1}{120} m(m-2)(m-4)b(b-2) \left\{ (m-1)(m-3)(b+1)(b-1)(b-3) \right. \\
&\quad \left. + 10(m-1)(b-1)(n-1) + 5(b-1)(n-1)(n-3) \right\} \\
&\quad \cdot \int_B r^{b-4} (\Delta^{(m/2)-2} u) (\Delta^{m/2} u) dx \\
&- \frac{1}{24} \mu m(m-2)b(b-2) \left\{ (m-1)(m-3)(b-1)(b-3) \right. \\
&\quad \left. + 2(m-1)(b-1)(n-1) + 3(n-1)(n-3) \right\} \\
&\quad \cdot \int_B r^{b-4} (\Delta^{(m/2)-2} u) (\Delta^{m/2} u) dx \\
&+ \frac{1}{720} m(m-2)(m-4)b(b-2)(b-4) \\
&\quad \cdot \left\{ (m-1)(m-3)(m-5)(b+1)(b-1)(b-3) \right. \\
&\quad - 3(m-1)(m-3)(b-1)(b-3)(n-1) \\
&\quad + 15(m-3)(b-1)(n-1)(n-3) \\
&\quad \left. - 15(n+1)(n-1)(n-3) \right\} \int_B r^{b-5} (\Delta^{(m/2)-3} u)' (\Delta^{m/2} u) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{120}\mu m(m-2)(m-4)b(b-2)(b-4)\left\{(m-1)(m-3)(b-1)(b-3)\right. \\
& \quad \left.+5(n-1)(n-3)\right\}\int_B r^{b-5}(\Delta^{(m/2)-3}u)'(\Delta^{m/2}u)dx \\
& +\frac{1}{5040}m(m-2)(m-4)(m-6)b(b-2)(b-4) \\
& \quad \cdot\left\{(m-1)(m-3)(m-5)(b+1)(b-1)(b-3)(b-5)\right. \\
& \quad +21(m-1)(m-3)(b-1)(b-3)(n-1) \\
& \quad \left.+21(m-3)(b-1)(b-3)(n-1)(n-3)+105(n+1)(n-1)(n-3)\right\} \\
& \quad \cdot\int_B r^{b-6}(\Delta^{(m/2)-3}u)(\Delta^{m/2}u)dx \\
& -\frac{1}{720}\mu m(m-2)(m-4)b(b-2)(b-4) \\
& \quad \cdot\left\{(m-1)(m-3)(m-5)(b-1)(b-3)(b-5)\right. \\
& \quad +3(m-1)(m-3)(b-1)(b-3)(n-1) \\
& \quad +15(m-3)(b-3)(n-1)(n-3) \\
& \quad \left.+15(n+1)(n-1)(n-3)\right\}\int_B r^{b-6}(\Delta^{(m/2)-3}u)(\Delta^{m/2}u)dx \\
& +\frac{1}{40320}m(m-2)(m-4)(m-6)b(b-2)(b-4)(b-6) \\
& \quad \cdot\left\{(m-1)(m-3)(m-5)(m-7)(b+1)(b-1)(b-3)(b-5)\right. \\
& \quad -4(m-1)(m-3)(m-5)(b-1)(b-3)(b-5)(n-1) \\
& \quad +42(m-3)(m-5)(b-1)(b-3)(n-1)(n-3) \\
& \quad -84(m-3)(b-3)(n+1)(n-1)(n-3) \\
& \quad \left.+105(n+1)(n-1)(n-3)(n-5)\right\}\int_B r^{b-7}(\Delta^{(m/2)-4}u)'(\Delta^{m/2}u)dx \\
& -\frac{1}{5040}\mu m(m-2)(m-4)(m-6)b(b-2)(b-4)(b-6) \\
& \quad \cdot\left\{(m-1)(m-3)(m-5)(b-1)(b-3)(b-5)\right. \\
& \quad \left.+21(m-3)(b-3)(n-1)(n-3)\right\}\int_B r^{b-7}(\Delta^{(m/2)-4}u)'(\Delta^{m/2}u)dx \\
& +\frac{1}{362880}m(m-2)(m-4)(m-6)(m-8)b(b-2)(b-4)(b-6) \\
& \quad \cdot\left\{(m-1)(m-3)(m-5)(m-7)(b+1)(b-1)(b-3)(b-5)(b-7)\right. \\
& \quad +36(m-1)(m-3)(m-5)(b-1)(b-3)(b-5)(n-1) \\
& \quad +54(m-3)(m-5)(b-1)(b-3)(b-5)(n-1)(n-3) \\
& \quad \left.+756(m-3)(b-3)(n+1)(n-1)(n-3)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +189(b-3)(n+1)(n-1)(n-3)(n-5) \Big\} \\
& \quad \cdot \int_B r^{b-8} (\Delta^{(m/2)-4}u) (\Delta^{m/2}u) dx \\
& - \frac{1}{40\,320} \mu m(m-2)(m-4)(m-6)b(b-2)(b-4)(b-6) \\
& \quad \cdot \Big\{ (m-1)(m-3)(m-5)(m-7)(b-1)(b-3)(b-5)(b-7) \\
& \quad + 4(m-1)(m-3)(m-5)(b-1)(b-3)(b-5)(n-1) \\
& \quad + 42(m-3)(m-5)(b-3)(b-5)(n-1)(n-3) \\
& \quad + 84(m-3)(b-3)(n+1)(n-1)(n-3) \\
& \quad + 105(n+1)(n-1)(n-3)(n-5) \Big\} \int_B r^{b-8} (\Delta^{(m/2)-4}u) (\Delta^{m/2}u) dx.
\end{aligned}$$

Durch partielle Integration gemäß Hilfssatz 3.7 folgt nach mühsamer, aber einfacher Rechnung schließlich:

$$\begin{aligned}
\Phi & = \left( m(b+1) - \frac{n+b}{2} - \mu \right) \int_B r^b (\Delta^{m/2}u)^2 dx \\
& - \frac{mb}{12} \Big\{ (2m-1)(m-1)(b+1)(b-1) - 3m(b-1)(n-1) \\
& \quad + 3(n-1)(n-3) \Big\} \int_B r^{b-2} |\nabla \Delta^{(m/2)-1}u|^2 dx \\
& + \frac{1}{2} \mu m^2 b(b-1) \int_B r^{b-2} |\nabla \Delta^{(m/2)-1}u|^2 dx \\
& + \frac{1}{240} m(m-2)b(b-2) \Big\{ (2m-1)(m+1)(m-1)(b+1)(b-1)(b-3) \\
& \quad - 5(m-1)^2(b-1)(b-3)(n-1) + 5(4m-1)(b-1)(n+1)(n-1) \\
& \quad - 15(n+1)(n-1)(n-3) \Big\} \int_B r^{b-4} (\Delta^{(m/2)-1}u)^2 dx \\
& - \frac{1}{24} \mu m^2 b(b-2) \Big\{ (m+1)(m-1)(b-1)(b-3) \\
& \quad + 6(b-1)(n-1) + 3(n-1)(n-3) \Big\} \int_B r^{b-4} (\Delta^{(m/2)-1}u)^2 dx \\
& - \frac{1}{10\,080} (m+2)m(m-2)b(b-2)(b-4) \\
& \quad \cdot \Big\{ (2m-1)(m+1)(m-1)(m-3)(b+1)(b-1)(b-3)(b-5) \\
& \quad - 7(m+1)m(m-1)(b-1)(b-3)(b-5)(n-1) \\
& \quad + 21(3m-2)(m-1)(b-1)(b-3)(n-1)(n-3) \\
& \quad - 105m(b-3)(n+1)(n-1)(n-3) \\
& \quad + 105(n+1)(n-1)(n-3)(n-5) \Big\} \int_B r^{b-6} |\nabla \Delta^{(m/2)-2}u|^2 dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{720} \mu (m+2)m^2(m-2)b(b-2)(b-4) \\
& \quad \cdot \left\{ (m+1)(m-1)(b-1)(b-3)(b-5) + 15(b-3)(n-1)(n-3) \right\} \\
& \quad \cdot \int_B r^{b-6} |\nabla \Delta^{(m/2)-2} u|^2 dx \\
& + \frac{1}{725760} (m+2)m(m-2)(m-4)b(b-2)(b-4)(b-6) \\
& \quad \cdot \left\{ (2m-1)(m+3)(m+1)(m-1)(m-3) \right. \\
& \quad \cdot (b+1)(b-1)(b-3)(b-5)(b-7) \\
& \quad - 9(m+1)(m-1)^2(m-3)(b-1)(b-3)(b-5)(b-7)(n-1) \\
& \quad + 18(8m-3)(m+1)(m-1)(b-1)(b-3)(b-5)(n+1)(n-1) \\
& \quad - 378(m-1)^2(b-3)(b-5)(n+1)(n-1)(n-3) \\
& \quad + 189(6m-1)(b-3)(n+3)(n+1)(n-1)(n-3) \\
& \quad \left. - 945(n+3)(n+1)(n-1)(n-3)(n-5) \right\} \\
& \quad \cdot \int_B r^{b-8} (\Delta^{(m/2)-2} u)^2 dx \\
& - \frac{1}{40320} \mu (m+2)m^2(m-2)b(b-2)(b-4)(b-6) \\
& \quad \cdot \left\{ (m+3)(m+1)(m-1)(m-3)(b-1)(b-3)(b-5)(b-7) \right. \\
& \quad + 28(m+1)(m-1)(b-1)(b-3)(b-5)(n-1) \\
& \quad + 42(m+1)(m-1)(b-3)(b-5)(n-1)(n-3) \\
& \quad \left. + 420(b-3)(n+1)(n-1)(n-3) + 105(n+1)(n-1)(n-3)(n-5) \right\} \\
& \quad \cdot \int_B r^{b-8} (\Delta^{(m/2)-2} u)^2 dx.
\end{aligned}$$

## 2. Einige Spezialfälle bei geradem $m \in \mathbb{N}$ .

Die Formel von S. 98 f. wird der Übersichtlichkeit halber auf die Fälle spezialisiert, für die in Satz 3.2 eine notwendige Bedingung der Art  $\lambda > \Lambda > 0$  hergeleitet werden kann.

*Der Fall  $b = 4$ ,  $m \geq 2$  gerade,  $\mu = 5m - (n + 4)/2$ .*

In diesem Falle erhalten wir für  $\Phi$ :

$$\begin{aligned}
(184) \quad \Phi &= m \left\{ 5(2m+1)(2m-1) - (n-1)(n-3) \right\} \int_B r^2 |\nabla \Delta^{(m/2)-1} u|^2 dx \\
&\quad - m \left\{ (2m+1)(2m-1)(m+1)(m-1) + 5(2m+1)(2m-1)(n-1) \right. \\
&\quad \left. + (3m^2-1)(n-1)(n-3) - (n+1)(n-1)(n-3) \right\} \\
&\quad \cdot \int_B (\Delta^{(m/2)-1} u)^2 dx \\
&=: c_1 \int_B r^2 |\nabla \Delta^{(m/2)-1} u|^2 dx - c_2 \int_B (\Delta^{(m/2)-1} u)^2 dx.
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist besonders von Interesse für  $n = 2m+1, 2m+2, 2m+3$ ; in dieser Situation ist offensichtlich  $\mu \geq 0$  und außerdem  $c_1 > 0$  ebenso wie  $c_2 > 0$ . Eine Abschätzung von  $\Phi$  nach unten wird mit Hilfe einer gewichteten Einbettungsungleichung gelingen, die im nächsten Abschnitt 3.2.4 bereitgestellt wird.

*Der Fall  $b = 6, m \geq 3$  gerade,  $\mu = 7m - (n+6)/2$ .*

Durch Einsetzen dieser Werte erhalten wir für  $\Phi$ :

$$\begin{aligned}
(185) \quad \Phi &= \frac{m}{2} \left\{ 35(2m+1)(2m-1) - 3(n-1)(n-3) \right\} \int_B r^4 |\nabla \Delta^{(m/2)-1} u|^2 dx \\
&\quad - m \left\{ 21(2m+1)(2m-1)(m+1)(m-1) \right. \\
&\quad \left. + 35(2m+1)(2m-1)(n-1) + (11m^2-5)(n-1)(n-3) \right. \\
&\quad \left. - 3(n+1)(n-1)(n-3) \right\} \int_B r^2 (\Delta^{(m/2)-1} u)^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{2} (m+2)m(m-2) \left\{ 3(2m+1)(2m-1)(m+1)(m-1) \right. \\
&\quad \left. + 3(11m^2-2)(n-1)(n-3) - (n+1)(n-1)(n-3)(n-5) \right\} \\
&\quad \cdot \int_B |\nabla \Delta^{(m/2)-2} u|^2 dx \\
&=: c_3 \int_B r^4 |\nabla \Delta^{(m/2)-1} u|^2 dx - c_4 \int_B r^2 (\Delta^{(m/2)-1} u)^2 dx \\
&\quad + c_5 \int_B |\nabla \Delta^{(m/2)-2} u|^2 dx.
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird zusammen mit (183) ausgebeutet werden für die Dimensionen  $n = 2m+4$  und  $n = 2m+5$ . In dieser Situation ist wieder  $\mu \geq 0$  und außerdem  $c_3 > 0, c_4 > 0$  sowie  $c_5 > 0$ .

Hier wird bereits ein Phänomen sichtbar, welches für noch größere  $b$  und höhere Dimensionen weiteren Fortschritten derzeit im Wege steht. Der Koeffizient  $c_4$  ist sehr viel größer als  $c_3$ , so daß die Anwendung der Einbettungsungleichung (190) allein einen negativen Faktor vor  $\int_B r^2 (\Delta^{(m/2)-1} u)^2 dx$  ergäbe. Nur mit Hilfe der "optimalen"

Interpolationsungleichung (194) wird  $\Phi$  nach unten durch positive Terme abgeschätzt werden können. Allerdings kann diese Ungleichung nur für nicht zu kleine Verhältnisse  $c_3/c_4$  verwendet werden. Diese Voraussetzung kann für  $b = 6$  verifiziert werden, für  $b \geq 8$  jedoch im allgemeinen nicht mehr.

*Der Fall  $b = 8$ ,  $m \geq 4$  gerade.*

$$\begin{aligned}
\Phi &= \left\{ \frac{1}{2} \left( 9(2m-1) - (n-1) \right) - \mu \right\} \int_B r^8 (\Delta^{m/2} u)^2 dx \\
&\quad - 2m \left\{ 21(2m-1)(m-1) - 7m(n-1) + (n-1)(n-3) - 14\mu m \right\} \\
&\quad \quad \cdot \int_B r^6 |\nabla \Delta^{(m/2)-1} u|^2 dx \\
&\quad + m \left\{ 63(2m-1)(m+1)(m-1)(m-2) - 35(m-1)^2(m-2)(n-1) \right. \\
&\quad \quad + 7(4m-1)(m-2)(n+1)(n-1) - 3(m-2)(n+1)(n-1)(n-3) \\
&\quad \quad \left. - \mu \left( 70(m+1)m(m-1) + 84m(n-1) + 6m(n-1)(n-3) \right) \right\} \\
&\quad \quad \cdot \int_B r^4 (\Delta^{(m/2)-1} u)^2 dx \\
&\quad - 2(m+2)m(m-2) \left\{ 9(2m-1)(m+1)(m-1)(m-3) \right. \\
&\quad \quad - 7(m+1)m(m-1)(n-1) + 7(3m-2)(m-1)(n-1)(n-3) \\
&\quad \quad - 5m(n+1)(n-1)(n-3) + (n+1)(n-1)(n-3)(n-5) \\
(186) \quad &\quad \left. - \mu \left( 14(m+1)m(m-1) + 10m(n-1)(n-3) \right) \right\} \\
&\quad \quad \cdot \int_B r^2 |\nabla \Delta^{(m/2)-2} u|^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{2} (m+2)m(m-2) \left\{ (2m-1)(m+3)(m+1)(m-1)(m-3)(m-4) \right. \\
&\quad \quad - (m+1)(m-1)^2(m-3)(m-4)(n-1) \\
&\quad \quad + 2(8m-3)(m+1)(m-1)(m-4)(n+1)(n-1) \\
&\quad \quad - 6(m-1)^2(m-4)(n+1)(n-1)(n-3) \\
&\quad \quad + (6m-1)(m-4)(n+3)(n+1)(n-1)(n-3) \\
&\quad \quad - (m-4)(n+3)(n+1)(n-1)(n-3)(n-5) \\
&\quad \quad - \mu \left( 2(m+3)(m+1)m(m-1)(m-3) + 56(m+1)m(m-1)(n-1) \right. \\
&\quad \quad \quad + 12(m+1)m(m-1)(n-1)(n-3) + 40m(n+1)(n-1)(n-3) \\
&\quad \quad \left. \left. + 2m(n+1)(n-1)(n-3)(n-5) \right) \right\} \int_B (\Delta^{(m/2)-2} u)^2 dx.
\end{aligned}$$

Es gelingt derzeit im wesentlichen nur bei der Gleichung achter Ordnung, d.h. bei  $m = 4$ , diesen Ausdruck nach unten durch ein positives Vielfaches von  $\int_B u^2 dx$  abzuschätzen, dazu vgl. auch den Abschnitt 3.2.6. In diesem Spezialfall, d.h.  $m = 4$ , wird

aus (186):

$$\begin{aligned}
(187) \quad \Phi &= \left\{ \frac{1}{2}(64 - n) - \mu \right\} \int_B r^8 (\Delta^2 u)^2 dx \\
&\quad - 8 \{n^2 - 32n + 472 - 56\mu\} \int_B r^6 |\nabla \Delta u|^2 dx \\
&\quad + 24 \{-n^3 + 38n^2 - 104n + 272 - 4\mu(n^2 + 10n + 164)\} \\
&\quad \quad \cdot \int_B r^4 (\Delta u)^2 dx \\
&\quad - 96 \{n^4 - 28n^3 + 284n^2 - 1232n + 1920 - 40\mu(n^2 - 4n + 24)\} \\
&\quad \quad \cdot \int_B r^2 |\nabla u|^2 dx \\
&\quad - 192\mu n(n^3 + 12n^2 + 44n + 48) \int_B u^2 dx.
\end{aligned}$$

### 3. Der Fall “ $m \in \mathbb{N}$ ist ungerade”.

Die Umrechnung des Terms (179) für  $\Phi$  in eine Kombination aus gewichteten Seminormen von  $u$  verläuft völlig parallel zu den entsprechenden Rechnungen für gerades  $m$ . Auf eine erneute Darstellung dieser Rechnungen soll hier verzichtet werden; wir geben nur die für den Beweis von Satz 3.2 relevanten Resultate wieder.

*Der Fall  $b = 4$ ,  $m \geq 2$  ungerade,  $\mu = 5m - (n + 4)/2$ .*

$$\begin{aligned}
(188) \quad \Phi &= m \left\{ 5(2m + 1)(2m - 1) - (n - 1)(n - 3) \right\} \int_B r^2 (\Delta^{(m-1)/2} u)^2 dx \\
&\quad - (m + 1)m(m - 1) \left\{ (2m + 1)(2m - 1) + 3(n - 1)(n - 3) \right\} \\
&\quad \quad \cdot \int_B |\nabla \Delta^{(m-3)/2} u|^2 dx \\
&=: c_6 \int_B r^2 (\Delta^{(m-1)/2} u)^2 dx - c_7 \int_B |\nabla \Delta^{(m-3)/2} u|^2 dx.
\end{aligned}$$

Für die Dimensionen  $n = 2m + 1, 2m + 2, 2m + 3$ , für die diese Relation ausgenutzt werden wird, gilt wieder wie bei geradem  $m$ :  $\mu \geq 0$ ,  $c_6 \geq 0$ ,  $c_7 \geq 0$ .

*Der Fall  $b = 6$ ,  $m \geq 3$  ungerade,  $\mu = 7m - (n + 6)/2$ .*

$$\begin{aligned}
(189) \quad \Phi &= \frac{m}{2} \left\{ 35(2m + 1)(2m - 1) - 3(n - 1)(n - 3) \right\} \int_B r^4 (\Delta^{(m-1)/2} u)^2 dx \\
&\quad - (m + 1)m(m - 1) \left\{ 21(2m + 1)(2m - 1) + 11(n - 1)(n - 3) \right\} \\
&\quad \quad \cdot \int_B r^2 |\nabla \Delta^{(m-3)/2} u|^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{2}(m + 1)m(m - 1) \left\{ 3(2m + 1)(2m - 1)(m + 2)(m - 2) \right. \\
&\quad \quad \left. + 42(2m + 1)(2m - 1)(n - 1) + 3(11m^2 - 3)(n - 1)(n - 3) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +22(n+1)(n-1)(n-3) - (n+1)(n-1)(n-3)(n-5) \Big\} \\
& \qquad \qquad \qquad \cdot \int_B (\Delta^{(m-3)/2}u)^2 dx \\
= & c_8 \int_B r^4 (\Delta^{(m-1)/2}u)^2 dx - c_9 \int_B r^2 |\nabla \Delta^{(m-3)/2}u|^2 dx \\
& + c_{10} \int_B (\Delta^{(m-3)/2}u)^2 dx.
\end{aligned}$$

Wie bei geradem  $m$  gilt wieder für die Dimensionen  $n = 2m + 4$ ,  $2m + 5$ , daß  $\mu \geq 0$ ,  $c_8 > 0$ ,  $c_9 > 0$  sowie  $c_{10} > 0$ . Auch hier wird eine Interpolationsungleichung, möglichst mit optimalen Konstanten, zwischen den gewichteten Seminormen von  $u$  benötigt.

### 3.2.4 Gewichtete Einbettungs- und Interpolationsungleichungen

Im folgenden werden die zur Abschätzung der Terme (184)-(189) benötigten gewichteten Einbettungs- und Interpolationsungleichungen zusammengestellt. Diese Ungleichungen gelten auch für beliebige ausreichend glatte Funktionen  $v$ , die also nicht radialsymmetrisch zu sein brauchen. Anstelle der Einheitskugel können auch beschränkte glatte Gebiete  $\Omega$  zugelassen werden, in denen der Satz von Gauß gilt.

Die Interpolationsungleichungen (194) und (196) sind insofern optimal, als sich deren Konstanten durch eine formale Rechnung aus den Einbettungsungleichungen in Satz 3.8 auf eine Weise ergeben, als könnte man jeweils eine dieser Ungleichungen mit umgekehrtem Ungleichheitszeichen verwenden. Bemerkenswerterweise führt eine solche unzulässige Manipulation zu einer korrekten Ungleichung, allerdings ist für den Parameter  $\varepsilon > 0$  ein nach unten beschränkter Zulässigkeitsbereich  $\varepsilon \geq \varepsilon_0(n, b) > 0$  in Kauf zu nehmen. Die im Beweis von Satz 3.2 für  $b = 6$  auftretenden Werte für  $\varepsilon$  fallen in die zulässigen Bereiche. Dieses ist für  $b \geq 8$  jedoch im allgemeinen nicht mehr der Fall, dazu siehe die Bemerkungen in Abschnitt 3.2.6.

**Satz 3.8.** *Sei  $b \in \mathbb{N}$  gerade.*

a) *Für jedes  $v \in C^1(\overline{B})$  mit  $v|_{\partial B} = 0$  gilt:*

$$(190) \quad \int_B r^b |\nabla v|^2 dx \geq \frac{1}{4}(n+b-2)^2 \int_B r^{b-2} v^2 dx.$$

b) *Sei  $n > b$ , dann gilt für jedes  $v \in C^2(\overline{B})$  mit  $v|_{\partial B} = 0$  oder  $\nabla v|_{\partial B} = 0$ :*

$$(191) \quad \int_B r^b (\Delta v)^2 dx \geq \frac{1}{4}(n-b)^2 \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 dx.$$

**Beweis.** a) Unter Verwendung von

$$(192) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (r^{b-2} x_i) = (n+b-2)r^{b-2}$$



ergibt partielle Integration:

$$\begin{aligned} (n+b-2) \int_B r^{b-2} v^2 dx &= -2 \sum_{i=1}^n \int_B r^{b-2} x_i v v_{x_i} dx \\ &\leq 2 \int_B r^{b-1} |v| |\nabla v| dx \leq 2 \left( \int_B r^{b-2} v^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_B r^b |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

b) Zunächst wird der Fall  $v|_{\partial B} = 0$  behandelt. Partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned} \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 dx &= - \int_B r^{b-2} v \Delta v dx - (b-2) \sum_{j=1}^n \int_B r^{b-4} x_j v_{x_j} v dx \\ &\leq \left( \int_B r^{b-4} v^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left\{ \left( \int_B r^b (\Delta v)^2 dx \right)^{1/2} + (b-2) \left( \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2} \right\}. \end{aligned}$$

Auf die rechte Seite wird die soeben hergeleitete Ungleichung (190) angewandt. Dabei ist zu bemerken, daß hier  $n \geq 3$  vorausgesetzt wird und daß in diesem Fall (190) auch für  $b = 0$  gilt.

$$\begin{aligned} \frac{n+b-4}{2} \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 dx &\leq \left( \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\cdot \left\{ \left( \int_B r^b (\Delta v)^2 dx \right)^{1/2} + (b-2) \left( \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2} \right\} \\ \Rightarrow \frac{n-b}{2} \left( \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2} &\leq \left( \int_B r^b (\Delta v)^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Da wegen  $n > b$  die linke Seite positiv ist, folgt durch Quadrieren die Ungleichung (191). Ist nun  $\nabla v|_{\partial B} = 0$ , so ist  $v$  auf  $\partial B$  konstant, und (191) folgt aus dem vorhergehenden, indem man diese Konstante von  $v$  subtrahiert. Alternativ kann auch die Formel verwendet werden, die zu Beginn des Beweises von Satz 3.9 hergeleitet wird. Dieser Beweis behält auch Gültigkeit in Gebieten  $\Omega$ , deren Rand nicht notwendig zusammenhängend ist. ■

**Satz 3.9.** Sei  $v \in C^3(\overline{B})$ ,  $\nabla v|_{\partial B} = 0$ ,  $b \in \mathbb{N}$  gerade.

a) Dann gilt für jedes  $\varepsilon > 0$ :

$$(193) \quad \int_B r^b (\Delta v)^2 dx \leq \varepsilon \int_B r^{b+2} |\nabla \Delta v|^2 dx + \left\{ \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{b}{2}(n-b) \right\} \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 dx.$$

b) Gilt zusätzlich  $n > b$  und  $\varepsilon \geq \frac{2}{(n+b)(n-b)}$ , so hat man sogar:

$$(194) \quad \int_B r^b (\Delta v)^2 dx \leq \varepsilon \int_B r^{b+2} |\nabla \Delta v|^2 dx + \frac{1}{4}(n-b)^2 \left\{ 1 - \frac{\varepsilon}{4}(n+b)^2 \right\} \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 dx.$$

**Bemerkung.** Für  $\varepsilon > \frac{2}{(n-b)(n+b)}$  liefert (194) eine echt kleinere Abschätzungskonstante als (193).

**Beweis.** Würde man sich hier auf radialsymmetrische Funktionen beschränken, könnte man direkt mit der Formel für partielle Integration aus Hilfssatz 3.7.j beginnen.

Da wir hier allgemeines  $v$  zulassen wollen, ist zunächst diese Formel zu verallgemeinern.

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \int_B r^{b-2} x_j v_{x_i x_j} v_{x_i} dx &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_B (r^{b-2} x_j)_{x_j} v_{x_i}^2 dx \\ &= -\frac{1}{2} (n+b-2) \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 dx. \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \int_B r^{b-2} x_j v_{x_j} \Delta v dx &= - \sum_{i,j=1}^n \int_B (r^{b-2} x_j v_{x_j})_{x_i} v_{x_i} dx \\ &= -(b-2) \int_B r^{b-4} \left( \sum_{i=1}^n x_i v_{x_i} \right)^2 dx \\ &\quad - \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 dx - \sum_{i,j=1}^n \int_B r^{b-2} x_j v_{x_i x_j} v_{x_i} dx \\ &= -(b-2) \int_B r^{b-4} \left( \sum_{i=1}^n x_i v_{x_i} \right)^2 dx + \frac{1}{2} (n+b-4) \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 dx \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} \int_B r^b (\Delta v)^2 dx &= - \sum_{j=1}^n \int_B (r^b \Delta v)_{x_j} v_{x_j} dx \\ &= -b \sum_{j=1}^n \int_B r^{b-2} x_j v_{x_j} \Delta v dx - \int_B r^b (\nabla v \cdot \nabla \Delta v) dx \\ &= b(b-2) \int_B r^{b-4} (x \cdot \nabla v)^2 dx - \frac{b}{2} (n+b-4) \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 dx \\ &\quad - \int_B r^b (\nabla v \cdot \nabla \Delta v) dx \\ &\leq b(b-2) \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 dx - \frac{b}{2} (n+b-4) \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 dx \\ &\quad - \int_B r^b (\nabla v \cdot \nabla \Delta v) dx \\ &= -\frac{b}{2} (n-b) \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 dx - \int_B r^b (\nabla v \cdot \nabla \Delta v) dx. \end{aligned}$$

Für radialsymmetrische Funktionen  $v$  gilt bis hierher sogar Gleichheit, dazu vergleiche Hilfssatz 3.7.j. Zusammen mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung erhalten wir:

$$\int_B r^b (\Delta v)^2 dx \leq -\frac{b}{2}(n-b) \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 dx + \left( \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_B r^{b+2} |\nabla \Delta v|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Teil a) des Satzes ist nun offensichtlich. Unter den zusätzlichen Voraussetzungen in b) folgt weiter:

$$\int_B r^b (\Delta v)^2 dx \leq \left\{ 1 - \frac{2}{\varepsilon(n+b)(n-b)} \right\} \frac{(n-b)^2}{4} \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 dx + \left\{ -\frac{b}{2}(n-b) - \frac{(n-b)^2}{4} + \frac{(n-b)}{2\varepsilon(n+b)} \right\} \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 dx + \left( \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_B r^{b+2} |\nabla \Delta v|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Der Vorfaktor des ersten Terms ist gemäß Voraussetzung nichtnegativ. Deshalb ergibt die Anwendung der Einbettungsungleichung (191) aus Satz 3.8 zusammen mit der Youngschen Ungleichung:

$$\int_B r^b (\Delta v)^2 dx \leq \left\{ 1 - \frac{2}{\varepsilon(n+b)(n-b)} \right\} \int_B r^b (\Delta v)^2 dx + \left\{ \frac{1}{2\varepsilon(n+b)} - \frac{1}{4}(n+b) \right\} (n-b) \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 dx + \frac{(n+b)(n-b)}{8} \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 dx + \frac{2}{(n+b)(n-b)} \int_B r^{b+2} |\nabla \Delta v|^2 dx$$

und weiter

$$\frac{2}{\varepsilon(n+b)(n-b)} \int_B r^b (\Delta v)^2 dx \leq \left\{ \frac{2}{\varepsilon(n+b)} - \frac{n+b}{2} \right\} \frac{(n-b)}{4} \int_B r^{b-2} |\nabla v|^2 dx + \frac{2}{(n+b)(n-b)} \int_B r^{b+2} |\nabla \Delta v|^2 dx.$$

Die Behauptung (194) ist nun offensichtlich. ■

**Satz 3.10.** Sei  $v \in C^2(\overline{B})$ ,  $v|_{\partial B} = 0$ ,  $b \in \mathbb{N}$  gerade.

a) Dann gilt für jedes  $\varepsilon > 0$ :

$$(195) \quad \int_B r^b |\nabla v|^2 dx \leq \varepsilon \int_B r^{b+2} (\Delta v)^2 dx + \left\{ \frac{1}{4\varepsilon} + \frac{b}{2}(n+b-2) \right\} \int_B r^{b-2} v^2 dx.$$

b) Gilt zusätzlich  $n > b + 2$  und  $\varepsilon \geq \frac{2}{(n+b-2)(n-b-2)}$ , so gilt sogar die schärfere Ungleichung:

$$(196) \quad \int_B r^b |\nabla v|^2 dx \leq \varepsilon \int_B r^{b+2} (\Delta v)^2 dx + \frac{1}{4}(n+b-2)^2 \left\{ 1 - \frac{\varepsilon}{4}(n-b-2)^2 \right\} \int_B r^{b-2} v^2 dx.$$

**Beweis.** Wir gehen parallel zum Beweis von Satz 3.9 vor und beginnen wieder mit partieller Integration. Hilfssatz 3.7.b, der auch für nicht notwendig radialsymmetrische Funktionen gilt, liefert:

$$\int_B r^b |\nabla v|^2 dx \leq \frac{b}{2}(n+b-2) \int_B r^{b-2} v^2 dx + \left( \int_B r^{b-2} v^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_B r^{b+2} (\Delta v)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Die Ungleichung (195) ist nun offensichtlich. Zum Beweis von (196) wird wieder der Koeffizient vor  $\int_B r^{b-2} v^2 dx$  aufgespalten:

$$\begin{aligned} \int_B r^b |\nabla v|^2 dx &\leq \left\{ 1 - \frac{2}{\varepsilon(n+b-2)(n-b-2)} \right\} \frac{(n+b-2)^2}{4} \int_B r^{b-2} v^2 dx \\ &+ (n+b-2) \left\{ \frac{1}{2\varepsilon(n-b-2)} - \frac{n-b-2}{4} \right\} \int_B r^{b-2} v^2 dx \\ &+ \frac{(n+b-2)(n-b-2)}{8} \int_B r^{b-2} v^2 dx \\ &+ \frac{2}{(n+b-2)(n-b-2)} \int_B r^{b+2} (\Delta v)^2 dx. \end{aligned}$$

Gemäß der Voraussetzung an  $\varepsilon$  ist der erste Faktor auf der rechten Seite positiv. Auf diesen Term wird die Einbettungsungleichung (190) angewendet. Durch einfache Umformungen analog zum Beweis von Satz 3.9 gelangt man schließlich zu Ungleichung (196). ■

### 3.2.5 Beweis von Satz 3.2, Teil 3

**1. Beweis von (173) für  $m \geq 2$ ,  $n = 2m + 1$ ,  $2m + 2$ ,  $2m + 3$ .**

Ist  $m$  gerade, so verwenden wir für das in (180) erklärte  $\Phi$  den Ausdruck (184) aus Kapitel 3.2.3 und kombinieren diesen mit der Einbettungsungleichung (190):

$$\begin{aligned} \Phi &\geq \frac{1}{4}n^2 \cdot m \left\{ 5(2m+1)(2m-1) - (n-1)(n-3) \right\} \int_B (\Delta^{(m/2)-1} u)^2 dx \\ &\quad - m \left\{ (2m+1)(2m-1)(m+1)(m-1) + 5(2m+1)(2m-1)(n-1) \right. \\ &\quad \left. + (3m^2 - 1)(n-1)(n-3) - (n+1)(n-1)(n-3) \right\} \int_B (\Delta^{(m/2)-1} u)^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(197) \quad \Rightarrow \quad \Phi &\geq \frac{m}{4} \left\{ - (2m+3)(2m+1)(2m-1)(2m-3) \right. \\
&\quad \left. + 2(2m+1)(2m-1)(n-1)(n-3) \right. \\
&\quad \left. - (n+1)(n-1)(n-3)(n-5) \right\} \int_B (-\Delta)^{m-2} u \cdot u \, dx.
\end{aligned}$$

Durch einige einfache Umformungen folgt weiter:

$$\begin{aligned}
\Phi &\geq \frac{m}{4} \left\{ (2m+3)(2m+1) - (n-1)(n-3) \right\} \\
&\quad \cdot \left\{ (n-1)(n-3) - (2m-1)(2m-3) \right\} \int_B (-\Delta)^{m-2} u \cdot u \, dx \\
&= \frac{m}{4} (n+2m)(2m+4-n)(n-2m)(n+2m-4) \int_B (-\Delta)^{m-2} u \cdot u \, dx \\
&\geq \frac{m}{4} \left( (2m+4-n) \right) \left( n-2m \right) \left( n+2m \right) \left( n+(2m-4) \right) \Lambda_{m-2,1} \int_B u^2 \, dx,
\end{aligned}$$

dabei ist der Vorfaktor für  $n = 2m+1, 2m+2, 2m+3$  positiv.

Diese Ungleichung ergibt durch Kombination mit der Abschätzung (183) von  $\Phi$  nach oben die behauptete notwendige Bedingung (173) für  $\lambda$  im Falle geraden Parameters  $m$ .

Für ungerades  $m$  folgern wir analog aus (188) und der Einbettungsungleichung (191):

$$\begin{aligned}
\Phi &\geq \frac{(n-2)^2}{4} \cdot m \left\{ 5(2m+1)(2m-1) - (n-1)(n-3) \right\} \int_B |\nabla \Delta^{(m-3)/2} u|^2 \, dx \\
&\quad - (m+1)m(m-1) \left\{ (2m+1)(2m-1) + 3(n-1)(n-3) \right\} \\
&\quad \cdot \int_B |\nabla \Delta^{(m-3)/2} u|^2 \, dx \\
&= \frac{m}{4} \left\{ - (2m+3)(2m+1)(2m-1)(2m-3) \right. \\
&\quad \left. + 2(2m+1)(2m-1)(n-1)(n-3) \right. \\
&\quad \left. - (n+1)(n-1)(n-3)(n-5) \right\} \int_B (-\Delta)^{m-2} u \cdot u \, dx.
\end{aligned}$$

Das ist genau die Abschätzung (197), die bereits für gerades  $m$  hergeleitet wurde. Die restlichen Argumente werden wörtlich von oben übernommen; damit ist (173) insgesamt bewiesen.

## 2. Beweis von (174) für $m \geq 3, n = 2m+4, 2m+5$ .

Ist  $m$  gerade, so gehen wir von dem Ausdruck (185) für  $\Phi$  aus. Dieser Ausdruck ist von der Gestalt

$$\begin{aligned}
\Phi &= c_3 \int_B r^4 |\nabla \Delta^{(m/2)-1} u|^2 \, dx - c_4 \int_B r^2 (\Delta^{(m/2)-1} u)^2 \, dx \\
&\quad + c_5 \int_B |\nabla \Delta^{(m/2)-2} u|^2 \, dx, \quad c_3, c_4, c_5 > 0,
\end{aligned}$$

und soll mit Hilfe der Interpolationsungleichung (194) nach unten abgeschätzt werden. Für das dort benötigte  $\varepsilon$  setzen wir:

$$\varepsilon = \frac{c_3}{c_4} = \frac{\left\{ 35(2m+1)(2m-1) - 3(n-1)(n-3) \right\}}{\left\{ 42(2m+1)(2m-1)(m+1)(m-1) + 70(2m+1)(2m-1)(n-1) + 2(11m^2 - 5)(n-1)(n-3) - 6(n+1)(n-1)(n-3) \right\}}.$$

Für die Anwendung von (194) ist die Bedingung

$$(198) \quad \varepsilon \geq \frac{2}{(n-2)(n+2)}$$

zu prüfen. Falls  $n = 2m + 4$ , so ist diese Bedingung äquivalent zu

$$\begin{aligned} c_3(2m+6)(2m+2) &\geq 2c_4 \\ \Leftrightarrow 6m^2 - 2m + 1 &\geq 0. \end{aligned}$$

Letztere Ungleichung ist offensichtlich für alle  $m$  richtig. Für  $n = 2m + 5$  ist die Bedingung (198) äquivalent zu

$$\begin{aligned} c_3(2m+7)(2m+3) &\geq 2c_4 \\ \Leftrightarrow 96m^3 + 24m^2 - 40m - 3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Auch diese Ungleichung gilt offensichtlich für alle  $m \in \mathbb{N}$ . Die Interpolationsungleichung (194) kann also in der Form

$$\begin{aligned} -c_4 \int_B r^2 (\Delta^{(m/2)-1} u)^2 dx &\geq -c_3 \int_B r^4 |\nabla \Delta^{(m/2)-1} u|^2 dx \\ -\frac{1}{4}(n-2)^2 \left\{ c_4 - \frac{c_3}{4}(n+2)^2 \right\} &\int_B |\nabla \Delta^{(m/2)-2} u|^2 dx \end{aligned}$$

angewendet werden; es folgt aus (185):

$$\Phi \geq \left\{ c_5 - \frac{1}{4}(n-2)^2 c_4 + \frac{1}{16}(n+2)^2 (n-2)^2 c_3 \right\} \int_B (-\Delta)^{m-3} u \cdot u dx.$$

Nach einfachen, aber etwas langwierigen Rechnungen erhält man daraus:

$$(199) \quad \Phi \geq \frac{3}{32} m \left\{ \begin{aligned} &-(n+3)(n+1)(n-1)(n-3)(n-5)(n-7) \\ &+3(2m+1)(2m-1)(n+1)(n-1)(n-3)(n-5) \\ &-3(2m+3)(2m+1)(2m-1)(2m-3)(n-1)(n-3) \\ &+(2m+5)(2m+3)(2m+1)(2m-1)(2m-3)(2m-5) \end{aligned} \right\} \cdot \int_B (-\Delta)^{m-3} u \cdot u dx.$$

Durch die Anwendung der Identitäten

$$\begin{aligned}
(n + 2m + 2)(n - 2m - 6) &= (n + 3)(n - 7) - (2m + 1)(2m - 1) - 8(2m - 1) \\
&= (n + 1)(n - 5) - (2m + 3)(2m + 1) - 4(2m + 1) \\
&= (n - 1)(n - 3) - (2m + 5)(2m + 3)
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
(n + 2m - 2)(n - 2m - 2) &= (n + 1)(n - 5) - (2m - 1)(2m - 3) - 4(2m - 3) \\
&= (n - 1)(n - 3) - (2m + 1)(2m - 1)
\end{aligned}$$

folgt weiter:

$$\begin{aligned}
\Phi &\geq \frac{3}{32}m(n + 2m + 2)(n - 2m - 6) \\
&\quad \cdot \left\{ - (n + 1)(n - 1)(n - 3)(n - 5) + 2(2m - 1)(2m - 3)(n - 1)(n - 3) \right. \\
&\quad \left. - (2m + 1)(2m - 1)(2m - 3)(2m - 5) \right\} \int_B (-\Delta)^{m-3} u \cdot u \, dx \\
&= \frac{3}{32}m(n + 2m + 2)(n - 2m - 6)(n + 2m - 2)(n - 2m - 2) \\
&\quad \cdot \left\{ - (n - 1)(n - 3) + (2m - 3)(2m - 5) \right\} \int_B (-\Delta)^{m-3} u \cdot u \, dx \\
&= -\frac{3}{32}m(n + 2m + 2)(n - 2m - 6)(n + 2m - 2)(n - 2m - 2) \\
&\quad \cdot (n + 2m - 6)(n - 2m + 2) \int_B (-\Delta)^{m-3} u \cdot u \, dx.
\end{aligned}$$

Für  $n = 2m + 4$  und  $n = 2m + 5$  ist der Koeffizient positiv. Die Anwendung der entsprechenden Eigenwertungleichung und die Kombination mit der Abschätzung (183) von  $\Phi$  nach oben liefern schließlich:

$$\begin{aligned}
\lambda \int_B u^2 \, dx &\geq \frac{3}{32} \left( (2m + 6) - n \right) \left( n - (2m + 2) \right) \left( n - (2m - 2) \right) \\
&\quad \cdot \left( n + (2m + 2) \right) \left( n + (2m - 2) \right) \left( n + (2m - 6) \right) \\
&\quad \cdot \Lambda_{m-3,1} \int_B u^2 \, dx.
\end{aligned}$$

Damit ist die notwendige Bedingung (174) an  $\lambda$  aus Satz 3.2 für gerades  $m$  bewiesen.

Bei ungeradem  $m$  gehen wir ganz analog vor. Allerdings ist hier die Gleichung (189) der Ausgangspunkt:

$$\begin{aligned}
\Phi &= c_8 \int_B r^4 (\Delta^{(m-1)/2} u)^2 \, dx - c_9 \int_B r^2 |\nabla \Delta^{(m-3)/2} u|^2 \, dx \\
&\quad + c_{10} \int_B (\Delta^{(m-3)/2} u)^2 \, dx, \quad c_8, c_9, c_{10} > 0;
\end{aligned}$$

und es soll die Interpolationsungleichung (196) mit

$$\varepsilon = \frac{c_8}{c_9} = \frac{\left\{ 35(2m+1)(2m-1) - 3(n-1)(n-3) \right\}}{2(m+1)(m-1) \left\{ 21(2m+1)(2m-1) + 11(n-1)(n-3) \right\}}$$

angewendet werden. Wieder ist zu prüfen, ob dieses  $\varepsilon$  der Zulässigkeitsbedingung

$$(200) \quad \varepsilon \geq \frac{2}{n(n-4)}$$

genügt. Für  $n = 2m + 4$  ist diese Bedingung äquivalent zu

$$\begin{aligned} 2m(m+2)c_8 &\geq c_9 \\ \Leftrightarrow 6m^2 - 2m + 1 &\geq 0, \end{aligned}$$

was ganz offensichtlich stets erfüllt ist. Für  $n = 2m + 5$  ist (200) äquivalent zu

$$\begin{aligned} (2m+1)(2m+5)c_8 &\geq 2c_9 \\ \Leftrightarrow 96m^3 + 24m^2 - 40m - 3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Auch diese Bedingung ist für  $m \in \mathbb{N}$  erfüllt; man beachte, daß sich dieselben Bedingungen wie oben bei geradem  $m$  ergeben haben. Somit kann die Interpolationsungleichung (196) in der Form

$$\begin{aligned} -c_9 \int_B r^2 |\nabla \Delta^{(m-3)/2} u|^2 dx &\geq -c_8 \int_B r^4 (\Delta^{(m-1)/2} u)^2 dx \\ -\frac{1}{4} n^2 \left\{ c_9 - \frac{c_8}{4} (n-4)^2 \right\} &\int_B (\Delta^{(m-3)/2} u)^2 dx \end{aligned}$$

verwendet werden; zusammen mit (189) folgt:

$$\Phi \geq \left\{ c_{10} - \frac{1}{4} n^2 c_9 + \frac{1}{16} n^2 (n-4)^2 c_8 \right\} \int_B (\Delta^{(m-3)/2} u)^2 dx.$$

Nach einigen Umformungen folgt auch hier wieder

$$\begin{aligned} \Phi \geq \frac{3}{32} m \left\{ \begin{aligned} &-(n+3)(n+1)(n-1)(n-3)(n-5)(n-7) \\ &+3(2m+1)(2m-1)(n+1)(n-1)(n-3)(n-5) \\ &-3(2m+3)(2m+1)(2m-1)(2m-3)(n-1)(n-3) \\ &+(2m+5)(2m+3)(2m+1)(2m-1)(2m-3)(2m-5) \end{aligned} \right\} \\ &\cdot \int_B (-\Delta)^{m-3} u \cdot u dx. \end{aligned}$$

Das ist genau die Abschätzung (199), die wir oben schon für gerades  $m$  erhalten haben. Wir können also die restlichen Argumente wörtlich von dort übernehmen und haben damit (174) auch für ungerades  $m$  bewiesen.



### 3. Die Gleichung achter Ordnung: Beweis von (175) und (176).

Der naheliegende Versuch, analog zu den vorhergehenden Beweisteilen bei  $b = 8$  den Parameter  $\mu = 9m - \frac{n+8}{2} = 32 - \frac{n}{2}$  zu wählen, führt zumindest mit den hier zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln nicht zum Erfolg. Die sich dabei ergebenden Schwierigkeiten werden im Abschnitt 3.2.6 genauer erläutert.

Hier wählen wir

$$\mu = \frac{1}{2}$$

und erhalten aus (187):

$$(201) \quad \begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} \left\{ 63 - n \right\} \int_B r^8 (\Delta^2 u)^2 dx - 8 \left\{ n^2 - 32n + 444 \right\} \int_B r^6 |\nabla \Delta u|^2 dx \\ &+ 24 \left\{ -n^3 + 36n^2 - 124n + 1944 \right\} \int_B r^4 (\Delta u)^2 dx \\ &- 96 \left\{ n^4 - 28n^3 + 264n^2 - 1152n + 1440 \right\} \int_B r^2 |\nabla u|^2 dx \\ &- 96n \left\{ n^3 + 12n^2 + 44n + 48 \right\} \int_B u^2 dx. \end{aligned}$$

Der Fall  $n = 14$ .

Hier wird dann aus (201):

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{49}{2} \int_B r^8 (\Delta^2 u)^2 dx - 1536 \int_B r^6 |\nabla \Delta u|^2 dx \\ &+ 108480 \int_B r^4 (\Delta u)^2 dx + 130560 \int_B r^2 |\nabla u|^2 dx \\ &- 7741440 \int_B u^2 dx. \end{aligned}$$

Wir setzen  $\varepsilon = \frac{49}{2 \cdot 1536}$  und bemerken, daß der Zulässigkeitstest  $\varepsilon \geq \frac{2}{18.6}$  zur Anwendung der "optimalen" Interpolationsungleichung (196) verfehlt wird. Deshalb wenden wir die Interpolationsungleichung (195) in der Form

$$-1536 \int_B r^6 |\nabla \Delta u|^2 dx \geq -\frac{49}{2} \int_B r^8 (\Delta^2 u)^2 dx - \frac{5243904}{49} \int_B r^4 (\Delta u)^2 dx$$

an und erhalten

$$\begin{aligned} \Phi &\geq \frac{71616}{49} \int_B r^4 (\Delta u)^2 dx + 130560 \int_B r^2 |\nabla u|^2 dx \\ &- 7741440 \int_B u^2 dx. \end{aligned}$$

Zweimalige Anwendung der Einbettungsungleichungen aus Satz 3.8 liefert schließlich:

$$\begin{aligned}\Phi &\geq \frac{8\,187\,840}{49} \int_B r^2 |\nabla u|^2 dx - 7\,741\,440 \int_B u^2 dx \\ &\geq 446\,400 \int_B u^2 dx.\end{aligned}$$

Durch Kombination mit der Abschätzung (183) von  $\Phi$  nach oben erhalten wir

$$\lambda > 111\,600,$$

d.h., wie behauptet, die notwendige Bedingung (175).

Der Fall  $n = 15$ .

In diesem Fall lautet (201):

$$\begin{aligned}\Phi &= 24 \int_B r^8 (\Delta^2 u)^2 dx - 1\,512 \int_B r^6 |\nabla \Delta u|^2 dx \\ &\quad + 115\,416 \int_B r^4 (\Delta u)^2 dx + 30\,240 \int_B r^2 |\nabla u|^2 dx \\ &\quad - 9\,767\,520 \int_B u^2 dx.\end{aligned}$$

Wir setzen  $\varepsilon = \frac{24}{1512} = \frac{1}{63}$  und wollen hier die ‘‘optimale’’ Version von Satz 3.10, d.h. die Ungleichung (196), anwenden. Dazu ist die Gultigkeit von  $\varepsilon \geq \frac{2}{19.7} = \frac{2}{133}$  zu prufen, die ganz offensichtlich gewahrleistet ist. Die Interpolationsungleichung (196) lautet fur unseren Fall:

$$-1\,512 \int_B r^6 |\nabla \Delta u|^2 dx \geq -24 \int_B r^8 (\Delta^2 u)^2 dx - \frac{219\,849}{2} \int_B r^4 (\Delta u)^2 dx.$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung und durch zweimalige Anwendung von Satz 3.8 erhalten wir:

$$\begin{aligned}\Phi &\geq \frac{10\,983}{2} \int_B r^4 (\Delta u)^2 dx + 30\,240 \int_B r^2 |\nabla u|^2 dx \\ &\quad - 9\,767\,520 \int_B u^2 dx \\ &\geq \frac{1\,570\,863}{8} \int_B r^2 |\nabla u|^2 dx - 9\,767\,520 \int_B u^2 dx \\ &\geq \frac{40\,883\,535}{32} \int_B u^2 dx,\end{aligned}$$

zusammen mit (183) folgt schließlich

$$\lambda > \frac{40\,883\,535}{128},$$

d.h. (176). Damit ist der Beweis von Satz 3.2 vollstandig erbracht. ■

### 3.2.6 Grundsätzliche Schwierigkeiten beim Nachweis weiterer kritischer Dimensionen

Eine formale Rechnung zeigt: Könnte man die Einbettungsungleichungen aus Satz 3.8 wie Gleichungen verwenden, so würde die Wahl  $b = 8$  in der Testfunktion, d.h. die Relation (186), für  $\mu \in [0, 9m - \frac{n+8}{2}]$  zum Nachweis der Kritikalität der Dimensionen  $n = 2m + 6$  und  $n = 2m + 7$  für Gleichungen der Ordnung  $\geq 8$  führen.

Im folgenden sollen anhand einiger Beispiele die grundsätzlichen Schwierigkeiten erläutert werden, die derzeit einem Beweis selbst dieser relativ bescheidenen Vermutung im Wege stehen.

Zunächst jedoch möchte ich darlegen, warum bei Gleichungen achter Ordnung ( $m = 4, b = 8$ ) die Wahl für  $\mu$ , die bei  $b = 2, 4, 6$  zum Erfolg geführt hat, nämlich  $\mu = (b+1)m - \frac{n+b}{2} = 32 - \frac{n}{2}$ , ungeeignet ist. Mit dieser Wahl nämlich lautet (187) etwa für  $n = 15$ :

$$(202) \quad \begin{aligned} \Phi = & 9\,240 \int_B r^6 |\nabla \Delta u|^2 dx - 1\,126\,440 \int_B r^4 (\Delta u)^2 dx \\ & + 17\,448\,480 \int_B r^2 |\nabla u|^2 dx - 478\,608\,480 \int_B u^2 dx. \end{aligned}$$

Für die Interpolation der ersten drei Terme ist

$$\varepsilon = \frac{9\,240}{1\,126\,440} = \frac{11}{1341}$$

zu wählen, die Zulässigkeitsbedingung

$$\varepsilon \stackrel{!}{\geq} \frac{2}{11 \cdot 19} = \frac{2}{209}$$

zur Anwendung der "optimalen" Interpolationsungleichung (194) erfüllt dieses  $\varepsilon$  **nicht**. Wir müssen also auf die schwächere Interpolationsungleichung (193) zurückgreifen:

$$\begin{aligned} -1\,126\,440 \int_B r^4 (\Delta u)^2 dx \geq & -9\,240 \int_B r^6 |\nabla \Delta u|^2 dx \\ & - \frac{105\,040\,530}{11} \int_B r^2 |\nabla u|^2 dx. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir aus (202):

$$\begin{aligned} \Phi \geq & \frac{86\,892\,750}{11} \int_B r^2 |\nabla u|^2 dx - 478\,608\,480 \int_B u^2 dx \\ \geq & -\frac{753\,952\,185}{22} \int_B u^2 dx \quad \text{gemäß (190),} \end{aligned}$$

d.h. keine für unsere Zwecke verwertbare Information.

Bei der Erhöhung der Gleichungsordnung, d.h. von  $m$ , verschärfen sich diese Probleme schnell. Bei der Gleichung zwölfter Ordnung ( $m = 6$ ) kann zwar ähnlich wie bei der Gleichung achter Ordnung ( $m = 4$ ) durch geschickte Wahl des Parameters  $\mu = \frac{13}{4}$

die Dimension  $n = 2m + 7 = 19$  als kritisch nachgewiesen werden, allerdings kann hier nicht mehr die “optimale” Ungleichung (196), sondern nur noch (195) angewendet werden.

Bei der Gleichung sechzehnter Ordnung versagen schließlich die in dieser Arbeit entwickelten Methoden vollständig. In diesem Fall ( $m = 8, b = 8$ ) lautet der relevante Term (186) für  $\Phi$ , wobei wir bereits die zu untersuchende Dimension  $n = 2m + 7 = 23$  einsetzen:

$$\begin{aligned}
(203) \quad \Phi &= \{56,5 - \mu\} \int_B r^8 (\Delta^4 u)^2 dx - 16\{1413 - 112\mu\} \int_B r^6 |\nabla \Delta^3 u|^2 dx \\
&+ 48\{104701 - 11864\mu\} \int_B r^4 (\Delta^3 u)^2 dx \\
&- 960\{206909 - 42256\mu\} \int_B r^2 |\nabla \Delta^2 u|^2 dx \\
&+ 31680\{270281 - 73924\mu\} \int_B (\Delta^2 u)^2 dx.
\end{aligned}$$

$$1. \text{ Fall: } \frac{155439}{13886} \leq \mu \leq \frac{113}{2}.$$

In diesem Fall entsteht nach Anwendung der Einbettungsungleichung (191) vor  $\int_B r^6 |\nabla \Delta^3 u|^2 dx$  ein positiver Koeffizient:

$$\begin{aligned}
(204) \quad \Phi &\geq \frac{1}{8}\{-155439 + 13886\mu\} \int_B r^6 |\nabla \Delta^3 u|^2 dx \\
&+ 48\{104701 - 11864\mu\} \int_B r^4 (\Delta^3 u)^2 dx \\
&- 960\{206909 - 42256\mu\} \int_B r^2 |\nabla \Delta^2 u|^2 dx \\
&+ 31680\{270281 - 73924\mu\} \int_B (\Delta^2 u)^2 dx.
\end{aligned}$$

Wendet man nun auf den führenden Term erneut eine Einbettungsungleichung (190) an, so entsteht vor  $\int_B r^4 (\Delta^3 u)^2 dx$  mit

$$\frac{1}{32}\{47505705 - 8100210\mu\}$$

ein Koeffizient, der für alle  $\mu$  im Untersuchungsintervall negativ ist. Es bleibt also nur,  $\int_B r^4 (\Delta^3 u)^2 dx$  zwischen  $\int_B r^6 |\nabla \Delta^3 u|^2 dx$  und  $\int_B r^2 |\nabla \Delta^2 u|^2 dx$  gemäß Satz 3.9 zu interpolieren. Dazu setzen wir

$$\varepsilon = \frac{-155439 + 13886\mu}{384\{-104701 + 11864\mu\}};$$

die “optimale” Variante (194) kommt dabei nicht in Betracht, denn  $\varepsilon$  erfüllt nicht die entsprechende Zulässigkeitsbedingung

$$\varepsilon \stackrel{!}{\geq} \frac{2}{27 \cdot 19} = \frac{2}{513}.$$

Es ist also (193) zu verwenden, aus (204) folgt:

$$\begin{aligned} \Phi \geq & 96 \left\{ -4\,058\,409 + 647\,976\mu - 48 \frac{(-104\,701 + 11\,864\mu)^2}{-155\,439 + 13\,886\mu} \right\} \\ & \cdot \int_B r^2 |\nabla \Delta^2 u|^2 dx \\ & + 31\,680 \{270\,281 - 73\,924\mu\} \int_B (\Delta^2 u)^2 dx. \end{aligned}$$

Der Koeffizient vor  $\int_B |r^2 \nabla \Delta^2 u|^2 dx$  ist positiv unter der zusätzlichen Bedingung

$$\mu > 13,388\dots,$$

in diesem Fall erhalten wir vermittels der Einbettungsungleichung (190):

$$\begin{aligned} \Phi \geq & 24 \left\{ -1\,790\,127\,441 + 245\,199\,624\mu - 25\,392 \frac{(-104\,701 + 11\,864\mu)^2}{-155\,439 + 13\,886\mu} \right\} \\ & \cdot \int_B (\Delta^2 u)^2 dx. \end{aligned}$$

Die Untersuchung der entsprechenden quadratischen Gleichung zeigt, daß dieser Koeffizient für die hier zu betrachtenden Werte von  $\mu$  stets negativ ist. In diesem Fall kann also keine verwertbare Information gewonnen werden.

$$2. \text{ Fall: } 0 \leq \mu \leq \frac{155\,439}{13\,886}.$$

Hier ist der zweite Koeffizient in (203) negativ, und  $\int_B r^6 |\nabla \Delta^3 u|^2 dx$  muß gemäß Satz 3.10 zwischen  $\int_B r^8 (\Delta^4 u)^2 dx$  und  $\int_B r^4 (\Delta^3 u)^2 dx$  interpoliert werden. Dabei setzen wir

$$\varepsilon = \frac{56,5 - \mu}{16 \{1\,413 - 112\mu\}}.$$

Teil b) des Satzes kann verwendet werden, falls  $\varepsilon$  der Zulässigkeitsbedingung

$$\varepsilon \stackrel{!}{\geq} \frac{2}{27 \cdot 15} = \frac{2}{405} \Leftrightarrow \mu \geq \frac{44\,667}{6\,358} \approx 7,03$$

genügt. In diesem Fall entsteht gemäß (196) vor  $\int_B r^4 (\Delta^3 u)^2 dx$  der Koeffizient

$$\frac{1}{32} \{47\,505\,705 - 8\,100\,210\mu\},$$

der für die in Rede stehenden Werte von  $\mu$  negativ ist. Es ist also Teil a) des Satzes 3.10 anzuwenden, damit entsteht vor  $\int_B r^4 (\Delta^3 u)^2 dx$  der Koeffizient

$$(205) \quad -128 \frac{(1\,413 - 112\mu)^2}{113 - 2\mu} + 480(6\,655 - 884\mu),$$

welcher für

$$(206) \quad 0 \leq \mu \leq \frac{\sqrt{124\,573\,769\,625} - 215\,991}{23\,656} \approx 5,79$$

nichtnegativ ist. Angesichts des zunehmenden Informationsverlustes bei Interpolation für  $\varepsilon \searrow 0$  erscheint es sinnvoll,  $\varepsilon$  und damit  $\mu$  möglichst groß zu wählen. Wir verwenden also den gemäß (206) maximal zulässigen Wert für  $\mu$ , damit verschwindet der Koeffizient (205), und wir erhalten:

$$\begin{aligned} \Phi &\geq 36\,227\,428 \int_B r^2 |\nabla \Delta^2 u|^2 dx - 4\,996\,264\,920 \int_B (\Delta^2 u)^2 dx \\ &\geq -205\,187\,567 \int_B (\Delta^2 u)^2 dx \quad \text{mittels (190)}. \end{aligned}$$

Abschließend läßt sich festhalten, daß es in diesem Beispiel nicht mehr gelingt, durch geschickte Wahl des Parameters  $\mu$  dem Ausdruck (203) eine verwertbare Information zu entnehmen.

Für einen vollen Beweis der Vermutung von Pucci und Serrin oder auch nur eine wesentliche Verbesserung unseres Resultats Satz 3.2 scheint ein grundsätzlich neues Hilfsmittel erforderlich. Der entscheidende Punkt ist meines Erachtens das Aufspüren einer "optimalen" Testfunktion  $h$ , für die die hier verwendeten möglicherweise eine Approximation darstellen.

### 3.3 Bemerkungen zum Grenzfall $\lambda = 0$

Die Frage, ob das Problem (163) für  $\lambda = 0$ , d.h. ob

$$(207) \quad \begin{cases} (-\Delta)^m u = |u|^{s-1} u, & u \neq 0 \quad \text{in } B, \\ D^\alpha u|_{\partial B} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m-1, \end{cases}$$

eine Lösung hat, ist ein Beispiel dafür, wo ein Resultat für Gleichungen zweiter Ordnung relativ leicht zu erhalten ist, ein ähnliches Ergebnis für Gleichungen höherer Ordnung vermutet wird, wo aber bislang nur Teilresultate bekannt sind und ein voller Beweis, falls überhaupt möglich, vermutlich sehr schwierig sein wird.

Zunächst soll kurz die Argumentation für die Gleichung zweiter Ordnung [Poh] rekapituliert werden. Die Pohožaev-Identität (164) lautet

$$\int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial \nu} u(x) \right)^2 (x \cdot \nu) d\omega(x) = 0.$$

Ist das glatte Gebiet  $\Omega$  beschränkt und sternförmig bezüglich 0, so gilt  $x \cdot \nu \geq 0$  überall auf  $\partial\Omega$  und sogar  $x \cdot \nu > 0$  auf einem relativ offenen Teil des Randes. Auf diesem Teil ist  $u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ , und  $u$  kann über diesen Teil hinaus durch 0 als Lösung der Differentialgleichung (207) fortgesetzt werden. Das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit liefert  $u \equiv 0$ .

Für Gleichungen höherer Ordnung liefert die Pohožaev-Identität (164) ebenfalls, daß  $D^\alpha u$  für  $|\alpha| \leq m$  auf einem relativ offenen Randstück verschwindet. Außerdem gilt auch für Problem (207) das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit [Pro]. Jedoch benötigt man zu dessen Anwendung  $D^\alpha u = 0$  für  $|\alpha| \leq 2m - 1$  auf einem relativ offenen Teil von  $\partial\Omega$ . Ist  $m > 1$ , so klafft hier also eine Lücke, die bislang noch nicht geschlossen werden konnte.

Selbst wenn man sich auf das denkbar einfachste Gebiet  $\Omega = B$  beschränkt, sind bisher nur Nichtexistenzresultate für (207) in ganz speziellen Lösungsklassen bekannt: für Lösungen vom “Minimum-Typ” oder für positive Lösungen. Weiter unten behandeln wir außerdem radialsymmetrische Lösungen, deren Nichtexistenz sich derzeit allerdings nur bei Gleichungen vierter und sechster Ordnung zeigen läßt.

Gleichung (207) ist die Euler-Lagrange Gleichung für das Variationsproblem

$$(208) \quad \frac{S_0(v)}{\|v\|_{L^{s+1}(B)}^2} \stackrel{!}{=} \min, \quad v \in H_0^m(B).$$

Das entsprechende Variationsproblem in  $\mathbb{R}^n$  wurde bereits in (118) betrachtet, dessen Infimum ist die optimale Sobolev-Konstante  $S$ . Diese Konstante für die Einbettung  $H_0^m \hookrightarrow L^{s+1}$  bzw.  $D^{m,2} \hookrightarrow L^{s+1}(\mathbb{R}^n)$  ist unabhängig vom Gebiet, d.h., es gilt auch:

$$(209) \quad S = \inf_{v \in H_0^m(B) \setminus \{0\}} \frac{S_0(v)}{\|v\|_{L^{s+1}(B)}^2}.$$

Sei nämlich  $(v_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  eine Minimalfolge für (118). Mit geeigneten Zahlen  $R_k > 0$  und  $\tilde{v}_k := v_k(R_k x)$  läßt sich  $\tilde{v}_k \subset C_0^\infty(B)$  erreichen. Es gilt:

$$\begin{aligned} S_0(\tilde{v}_k) &= \int_B (-\Delta)^m (v_k(R_k x)) \cdot v_k(R_k x) \, dx \\ &= R_k^{2m} \int_B (((-\Delta)^m v_k)(R_k x)) \cdot v_k(R_k x) \, dx \\ &= R_k^{2m-n} \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^m v_k(x) \cdot v_k(x) \, dx = R_k^{2m-n} \tilde{S}_0(v_k), \\ \|\tilde{v}_k\|_{L^{s+1}(B)}^2 &= \left( \int_B (v_k(R_k x))^{s+1} \, dx \right)^{2/(s+1)} \\ &= \left( R_k^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (v_k(x))^{s+1} \, dx \right)^{2/(s+1)} = R_k^{2m-n} \|v_k\|_{L^{s+1}(\mathbb{R}^n)}^2, \end{aligned}$$

mithin

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_0(\tilde{v}_k)}{\|\tilde{v}_k\|_{L^{s+1}(B)}^2} = S.$$

Damit ist (209) bewiesen. Angenommen nun, das Infimum würde in  $H_0^m(B)$  angenommen, d.h. es gäbe  $v_0 \in H_0^m(B)$  mit  $S = S_0(v_0) / \|v_0\|_{L^{s+1}(B)}^2$ , ein geeignetes Vielfaches  $u$

löste dann (207). Da durch triviale Fortsetzung auch  $v_0 \in D^{m,2}(\mathbb{R}^n)$  gälte,  $v_0$  also auch das Variationsproblem (118) minimierte, so wäre das Vielfache  $u$  von  $v_0$  Lösung von

$$(-\Delta)^m u = |u|^{s-1} u \text{ in } \mathbb{R}^n$$

mit  $\text{supp } u \subset B$  im Widerspruch zum Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit. Das heißt: das Problem (207) hat keine Lösung vom *Minimum-Typ*, d.h., keine Lösung, die (208) minimiert.

Die Existenz *positiver* Lösungen von (207) ist ebenfalls ausgeschlossen, wie Soranzo [Sor] bemerkt hat (das folgende Argument gilt bislang nur in Kugeln, dazu vgl. Kapitel 1): Ist  $u > 0$  Lösung von (207), so liefert die Pohožaev-Identität (164):  $D^\alpha u|_{\partial B} = 0$  für  $|\alpha| \leq m$ . Somit löst  $v := -\Delta u$  das Problem

$$\begin{cases} (-\Delta)^{m-1} v > 0 & \text{in } B, \\ D^\alpha v|_{\partial B} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m-2. \end{cases}$$

Die Positivität der Greenschen Funktion von  $(-\Delta)^{m-1}$  in  $B$  liefert  $v = -\Delta u > 0$  in  $B$ . Wegen  $u|_{\partial B} = 0$  ist dann gemäß dem Hopfschen Randlemma  $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial B} < 0$ ; Widerspruch!

Um die Existenz von Lösungen von (207) auszuschließen, die lediglich als *radialsymmetrisch* angenommen werden, scheinen Methoden wie in Abschnitt 3.2 anzuwenden zu sein. Entsprechend komplex präsentiert sich dieses Problem; von einem vollständigen Resultat sind wir, wie auch dort, noch weit entfernt.

**Satz 3.11.** *Sei  $m = 2$  oder  $m = 3$ ,  $n > 2m$ ,  $s = (n + 2m)/(n - 2m)$  der kritische Sobolexponent,  $B \subset \mathbb{R}^n$  die Einheitskugel.*

*Sei  $u \in C^{2m}(\overline{B})$  eine radialsymmetrische Lösung von*

$$(210) \quad \begin{cases} (-\Delta)^m u = |u|^{s-1} u & \text{in } B, \\ D^\alpha u|_{\partial B} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m-1. \end{cases}$$

*Dann gilt  $u(x) \equiv 0$  in  $B$ .*

**Beweis.** Wir gehen hier ganz ähnlich vor wie im Beweis von Satz 3.2. Sei  $u \in C^{2m}(\overline{B})$  eine radialsymmetrische Lösung von (210). Wie in (177) und (181) wählen wir die Testfunktion

$$\begin{aligned} h &= \nabla \varphi_b \cdot \nabla u + a_b u, \\ \varphi_b(r) &= \frac{r^2}{2} - \frac{r^{b+2}}{b+2}, \quad a_b(r) = \mu r^b + \frac{n-2m}{2}. \end{aligned}$$

Aus der Differentialgleichung folgt für den in (180) definierten Term  $\Phi = \text{Term (179)}$ , wobei hier analog zu (183) gilt:

$$(211) \quad \Phi \leq 0.$$

Im Beweis von Satz 3.2 deutet sich bereits an, daß für die Untersuchung hoher Raumdimensionen entsprechend große Werte  $b \in 2\mathbb{N}$  zu betrachten sind. Mit Blick auf die in Kapitel 3.2.6 dargelegten Schwierigkeiten wird dadurch die Beschränkung auf Gleichungen niedriger Ordnung verständlich.



**1. Die Gleichung vierter Ordnung:  $m = 2$ .**

Wir setzen  $\mu = 0$  und erhalten aus (211) sowie der Formel für  $\Phi$  von S. 98 die Ungleichung

$$0 \geq \frac{1}{2} \left\{ 3(b+1) - (n-1) \right\} \int_B r^b (\Delta u)^2 dx \\ - \frac{b}{2} \left\{ (b+1)(b-1) - 2(b+1)(n-1) + (n+1)(n-1) \right\} \int_B r^{b-2} |\nabla u|^2 dx.$$

Solange  $b < n \leq 3b + 4$  gilt, ist der erste Koeffizient nichtnegativ, und es kann die Einbettungsungleichung (191) verwendet werden:

$$0 \geq \frac{1}{8} \left\{ (n-b)^2 \left( 3(b+1) - (n-1) \right) - 4b(b+1)(b-1) \right. \\ \left. + 8b(b+1)(n-1) - 4b(n+1)(n-1) \right\} \int_B r^{b-2} |\nabla u|^2 dx \\ = \frac{1}{8} (n-b) \left\{ (n-b) \left( 3(b+1) - (n-1) \right) + 4b(b+1) \right. \\ \left. - 4b(n-1) \right\} \int_B r^{b-2} |\nabla u|^2 dx \\ = \frac{1}{8} (n-b) \left\{ (n+b) \left( 3(b+1) - (n-1) \right) - 2b(b+1) - 2b(n-1) \right\} \\ \cdot \int_B r^{b-2} |\nabla u|^2 dx \\ = \frac{1}{8} (n-b)(n+b) \left( (b+4) - n \right) \int_B r^{b-2} |\nabla u|^2 dx \geq 0,$$

sofern  $n \in \{b+1, b+2, b+3\}$ . Indem man  $b$  alle geraden Zahlen  $\geq 4$  durchlaufen läßt, erhält man für jedes beliebige  $n > 4$ :

$$\nabla u(x) \equiv 0 \text{ in } B$$

und damit die Behauptung im Falle  $m = 2$ .

**2. Die Gleichung sechster Ordnung:  $m = 3$ .**

Wir setzen wieder  $\mu = 0$  und erhalten durch Kombination von (211), (179) und Hilfssatz 3.6:

$$0 \geq \frac{1}{2} \left\{ 5(b+1) - (n-1) \right\} \int_B r^b |\nabla \Delta u|^2 dx \\ + b \left\{ 3(b+1) - (n-1) \right\} \int_B r^{b-1} (\Delta u)' (\Delta u) dx \\ + b(n-b)(n-b-2) \int_B r^{b-2} (\Delta u)' u' dx.$$

Durch partielle Integration gemäß Hilfssatz 3.7.i, j folgt:

$$\begin{aligned}
0 &\geq \frac{1}{2} \left\{ 5(b+1) - (n-1) \right\} \int_B r^b |\nabla \Delta u|^2 dx \\
&\quad - \frac{b}{2} \left\{ 5(b+1)(b-1) - 2(b-1)(n-1) + (n+1)(n-1) \right\} \int_B r^{b-2} (\Delta u)^2 dx \\
&\quad - \frac{b}{2} (b-2)(n-b+2)(n-b)(n-b-2) \int_B r^{b-4} |\nabla u|^2 dx.
\end{aligned}$$

Solange  $n \leq 5b+6$  gilt, ist der erste Term nichtnegativ, und wir können diese Abschätzung mittels der Einbettungsungleichung (190) nach unten fortsetzen:

$$\begin{aligned}
0 &\geq \frac{1}{8} (n+b-2)^2 \left\{ 5(b+1) - (n-1) \right\} \int_B r^{b-2} (\Delta u)^2 dx \\
&\quad - \frac{b}{2} \left\{ 5(b+1)(b-1) - 2(b-1)(n-1) + (n+1)(n-1) \right\} \int_B r^{b-2} (\Delta u)^2 dx \\
&\quad - \frac{b}{2} (b-2)(n-b+2)(n-b)(n-b-2) \int_B r^{b-4} |\nabla u|^2 dx \\
&= \frac{1}{8} \left\{ - (n+1)(n-1)(n-3) - (b-7)(n+1)(n-1) \right. \\
&\quad \left. + (17b-29)(b+1)(n-1) - 5(3b+1)(b+1)(b-1) \right\} \int_B r^{b-2} (\Delta u)^2 dx \\
&\quad - \frac{b}{2} (b-2)(n-b+2)(n-b)(n-b-2) \int_B r^{b-4} |\nabla u|^2 dx \\
&= \frac{1}{8} (n-b-2) \left\{ - (n+1)(n-1) - 2(b-4)(n-1) + 5(3b+1)(b-1) \right\} \\
&\quad \cdot \int_B r^{b-2} (\Delta u)^2 dx \\
&\quad - \frac{b}{2} (b-2)(n-b+2)(n-b)(n-b-2) \int_B r^{b-4} |\nabla u|^2 dx \\
&= \frac{1}{8} (n-b-2)(3b+2-n)(n+5b-6) \int_B r^{b-2} (\Delta u)^2 dx \\
&\quad - \frac{b}{2} (b-2)(n-b+2)(n-b)(n-b-2) \int_B r^{b-4} |\nabla u|^2 dx.
\end{aligned}$$

Wir wollen diese Ungleichung bei festem geraden  $b \geq 4$  für  $n = b+3, b+4, b+5$  auswerten. Tatsächlich ist im Bereich

$$b+2 \leq n \leq 3b+2$$

der führende Koeffizient nichtnegativ, und wir können erneut eine Einbettungsungleichung aus Satz 3.8 verwenden:

$$0 \geq \frac{1}{32} (n-b-2)(3b+2-n)(n+5b-6)(n-b+2)^2 \int_B r^{b-4} |\nabla u|^2 dx$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{b}{2}(b-2)(n-b+2)(n-b)(n-b-2) \int_B r^{b-4} |\nabla u|^2 dx \\
= & \frac{1}{32} \left( (b+6) - n \right) \left( n - (b+2) \right) \left( n - (b-2) \right) \\
& \cdot \left( n + (b+2) \right) \left( n + (b-2) \right) \int_B r^{b-4} |\nabla u|^2 dx.
\end{aligned}$$

Bei festem geraden  $b \geq 4$  ist dieser Koeffizient positiv in den Dimensionen  $n = b + 3$ ,  $b + 4$  und  $b + 5$ . Indem man wieder  $b$  alle geraden Zahlen  $\geq 4$  durchlaufen läßt, folgt für jedes  $n > 6$ :

$$\nabla u(x) \equiv 0 \text{ in } B,$$

d.h. die Behauptung auch im Falle  $m = 3$ . ■

## Bezeichnungen

$t^+$	$\max\{t, 0\}$ für $t \in \mathbb{R}$ .
$t^-$	$\min\{t, 0\}$ für $t \in \mathbb{R}$ .
$n$	Raumdimension.
$B$	Offene Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ .
$d(x)$	$= 1 -  x $ , für $x \in B$ .
$[XY]$	$= \left   x y - \frac{x}{ x } \right $ , für $x, y \in B$ .
$r$	$=  x $ , $x \in \mathbb{R}^n$ .
$\Omega$	Beschränktes glattes Gebiet.
$d\omega$	Oberflächenelement für $\partial\Omega$ .
$\nu$	Äußere Einheitsnormale an $\partial\Omega$ .
$e_n$	Volumen der $n$ -dimensionalen Einheitskugel $B \subset \mathbb{R}^n$ .
$\omega_n$	$(n - 1)$ -dimensionaler Oberflächeninhalt der Sphäre $S^{n-1} = \partial B \subset \mathbb{R}^n$ .
$D_{i_1, \dots, i_k}$	$= \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}$ .
$\alpha, \beta$	Multiindizes $\in \mathbb{N}_0^n$ , $ \alpha  = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ .
$D^\alpha$	$= \prod_{i=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{\alpha_i}$ .
$W^{k,p}$	Sobolevraum der $k$ -mal schwach differenzierbaren Funktionen mit $L^p$ -Ableitungen.
$W_0^{k,p}$	Abschluß von $C_0^\infty$ in $W^{k,p}$ .
$\ u\ _{W_0^{k,p}}^p$	$= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \int_{\Omega}  D_{i_1, \dots, i_k} u ^p dx$ .
$D^{k,p}$	Vervollständigung von $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der Norm $\ \cdot\ _{W_0^{k,p}}$ .
$H^k$	$= W^{k,2}$ .
$H_0^k$	$= W_0^{k,2}$ .
$H^{-k}$	Dualraum $(H_0^k)^*$ .
$\langle f, u \rangle$	Duale Paarung: $u \in$ Banachraum, $f \in$ Dualraum.
$2m$	Ordnung der betrachteten Differentialgleichungen.

$\Lambda_{m,j}$	$j$ -ter Dirichlet-Eigenwert von $(-\Delta)^m$ , dabei tritt jeder Eigenwert entsprechend seiner Vielfachheit auf.
$\varphi_j$	Zugehörige Eigenfunktionen, in $H_0^m$ orthonormiert.
$\langle \varphi_1, \dots, \varphi_j \rangle$	Von $\varphi_1, \dots, \varphi_j$ aufgespannter Untervektorraum.
$G_{m,n}, \mathcal{G}_{m,n}$	Greensche Funktion bzw. Greenscher Operator zu $(-\Delta)^m$ unter Dirichletrandbedingungen in $B \subset \mathbb{R}^n$ .
$G_{m,\Omega}, \mathcal{G}_{m,\Omega}$	Dito in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .
$G_{m,n,\mathcal{A}}, \mathcal{G}_{m,n,\mathcal{A}}$	Dito zu $(-\Delta)^m + \mathcal{A}$ in $B \subset \mathbb{R}^n$ , dabei ist $\mathcal{A}u = \sum_{ \alpha  \leq 2m-1} b_\alpha D^\alpha u$ .
$G_{m,\Omega,\mathcal{A}}, \mathcal{G}_{m,\Omega,\mathcal{A}}$	Dito in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .
$s$	$= \frac{n+2m}{n-2m}$ , falls $n > 2m$ ; kritischer Sobolevexponent.
$S_\lambda(u)$	$= \begin{cases} \int_\Omega \left( (\Delta^{m/2} u)^2 - \lambda u^2 \right) dx, & \text{falls } m \text{ gerade,} \\ \int_\Omega \left(  \nabla \Delta^{(m-1)/2} u ^2 - \lambda u^2 \right) dx, & \text{falls } m \text{ ungerade.} \end{cases}$
$E_\lambda(u)$	$= \frac{1}{2} S_\lambda(u) - \frac{1}{s+1} \int_\Omega  u ^{s+1} dx.$
$\ u\ _{H_0^k}^2$	$= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \int_\Omega  D_{i_1, \dots, i_k} u ^2 dx = S_0(u).$
$(\cdot, \cdot)_{H_0^k}$	Entsprechendes Skalarprodukt in $H_0^k$ .
$N, \tilde{N}$	Nebenbedingungen für die Variationsprobleme in Kapitel 2.1, s.S. 64.
$\gamma$	Hölder-Exponent, in $(0, 1)$ .
$C$	Positive Abschätzungskonstanten, die ihren Wert von Zeile zu Zeile ändern können.
$f(t) \sim g(t)$	$\exists C > 0 \forall t : \frac{1}{C} f(t) \leq g(t) \leq C f(t).$ Für $f, g \geq 0$ .
$f(t) \preceq g(t)$	$\exists C > 0 \forall t : f(t) \leq C g(t).$ Für $f, g \geq 0$ .

## Literatur

- [AY1] Adimurthi, S. L. Yadava, Elementary proof of the nonexistence of nodal solutions for the semilinear elliptic equations with critical Sobolev exponent, *Nonlinear Anal., T.M.A.* **14** (1990), 785-787.
- [AY2] Adimurthi, S. L. Yadava, An elementary proof of the uniqueness of positive radial solutions of a quasilinear Dirichlet problem, *Arch. Rational Mech. Anal.* **127** (1994), 219-229.
- [Ag] Sh. Agmon, Maximum theorems for solutions of higher order elliptic equations, *Bull. Amer. Math. Soc.* **66** (1960), 77-80.
- [ADN] Sh. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I, *Commun. Pure Appl. Math.* **12** (1959), 623-727.
- [AR] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications, *J. Funct. Anal.* **14** (1973), 349-381.
- [AS] A. Ambrosetti, M. Struwe, A note on the problem  $-\Delta u = \lambda u + u|u|^{2^*-2}$ , *Manuscr. Math.* **54** (1986), 373-379.
- [An] A. Ancona, Comparaison des mesures harmoniques et des fonctions de Green pour des opérateurs elliptiques sur un domaine Lipschitzien, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, **294** (1982), 505-508.
- [ABP] F. V. Atkinson, H. Brezis, L. A. Peletier, Nodal solutions of elliptic equations with critical Sobolev exponents, *J. Differ. Equations* **85** (1990), 151-170.
- [Au] Th. Aubin, Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, *J. Math. Pures Appl.* **55** (1976), 269-296.
- [BBF] P. Bartolo, V. Benci, D. Fortunato, Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with “strong” resonance at infinity, *Nonlinear Anal., T.M.A.* **7** (1983), 981-1012.
- [BenC] V. Benci, G. Cerami, Multiple positive solutions of some elliptic problems via the Morse theory and the domain topology. *Calc. Var.* **2** (1994), 29-48.
- [Benn] A. Bennett, Symmetry in an overdetermined fourth order elliptic boundary value problem, *SIAM J. Math. Anal.* **17** (1986), 1354-1358.
- [Ber1] F. Bernis, Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **106** (1989), 217-241.
- [Ber2] F. Bernis, Liouville theorems and uniqueness in unbounded domains for nonlinear elliptic and parabolic equations, in: A. R. Aftabizadeh (ed.), *Proceedings of The International Conference on Theory and Applications of Differential Equations, Ohio University 1988, Vol. I*, pp. 69-73, Ohio University Press: Athens, Ohio, 1989.

- [Ber3] F. Bernis, Persönliche Mitteilung.
- [BGP] F. Bernis, J. Garcia-Azorero, I. Peral, Existence and multiplicity of nontrivial solutions in semilinear critical problems of fourth order, *Adv. Differ. Equations* **1** (1996), 219-240.
- [BerG] F. Bernis, H.-Ch. Grunau, Critical exponents and multiple critical dimensions for polyharmonic operators, *J. Differ. Equations* **117** (1995), 469-486.
- [Bo1] T. Boggio, Sull'equilibrio delle piastre elastiche incastrate, *Rend. Acc. Lincei* **10** (1901), 197-205.
- [Bo2] T. Boggio, Sulle funzioni di Green d'ordine m, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **20** (1905), 97-135.
- [Böh] R. Böhme, Die Lösung der Verzweigungsgleichungen für nichtlineare Eigenwertprobleme, *Math. Z.* **127** (1972), 105-126.
- [BrC] H. Brezis, J.-M. Coron, Multiple solutions of  $H$ -systems and Rellich's conjecture, *Commun. Pure Appl. Math.* **37** (1984), 149-187.
- [BrCN] H. Brezis, J.-M. Coron, L. Nirenberg, Free vibrations for a nonlinear wave equation and a theorem of P. Rabinowitz, *Commun. Pure Appl. Math.* **33** (1980), 667-689.
- [BrN] H. Brezis, L. Nirenberg, Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, *Commun. Pure Appl. Math.* **36** (1983), 437-477.
- [CFP] A. Capozzi, D. Fortunato, G. Palmieri, An existence result for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponent, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire* **2** (1985), 463-470.
- [CFS] G. Cerami, D. Fortunato, M. Struwe, Bifurcation and multiplicity results for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponents, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire* **1** (1984), 341-350.
- [CSS] G. Cerami, S. Solimini, M. Struwe, Some existence results for superlinear elliptic boundary value problems involving critical exponents, *J. Funct. Anal.* **69** (1986), 289-306.
- [CFM] Ph. Clément, D. G. de Figueiredo, E. Mitidieri, Positive solutions of semilinear elliptic systems, *Commun. Partial Differ. Equations* **17** (1992), 923-940.
- [Cof] C. V. Coffman, On the structure of solutions to  $\Delta^2 u = \lambda u$  which satisfy the clamped plate conditions on a right angle, *SIAM J. Math. Anal.* **13**, 746-757 (1982).
- [CD] C. V. Coffman, R. J. Duffin, On the structure of biharmonic functions satisfying the clamped plate conditions on a right angle, *Adv. Appl. Math.* **1** (1980), 373-389.
- [Cor] J.-M. Coron, Topologie et cas limite des injections de Sobolev, *C. R. Acad. Sc. Paris Ser. I*, **299** (1984), 209-212.

- [Cou] R. Courant, *Dirichlet's Principle, Conformal Mapping, and Minimal Surfaces*, Interscience: New York, 1950.
- [CFZ] M. Cranston, E. Fabes, Zhao Zhongxin, Conditional gauge and potential theory for the Schrödinger operator, *Trans. Amer. Math. Soc.* **307** (1988), 171-194.
- [Da1] R. Dalmaso, Problème de Dirichlet homogène pour une équation biharmonique semi-linéaire dans une boule, *Bull. Sc. math.*, **2<sup>e</sup> série**, **114** (1990), 123-137.
- [Da2] R. Dalmaso, Un problème de symétrie pour une équation biharmonique, *Ann. Fac. Sc. Toulouse* **11** (1990), 45-53.
- [Da3] R. Dalmaso, Uniqueness theorems for some fourth-order elliptic equations, *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), 1177-1183.
- [Du] R. J. Duffin, On a question of Hadamard concerning super-biharmonic functions, *J. Math. Phys.* **27** (1949), 253-258.
- [Ed1] J. Edenhofer, Integraldarstellung einer  $m$ -polyharmonischen Funktion, deren Funktionswerte und erste  $m - 1$  Normalableitungen auf einer Hypersphäre gegeben sind, *Math. Nachr.* **68** (1975), 105-113.
- [Ed2] J. Edenhofer, Eine Integraldarstellung der Lösung der Dirichletschen Aufgabe bei der Polypotentialgleichung im Falle einer Hyperkugel, *Math. Nachr.* **69** (1975), 149-162.
- [EFJ] D. E. Edmunds, D. Fortunato, E. Jannelli, Critical exponents, critical dimensions and the biharmonic operator, *Arch. Rational Mech. Anal.* **112** (1990), 269-289.
- [FJ] D. Fortunato, E. Jannelli, Infinitely many solutions for some nonlinear elliptic problems in symmetrical domains, *Proc. Royal. Soc. Edinburgh* **105 A** (1987), 205-213.
- [Fr] A. Friedman, *Partial Differential Equations*, Holt, Rinehart and Winston: New York, 1969.
- [Ga1] P. R. Garabedian, A partial differential equation arising in conformal mapping, *Pacific J. Math.* **1** (1951), 485-524.
- [Ga2] P. R. Garabedian, *Partial Differential Equations*, second edition, Chelsea: New York, 1986.
- [GT] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, second edition, Springer-Verlag: Berlin etc., 1983.
- [GNN] B. Gidas, Wei-Ming Ni, L. Nirenberg, Symmetry and related properties via the maximum principle, *Commun. Math. Phys.* **68** (1979), 209-243.
- [Gr1] H.-Ch. Grunau, The Dirichlet problem for some semilinear elliptic differential equations of arbitrary order, *Analysis* **11** (1991), 83-90.



- [Gr2] H.-Ch. Grunau, Positive solutions to semilinear polyharmonic Dirichlet problems involving critical Sobolev exponents, *Calc. Var.* **3** (1995), 243-252.
- [Gr3] H.-Ch. Grunau, Critical exponents and multiple critical dimensions for polyharmonic operators. II, *Boll. Unione Mat. Ital.* (7) **9-B** (1995), 815-847.
- [GS1] H.-Ch. Grunau, G. Sweers, Positivity for equations involving polyharmonic operators with Dirichlet boundary conditions, *Math. Ann.*, erscheint demnächst.
- [GS2] H.-Ch. Grunau, G. Sweers, Classical solutions for some higher order semilinear elliptic equations under weak growth conditions, *Nonlinear Anal., T.M.A.*, erscheint demnächst.
- [GS3] H.-Ch. Grunau, G. Sweers, Positivity for perturbations of polyharmonic operators with Dirichlet boundary conditions in two dimensions, *Math. Nachr.* **179** (1996), 89-102.
- [H1] J. Hadamard, Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées, in: *Œuvres de Jaques Hadamard*, Tome II, pp. 515-641, Centre National de la Recherche Scientifique: Paris, 1968, Nachdruck von: *Mémoires présentés par divers savants a l'Académie des Sciences* **33** (1908), 1-128.
- [H2] J. Hadamard, Sur certains cas intéressants du problème biharmonique, in: *Œuvres de Jaques Hadamard*, Tome III, pp. 1297-1299, Centre National de la Recherche Scientifique: Paris, 1968, Nachdruck von: *Atti IVe Congr. Intern. Mat. Rome* (1908), 12-14.
- [He] P. J. H. Hedenmalm, A computation of Green functions for the weighted biharmonic operators  $\Delta|z|^{-2\alpha}\Delta$ , with  $\alpha > -1$ , *Duke Math. J.* **75** (1994), 51-78.
- [HuS] H. Hueber, M. Sieveking, Uniform bounds for quotients of Green functions on  $C^{1,1}$ -domains, *Ann. Inst. Fourier* **32** (1982), 105-117.
- [J1] N. Jakobowsky, A perturbation result concerning a second solution to the Dirichlet problem for the equation of prescribed mean curvature, *J. Reine Angew. Math.* **457** (1994), 1-21.
- [J2] N. Jakobowsky, Multiple surfaces of non-constant mean curvature, *Math. Z.* **217** (1994), 497-512.
- [JN] O. John, J. Naumann, On regularity of variational solutions of the von Kármán equations, *Math. Nachr.* **71** (1976), 23-36.
- [Ko] A. I. Kozhanov, On estimates of solutions for a class of higher order nonlinear elliptic equations, *Soviet Math. Dokl.* **33** (1986), 73-77.
- [KKM] V. A. Kozlov, V. A. Kondrat'ev, V. G. Maz'ya, On sign variation and the absence of "strong" zeros of solutions of elliptic equations, *Math. USSR Izvestiya* **34** (1990), 337-353.

- [Li] P. L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, Part 1, *Rev. Mat. Iberoam.* **1** (1985), 145-201.
- [Loe] Ch. Loewner, On generation of solutions of the biharmonic equation in the plane by conformal mappings, *Pacific J. Math.* **3** (1953), 417-436.
- [Lu] St. Luckhaus, Existence and regularity of weak solutions to the Dirichlet problem for semilinear elliptic systems of higher order, *J. Reine Angew. Math.* **306** (1979), 192-207.
- [Ma] V. A. Malyshev, Hadamard's conjecture and estimates of the Green function, *St. Petersburg Math. J.* **4** (1993), 633-666.
- [Mi] E. Mitidieri, A Rellich type identity and applications, *Commun. Partial Differ. Equations* **18** (1993), 125-151.
- [MS] E. Mitidieri, G. Sweers, Weakly coupled elliptic systems and positivity, *Math. Nachr.* **173** (1995), 259-286.
- [Na] N. S. Nadirashvili, Rayleigh's conjecture on the principal frequency of the clamped plate, *Arch. Rational Mech. Anal.* **129** (1995), 1-10.
- [NN] Wei-Ming Ni, R. D. Nussbaum, Uniqueness and nonuniqueness for positive radial solutions of  $\Delta u + f(u, r) = 0$ , *Commun. Pure Appl. Math.* **38** (1985), 67-108.
- [Nic] M. Nicolesco, *Les fonctions polyharmoniques*, Hermann: Paris, 1936.
- [Nit] J. C. C. Nitsche, Boundary value problems for variational integrals involving surface curvatures, *Quarterly Appl. Math.* **51** (1993), 363-387.
- [NSY] E. S. Noussair, Ch. A. Swanson, Yang Jianfu, Critical semilinear biharmonic equations in  $\mathbb{R}^N$ , *Proc. Royal Soc. Edinburgh* **121 A** (1992), 139-148.
- [Osh] St. Osher, On Green's function for the biharmonic equation in a right angle wedge, *J. Math. Anal. Appl.* **43** (1973), 705-716.
- [Osw] P. Oswald, On a priori estimates for positive solutions of a semilinear biharmonic equation in a ball, *Comment. Math. Univ. Carolinae* **26** (1985), 565-577.
- [PayS] L. E. Payne, P. W. Schaefer, On overdetermined boundary value problems for the biharmonic operator, *J. Math. Anal. Appl.* **187** (1994), 598-616.
- [PV] L. A. Peletier, R. C. A. M. van der Vorst, Existence and non-existence of positive solutions of non-linear elliptic systems and the biharmonic equation, *Differ. Integr. Equations* **5** (1992), 747-767.
- [Poh] S. I. Pohožaev, Eigenfunctions of the equation  $\Delta u + \lambda f(u) = 0$ , *Soviet Math. Dokl.* **6** (1965), 1408-1411.
- [Pom] Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*, Springer-Verlag: Berlin etc., 1992.

- [Pro] M. H. Protter, Unique continuation for elliptic equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **95** (1960), 81-91.
- [PS1] P. Pucci, J. Serrin, A general variational identity, *Indiana Univ. Math. J.* **35** (1986), 681-703.
- [PS2] P. Pucci, J. Serrin, Remarks on the first eigenspace for polyharmonic operators, *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena* **36** (1988), 107-117.
- [PS3] P. Pucci, J. Serrin, Critical exponents and critical dimensions for polyharmonic operators, *J. Math. Pures Appl.* **69** (1990), 55-83.
- [R] P. H. Rabinowitz, Some aspects of nonlinear eigenvalue problems, *Rocky Mount. J. Math.* **3** (1973), 161-202.
- [SH] H. H. Schaefer, *Banach lattices and positive operators*, Springer-Verlag: Berlin etc., 1974.
- [SP] P. W. Schaefer, Solution, gradient, and Laplacian bounds in some nonlinear fourth order elliptic equations, *SIAM J. Math. Anal.* **18** (1987), 430-434.
- [Sn] R. Schoen, Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature, *J. Diff. Geom.* **20** (1984), 479-495.
- [Schw] H. A. Schwarz, Notizia sulla rappresentazione conforme di un'area ellittica sopra un'area circolare, in: *Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Zweiter Band*, pp. 102-107, Springer-Verlag: Berlin, 1890; Nachdruck von: *Annali di Matematica pura ed applicata*, II<sup>a</sup> serie, tomo III<sup>o</sup>, 1869-1870, pp. 166-170.
- [ST] H. S. Shapiro, M. Tegmark, An elementary proof that the biharmonic Green function of an eccentric ellipse changes sign, *SIAM Rev.* **36** (1994), 99-101.
- [Sim] L. Simon, Existence of Willmore surfaces, *Proc. Centre Math. Anal., Austral. Nat. Univ. Canberra* **10** (1985), 187-216.
- [Sol] S. Solimini, On the existence of infinitely many radial solutions for some elliptic problems, *Rev. Mat. Apl.* **9** (1987), 75-86.
- [Sor] R. Soranzo, A priori estimates and existence of positive solutions of a superlinear polyharmonic equation, *Dyn. Syst. Appl.* **3** (1994), 465-487.
- [Sri] P. N. Srikanth, Uniqueness of solutions of nonlinear Dirichlet problems, *Differ. Integral Equations* **6** (1993), 663-670.
- [Ste] K. Steffen, On the nonuniqueness of surfaces with constant mean curvature spanning a given contour, *Arch. Rational Mech. Anal.* **94** (1986), 101-122.
- [Str1] M. Struwe, Large  $H$ -surfaces via the mountain-pass-lemma, *Math. Ann.* **270** (1985), 441-459.

- [Str2] M. Struwe, Nonuniqueness in the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature, *Arch. Rational Mech. Anal.* **93** (1986), 135-157.
- [Str3] M. Struwe, *Plateau's problem and the calculus of variations*, Math. Notes **35**, Princeton University Press: Princeton, 1988.
- [Str4] M. Struwe, *Variational Methods*, Springer-Verlag: Berlin etc., 1990.
- [Swa] Ch. A. Swanson, The best Sobolev constant, *Applicable Anal.* **47** (1992), 227-239.
- [Swe1] G. Sweers, Strong positivity in  $C(\bar{\Omega})$  for elliptic systems, *Math. Z.* **209** (1992), 251-271.
- [Swe2] G. Sweers, Positivity for a strongly coupled elliptic system by Green function estimates, *J. Geometric Anal.* **4** (1994), 121-142.
- [Sz] G. Szegő, Remark on the preceding paper of Charles Loewner, *Pacific J. Math.* **3** (1953), 437-446.
- [Ta] G. Talenti, On the first eigenvalue of the clamped plate, in: H. Brezis, J. L. Lions (eds.), *Nonlinear partial differential equations and their applications, Collège de France Seminar, Vol. VI, Pitman Research Notes Math.* **109** (1984), 309-313.
- [To] F. Tomi, Über elliptische Differentialgleichungen 4. Ordnung mit einer starken Nichtlinearität, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II. Math.-Phys. Klasse* (1976), 33-42.
- [Tr] N. S. Trudinger, Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa* **22** (1968), 265-274.
- [Vo1] R. C. A. M. van der Vorst, *Variational problems with a strongly indefinite structure*, Dissertation, Rijksuniv. Leiden, 1994.
- [Vo2] R. C. A. M. van der Vorst, Fourth order elliptic equations with critical growth, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, **320** (1995), 295-299.
- [Wa1] W. von Wahl, Über semilineare elliptische Gleichungen mit monotoner Nichtlinearität, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II. Math.-Phys. Klasse* (1975), 27-33.
- [Wa2] W. von Wahl, Semilinear elliptic and parabolic equations of arbitrary order, *Proc. Royal Soc. Edinburgh* **78 A** (1978), 193-207.
- [Wid] K.-O. Widmann, Inequalities for the Green function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations, *Math. Scand.* **21** (1967), 17-37.
- [Zg] Zhang Liqun, Uniqueness of positive solutions of  $\Delta u + u + u^p = 0$  in a ball, *Commun. Partial Differ. Equations* **17** (1992), 1141-1164.
- [Zo] Zhao Zhongxin, Green function for Schrödinger operator and conditioned Feynman-Kac gauge, *J. Math. Anal. Appl.* **116** (1986), 309-334.